

# fizikai szemle



2005/9

A Magyar Tudományos Akadémia  
Fizikai Tudományok Osztálya,  
az Eötvös Loránd Fizikai Társulat,  
a Magyar Biofizikai Társaság,  
a Magyar Nukleáris Társaság és  
az Oktatási Minisztérium  
folyóirata

Főszerkesztő:  
Berényi Dénes

Szerkesztőbizottság:  
Barlai Katalin (Csillagászat),  
Faigel Gyula,  
Gnädig Péter (Négyzögletes kerék),  
Gyulai József,  
Horváth Dezső (Mag- és részecskefizika),  
Jéki László, Kanyár Béla (Sugárvédelem),  
Németh Judit, Ormos Pál (Biofizika),  
Papp Katalin,  
Sükösd Csaba (Vélemények),  
Szőkefalvi-Nagy Zoltán (Biofizika),  
Tóth Eszter,  
Turiné Frank Zsuzsa (Megemlékezések),  
Ujvári Sándor (A fizika tanítása)

Szerkesztő:  
Hock Gábor

Műszaki szerkesztő:  
Kármán Tamás

A lap e-postacíme:  
fizsem.elft@mtesz.hu  
A folyóiratba szánt írásokat erre a címre kérjük.

A címlapon:

Szivárvány a Fővámház felett, lásd  
Cserti József cikksorozatának első részét  
a 297–302. oldalakon.  
Gáti György (www.gatifoto.hu) felvétele

## TARTALOM

<i>Cserti József</i> : A szivárvány fizikája – I.	297
<i>Mészáros Péter</i> : A nagyenergiájú neutrínók és a kozmikus sugárzás fizikája és asztrofizikája	302
<i>Papp Tibor</i> : A Lagrange-mechanika alapjai	306
<i>Kun Mária</i> : Fiatal csillagok és környezetük kölcsönhatásai	309
<i>Héjjas István</i> : A fáziskontraszt-mikroszkóp és tanulságai	314
<b>MEGEMLÉKEZÉSEK</b>	
<i>Klopfer Ervin</i> : Tisztelgés a Simonyi-féle gyorsítóépítő iskolának	317
<b>A FIZIKA TANÍTÁSA</b>	
<i>Pálfalvi László</i> : Ismét Földközelen a Mars!	319
<b>MINDENTUDÁS AZ ISKOLÁBAN</b>	
Hogyan árnyékolható le a mobiltelefon ( <i>Tichy Géza</i> )	323
<b>A FIZIKA VILÁGÉVE HÍREI</b>	
Fény a világ körül – in memoriam Albert Einstein	325
<b>VÉLEMÉNYEK</b>	
Megjegyzés egy relativitáselmélet-értelmezéshez ( <i>András Ferenc</i> )	328
A BME Kémiai Fizika Tanszékének helyzete ( <i>Noszticzius Zoltán, Farkas Henrik</i> )	332
<b>HÍREK – ESEMÉNYEK</b>	
Kitüntetés	332
<i>J. Cserti</i> : The optics of the rainbow – I	
<i>P. Mészáros</i> : High energy neutrinos. Cosmic ray physics and astrophysics	
<i>T. Papp</i> : The foundations of Lagrangian mechanics	
<i>M. Kun</i> : Interactions of young stars with their surrounding	
<i>I. Héjjas</i> : Phase contrast microscopy	
<b>COMMEMORATIONS</b>	
<i>E. Klopfer</i> : K. Simonyi's school of accelerator builders	
<b>TEACHING PHYSICS</b>	
<i>L. Pálfalvi</i> : Planet Mars again near to the Earth	
<b>SCIENCE IN BITS FOR THE SCHOOL</b>	
How to screen a mobile phone ( <i>G. Tichy</i> )	
<b>WORLD YEAR OF PHYSICS 2005 NEWS</b>	
<b>OPINIONS</b>	
Comments on an interpretation of the theory of relativity ( <i>F. András</i> )	
The Department of Chemical Physics at Budapest Technical University ( <i>Z. Noszticzius, H. Farkas</i> )	
<b>EVENTS</b>	
<i>J. Cserti</i> : Die Optik des Regenbogens – I	
<i>P. Mészáros</i> : Hochenergetische Neutrinos. Physik und Astrophysik der Kosmischen Strahlung	
<i>T. Papp</i> : Die Grundlagen der Lagrange-Mechanik	
<i>M. Kun</i> : Wechselwirkungen junger Sterne mit ihrer Umgebung	
<i>I. Héjjas</i> : Phasenkontrast-Mikroskopie	
<b>ZUR ERINNERUNG</b>	
<i>E. Klopfer</i> : K. Simonyis Schule und ihre Beschleuniger	
<b>PHYSIKUNTERRICHT</b>	
<i>L. Pálfalvi</i> : Der Planet Mars wieder in Erdnähe	
<b>WISSENSWERTES FÜR DIE SCHULE</b>	
Wie schirmt man ein Handy ab? ( <i>G. Tichy</i> )	
<b>EREIGNISSE DES WELTJAHRS DER PHYSIK 2005</b>	
<b>MEINUNGSÄUSSERUNGEN</b>	
Anmerkungen zu einer Deutung der Relativitätstheorie ( <i>F. András</i> )	
Der Lehrstuhl für Chemische Physik an der TU Budapest ( <i>Z. Noszticzius, H. Farkas</i> )	
<b>EREIGNISSE</b>	
<i>Й. Черти</i> : Оптика радуги I	
<i>И. Месарош</i> : Нейтрино высокой энергии – физика и астрофизика космического излучения	
<i>Т. Папп</i> : Основы Лагранжевой механики	
<i>М. Кун</i> : Юные звезды и их взаимодействия с окружающей средой	
<i>И. Хелли</i> : Фазово-контрастная микроскопия	
<b>НА ПАМЯТЬ</b>	
<i>Э. Клопфер</i> : Школа создателей ускорителей частиц профессора К. Шимони	
<b>ОБУЧЕНИЕ ФИЗИКЕ</b>	
<i>Л. Пальфалви</i> : Планета Марс опять в близости Земли	
<b>НАУЧНЫЕ ОБЗОРЫ ДЛЯ ШКОЛ</b>	
Как экранировать мобильный телефон ( <i>Г. Тихи</i> )	
<b>ИЗВЕСТИЯ ВСЕМИРНОГО ГОДА ФИЗИКИ 2005</b>	
<b>ЛУЧНЫЕ МНЕНИЯ</b>	
Замечание к одному истолкованию теории относительности ( <i>Ф. Андранд</i> )	
Кафедра Химической Физики Будапештского Технического Университета ( <i>З. Ностичиус, Г. Фаркас</i> )	
<b>ПРОИСХОДЯЩИЕ СОБЫТИЯ</b>	

# Fizikai Szemle

## MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A Fizikai Szemle az Akadémia által 1862-ben elindított Matematikai és Természettudományi Értesítő és az 1891-ben Eötvös Loránd által alapított Matematikai és Physikai Lapok utóda és folytatása

LV. évfolyam

9. szám

2005. szeptember

NEM ÉLHETÜNK



FIZIKA NÉLKÜL



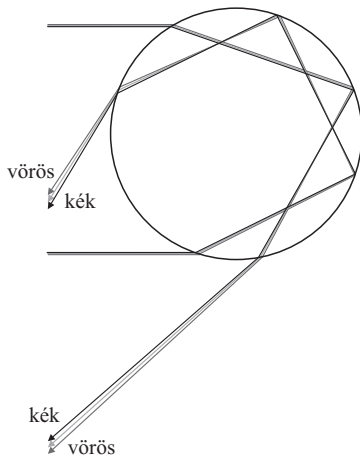
## A SZIVÁRVÁNY FIZIKÁJA – I. Az esőcseppek fényszórási jelenségei

Cserti József  
Eötvös Loránd Tudományegyetem,  
Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

A szivárvány a természet csodálatos tünete, amely számtalan festőt, költőt megihletett (például Arany János: *A gyermek és szivárvány*), valamint számos fizikus is tanulmányozta a jelenséget. Azt gondolhatnánk, hogy a szivárvány jelenségének értelmezése az egyszerű geometriai optika keretén belül régóta megoldott probléma, s csak történeti jelentősége van. Meglepő módon azonban, kielégítő elméleti magyarázatot csak a XX. század elején sikerült kidolgozni. Ráadásul ez az elmélet több, mint geometriai optika, magában foglalja mindazt, amit a fény természetéről tudunk. Így például a szivárvány leírásához figyelembe kell venni a fény hullámméretét is. Végül soron a szivárvány létrejöttének tulajdonítható, hogy az elektromágneses tér (fény) egy közel gömb alakú vízcseppben szóródik. Ezt a szórási jelenséget egyáltalán nem egyszerű leírni a Maxwell-egyenletek alapján. Az interferencia, a fényelhajlás és a fény polarizációja egyaránt lényeges a jelenség megértésében. A századok alatt több neves kutató tanulmányozta a szivárványt, és eredményeik alapvetően alakították a fizikának egy, napjainkban is izgalmas területét, az optikát. A szivárványt akkor láthatjuk, ha az előttünk hulló esőcseppekre a mögöttünk lévő Nap rásüt. Alakja körív. A természetben a szivárványnak két fő íve figyelhető meg: a főszivárvány és a halványabb mellékszivárvány. A főszivárványban a belső körív kék, míg a külső vörös színű. A mellékszivárványban a színek sorrendje fordított, a belső körív vörös, a külső kék. Alaposabb megfigyelésekből kiderül, hogy a két szivárvány íve közti tartomány jelentősen sötétebb,

mint az ég más része. Ezt a sötét sávot az ókori *Aprodisias Alexander* tiszteletére, aki i.e. 200-ban figyelte meg ezt a jelenséget, *Alexander-féle sötét sávnak* nevezik. Az interneten több helyen is található fényképeket a szivárványról, például [1] internetcímen látható képen jól megfigyelhető a szivárvány mindkét íve és a köztük levő sötét sáv is. Egy másik jelenség (sajnos csak ritkán figyelhető meg), hogy a főszivárvány alatt további *járulékos íveket* látunk (angolul *supernumerary arcs*), egy kitűnő felvétel található [2] internetcímen. Mint látni fogjuk, ezen járulékos ívek létrejöttének a megértése alapvető szerepet játszott a szivárvány elméletének kidolgozásában.

*Arisztotelész* még úgy vélte, hogy a szivárvány a napfény felhőkön történő visszaverődésének a következménye. Ez az állítás egyáltalán nem volt nyilvánvaló a kor akkori elképzelései alapján, ugyanis korábban úgy gondolták, hogy a szivárvány egy anyagi objektum az ég egy meghatározott helyén. A szivárvány ívének szögét elsőként *Roger Bacon* mérte meg 1266-ban, és eredményei szerint főszivárványra a szivárvány ívének egy pontjából a Nap felé és a megfigyelő felé mutató irány  $42^\circ$ -os szög zár be. Mellékszivárványra ez a szög  $50^\circ$ . Jelentősebb előrelépés a szivárvány megértésében *Arisztotelész* után csak 17 évszázad elteltével a német *Theodor Freiberg* szerzetesnek köszönhető. Elutasította *Arisztotelész* hipotézisét, miszerint a szivárvány a fénysugaraknak a felhőben lévő összes esőcseppben történő együttes visszaverődésének a következménye. Mérésekkel igazolta, hogy a szivárvány létrejöhet a fény egyetlen vízcseppről történő



1. ábra. A fénysugarak menete különböző színekre főszivárvány (egyszeres belső visszaverődés) és mellékszivárvány (kétszeres belső visszaverődés) esetén. A vízszintes vonalak mutatják a vízcseppbe lépő fénysugarakat. A zöld színű fénysugár a vörös és a kék színű sugarak között halad. A rajznál és a később bemutatandó numerikus eredményeknél a 15 °C-os hőmérsékletű vízre vonatkozó  $n = 1,330, 1,335$  és  $1,340$  törésmutatókat használtuk rendre a vörös, zöld és kék színekhez [4].

visszaverődésével is. Kísérleteihez gömb alakú, vízzel töltött üvegpalackot használt, és megfigyelte a szivárványt létrehozó fénysugarak menetét.

Freiberg eredményeit lényegében három évszázadon át elfelejtették. René Descartes 1637-ben mutatta meg újra – Freibergtől függetlenül –, hogy a főszivárvány keletkezésénél a fény először megtörik a vízcsepp felületén, majd a vízcsepp belső felületén egyszer visszaverődik, és aztán ismételt fénytöréssel kilép a vízcseppből [3]. A mellékszivárvány esetében a vízcseppben belül két visszaverődés történik. 1. ábrán látható a különböző színű fénysugarak törése a fő-, illetve mellékszivárvány kialakulásakor. Freiberg és Descartes megállapították, hogy a szemünkbe érkező különböző színű fénysugarak eltérő vízcseppekből jönnek. A szivárvány egységes geometriai optikai értelmezése Descartes nevéhez fűződik. Számítási során a ma már jól ismert töréstörvényt, mai nevén Snellius–Descartes-törvényt alkalmazta:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n, \quad (1)$$

ahol  $\alpha$  a beesési szög,  $\beta$  a törési szög, és  $n$  az anyag törésmutatója.<sup>1</sup>

A szivárvány jelenségének irodalma óriási. Bevezetesként, a téma egyik kiemelkedő szakértője, H. Moyses Nussenzveig népszerűsítő cikkét [6], Honyek Gyula Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokban megjelent írását [7] és Czelnai Rudolf meteorológusképzésben használt egyetemi jegyzetét [8] ajánlhatjuk az olvasónak. A matematikai részletek iránt érdeklődők számára a leideni professzor, Hendrik Christoffel van de Hulst [9] klasszi-

<sup>1</sup> Megjegyezzük, hogy az angol nyelvű irodalomban ezt a törvényt egyszerűen csak Snell-törvénynek nevezik. Nem lehet bizonyosan tudni, hogy Descartes ismerte-e a leideni egyetem professzora, Willebrord Snell eredményeit, melyet ő maga már 1620-ban tanított az egyetemen. Tény, hogy a töréstörvényt Descartes publikálta először, de nem említi Snell munkásságát. Descartes tudományos tevékenységéről bővebb betekintést például Simonyi Károly művéből kaphatunk [5].

kusnak számító könyvét, Milton Kerker [10] fényszórásról írt könyvét és John A. Adam [11] hosszú, összefoglaló cikkét javasoljuk. A szivárványnak a tudománnyal és a művészettel való kapcsolatáról Raymond L. Lee és Alistair B. Fraser közelmúltban megjelent és gazdagon illusztrált könyvét [12] ajánljuk.

A továbbiakban áttekintjük a szivárvány fizikájának legfontosabb elemeit, és igyekszünk nyomon követni a jelenség megértésében történeti szempontból is mérföldkönek számító elméleti eredményeket. Elsőként részletesen ismertetjük Descartes geometriai optikán alapuló elméletét. A következő, II. részben a polarizáció szerepét, Thomas Young interferenciaelméletét, majd George Biddell Airy elméletét taglaljuk. A dolgozat III. részében vázoljuk a múlt század elején Gustav Mie által kidolgozott legpontosabb elméletet, illetve a modern matematikai módszerekkel kapott közelítő eredményekről adunk rövid áttekintést, beleértve a témához szorosan kapcsolódó koszorú- és glóriajelenséget is. A következő fejezetben szólnunk a szivárvány és a kvantummechanika kapcsolatáról. Végül az összefoglalóban további, a témával kapcsolatos kérdéseket említünk meg.

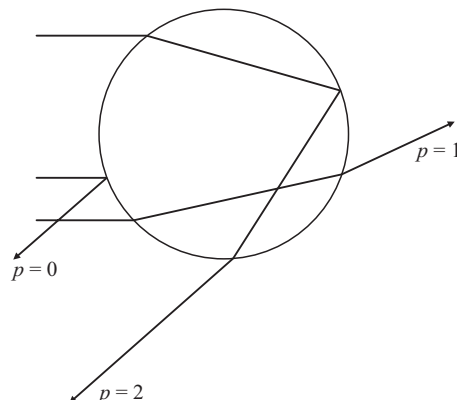
Megjegyezzük, hogy a cikk ábráinak egy része a Mathematica programmal készült, és eredetileg színesek. Az érdeklődők [13] internetcímen tekinthetik meg az eredeti ábrákat.

## Geometriai optikai leírás

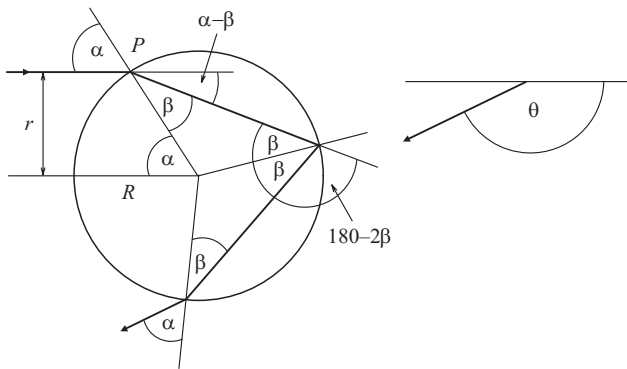
### Descartes-elmélet

A 2. ábrán látható, ahogy a vízcseppre érkező fénynyaláb egy része visszaverődik a csepp külső felületéről, egy bizonyos része megtörik, majd keresztülhaladva a vízcseppben, ismételt töréssel kilép abból, illetve más része a vízcsepp belső felületén egyszer (esetleg többször) visszaverődik. A vízcseppben belül haladó fénysugár a csepp belső felületén történő  $p-1$  számú visszaverődés során  $p$  darab húr mentén halad. Fő- és mellékszivárványra  $p = 2$ , illetve  $p = 3$ , és a továbbiakban  $p$ -ed rendű szivárványról akkor beszélünk, amikor a vízcseppben belül a hurok száma  $p$ . Később látni fogjuk, hogy szivárvány csak  $p > 1$  esetén lehetséges. Míg a termé-

2. ábra. A fénysugár vagy visszaverődik a vízcsepp felületén ( $p = 0$ ), vagy keresztülhalad a cseppben ( $p = 1$ ), vagy egyszeres (esetleg többszörös) belső visszaverődést szenved a cseppben belül ( $p = 2, 3, \dots$ ).







3. ábra. A vízszintes irányból belépő fénysugár menete a vízcseppben és a szögviszonyok a főszivárványban.

szetben  $p > 3$  rendű szivárványt nem figyeltek meg, Billet-nek már 1868-ban sikerült kimutatni a 20-ad rendű szivárványt is vékony vízsugarat megvilágítva (a hivatkozás megtalálható Walker [14] cikkében).

Tekintsük a 3. ábrának megfelelő  $R$  sugarú,  $n$  törésmutatójú vízcseppbe  $q$  ütközési paraméterrel vízszintes irányból érkező fénysugár menétét a főszivárványra ( $p = 2$ )! A beesés szögére igaz, hogy  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Az ábra alapján világos, hogy  $q = R \sin \alpha$ , másrészt a  $P$  pontban az (1) Snellius–Descartes-törvény szerint:  $\sin \alpha = n \sin \beta$ . A vízcseppbe bemenő és abból kilépő fénysugarak közti eltérülés szöge (továbbiakban szórási szögnek nevezzük):  $\theta = (\alpha - \beta) + (\pi - 2\beta) + (\alpha - \beta) = \pi + 2\alpha - 4\beta$ . A Napból jövő és a szemünkbe érkező fénysugarak közti szög:  $\pi - \theta = 4\beta - 2\alpha$  (Bacon kísérleteiben ezt a szöget mérte ki). Teljesen hasonló számítással kapható a szórási szög abban az általános esetben is, amikor a vízcsepp belső falán a fénysugár többször visszaverődik. Könnyen belátható, hogy a szórási szög  $p-1$  számú belső visszaverődés esetén:  $\theta = (\alpha - \beta) + (p-1)(\pi - 2\beta) + (\alpha - \beta) = (p-1)\pi + 2\alpha - 2p\beta$ . Az (1) egyenletet felhasználva a  $\theta$  szöget kifejezhetjük a

$$b = \frac{q}{R} = \sin \alpha \quad (2)$$

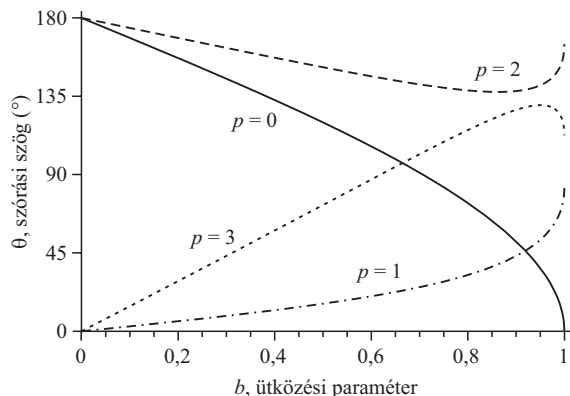
dimenziótlan ütközési paraméterrel:

$$\theta = (p-1)\pi + 2 \arcsin b - 2p \arcsin \frac{b}{n}. \quad (3)$$

A fenti képlet szerint  $\theta$  nagyobb lehet  $\pi$ -nél, ezért a gyakorlati számításoknál a  $\theta$  szöget a  $(0, \pi)$  intervallumba képezzük:

$$\theta \rightarrow \begin{cases} \theta - 2\pi j, & \text{ha } 2\pi j \leq \theta \leq 2\pi(j+1/2), \\ 2\pi(j+1) - \theta, & \text{ha } 2\pi(j+1/2) \leq \theta \leq 2\pi(j+1), \end{cases} \quad (4)$$

ahol  $j$  egész szám. (Hasznos tanács: numerikus számításoknál bármely  $x$  szöget az  $\arccos(\cos(x))$  függvénnyel könnyedén képezhetjük a  $(0, \pi)$  intervallumba.) A 4. ábra a  $\theta$  szórási szögeknek a  $b$  ütközési paramétertől való függését mutatja  $p = 0, 1, 2, 3$  értékekre. Két fontos megállapítás tehető az ábra alapján. Egyrészt látható, hogy  $p > 0$  esetén



4. ábra. A  $\theta$  szórási szög a  $b = q/R = \sin \alpha$  dimenziótlan ütközési paraméter függvényében  $p = 0, 1, 2, 3$  értékekre.

$\theta$  értéke  $b = 1$ -nél (azaz a vízcsepp felszínéhez érintőlegesen érkező fénysugár esetén) zérustól különböző érték:

$$\theta^* = \theta(b=1) = p(\pi - 2\alpha_n), \quad (5)$$

ahol  $\alpha_n$  a vízre vonatkozó teljes visszaverődés határszöge, azaz  $\sin \alpha_n = 1/n$ . Későbbiekben látni fogjuk, hogy a  $\theta^*$  szögnek fontos szerepe lesz a szórási hatáskeresztmetszet számításában és az interferenciajelenségek vizsgálatában is.

A másik fontos, a 4. ábrából világosan látható tény az, hogy a  $\theta$  szórási szögnek  $p > 1$  esetén szélsőértéke van  $b$  függvényében. A továbbiakban szükségünk van  $\theta$ -nak a  $b$  szerinti első deriváltjára, melyet könnyen megkaphatunk a (3) képletből:

$$\frac{d\theta}{db} = 2 \left( 1 - \frac{p \cos \alpha}{n \cos \beta} \right) \frac{1}{\cos \alpha}. \quad (6)$$

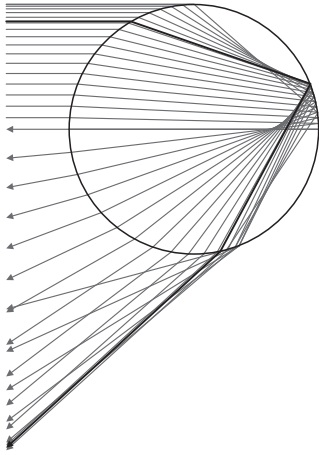
A szélsőérték helye a  $d\theta/db = 0$  feltételből adódik:

$$b_c \equiv \sin \alpha_c = \sqrt{\frac{p^2 - n^2}{p^2 - 1}}. \quad (7)$$

Később igazolni fogjuk azt a – már ezen szélsőérték-számítás során kialakuló – sejtést, hogy a szivárványból kilépő legintenzívebb fénysugár az  $\alpha_c$  beesési szögben érkezik a vízcsepphez. Ezt a speciális sugármenetet az irodalomban szokásos módon, és Descartes tiszteletére, nevének latin megfelelője szerint *Cartesius-sugárnak* nevezzük, és a  $c$  index is a Cartesius névre utal. Kiszámíthatjuk a  $\theta$  szórási szöget is ezen szélsőérték helyen:

$$\theta_c = \theta(b = b_c). \quad (8)$$

Az 5. ábrán különböző ütközési paraméterrel beérkező párhuzamos fénysugarak geometriai optika alapján számolt menete látható. A vastag vonal a Cartesius-sugármenetet jelöli. A Cartesius-sugármenet közelében beeső párhuzamos sugarak a vízcseppből kilépve közel párhuzamosak maradnak, ami egy erősen kollimált nyalábot eredményez. Más esetekben a nyaláb a vízcseppből kilépve szétszóródik. Így a Cartesius-sugármenetnek kitüntetett szerepe van. A szivárványt ebből az irányból látjuk legintenzíven.



5. *ábra.* Különböző beesési szöggel érkező párhuzamos fénysugaraknak a geometriai optika alapján számolt sugármenete. A vastag vonal a Cartesius-sugármenetet jelöli.

zívebbnek. Az 1. táblázatban összefoglaltuk a különböző színek esetére (az 1. *ábra* feliratában megadott törésmutatókkal) számolt  $\pi - \theta_c$  szögeket. Látható, hogy fő- és mellékszivárványban a színek sorrendje fordított. Csak érdekességképpen jegyezzük meg, hogy az 1. *ábrán* látható mellékszivárványnál a vízcseppben belül a Cartesius-sugár nagyon jó közelítéssel egy négyzet oldalélei mentén halad.

A továbbiakban a kvalitatív megállapításon túl, matematikailag is megmutatjuk, hogy a vízcseppekről szóródó különböző színű fény a fenti szögekben látható a legerősebb intenzitással. A kilépő fény intenzitását egyrészt a vízcseppben történő szóródási folyamat, másrészt a fény polarizációja határozza meg. Az előbbi jelenséget, a mai modern elméletek alapján, a szórócentrum differenciális hatáskeresztmetszetével szokás vizsgálni. Egy adott térszögbe szóródó fény intenzitása arányos a szórócentrum differenciális hatáskeresztmetszetével. Így a Descartes-elmélet keretein belül a klasszikus hatáskeresztmetszet szögfüggése ad választ arra a kérdésre, hogy milyen irányból látjuk a szivárványt.

A polarizáció szerepét csak a fény transzverzális hullámtermészetének felfedezése után ismerték fel. Egy törőfelületen a beeső fény egy része a polarizációtól függő mértékben visszaverődik, másik része megtörik. A visszavert és a megtört nyaláb intenzitása a beesés szögétől függ. A polarizációról a későbbiekben még részletesebben szólnunk. A fény polarizációjának figyelembevétele túlmutat a Descartes-féle elméleten. Amint azt látni fogjuk, a szivárvány szögének kiszámításához elegendő a klasszikus hatáskeresztmetszet ismerete, nincs szükség a polarizációra. Ezért lehetett a Descartes-elmélet olyan

sikeres már a polarizáció felfedezése előtt is. Azonban a kilépő fény intenzitásának pontos szögfüggését csak a fény hullámtermészetére jellemző interferenciaképesség és polarizáció figyelembevételével együtt határozhatjuk meg. A későbbiekben összehasonlítjuk a Descartes-elméletet azokkal az elméletekkel, melyekben a fény hullámtermészetét is számításba vették. Előtte azonban, ismeretjük a szórási szöget meghatározó klasszikus hatáske- resztmetszet kiszámításának alapjait.

### A klasszikus szórási hatáskeresztmetszet

A fény vízcseppben való szóródását a *differenciális hatáskeresztmetszettel* célszerű jellemezni. A klasszikus hatáskeresztmetszet definíciója megtalálható például a [15] könyvben. Idézzük fel röviden a klasszikus hatáskeresztmetszet definícióját a vízcseppeken való fényszóródás kapcsán! A vízcsepphez a Napról párhuzamos fénynyaláb érkezik, azaz nem egyedi fénysugarak eltérülését kell vizsgálni. Jelölje  $dI$  annak a fénynyalábnak az intenzitását (részecskék szórásánál a részecskék számát), amely a  $\theta$  és  $\theta + d\theta$  szög közé szóródik! (Az adott szögtartományba szóródó energiát a szórócentrum köré rajzolt egységnyi sugarú gömb felületén vett intenzitással mérik.) Ha a bejövő párhuzamos fénysugarakra merőleges keresztmetszeten, egységnyi felületen áthaladó nyaláb intenzitása  $S_0$ , akkor a  $\theta$  irányba szóródó sugarak differenciális hatáskeresztmetszete definíció szerint  $d\sigma(\theta) = dI/S_0$ . Ez területdimenziójú mennyiség. Először tegyük fel, hogy a  $\theta$  szórási szög és a  $q$  ütközési paraméter között kölcsönösen egyértelmű a kapcsolat, azaz  $\theta$  az ütközési paraméter monoton függvénye.<sup>2</sup> A  $q(\theta)$  és  $q(\theta) + dq(\theta)$  sugarak által határolt körgyűrűn áthaladó fénynyaláb intenzitása  $dI = 2\pi q dq S_0$ . Így a differenciális hatáskeresztmetszet  $d\sigma = 2\pi q dq$ , amely kifejezhető a szóródás  $\theta$  szögével, vagy a  $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$  térszöggel:

$$d\sigma = 2\pi q(\theta) \left| \frac{dq(\theta)}{d\theta} \right| d\theta = \frac{q(\theta)}{\sin\theta} \left| \frac{dq(\theta)}{d\theta} \right| d\Omega. \quad (9)$$

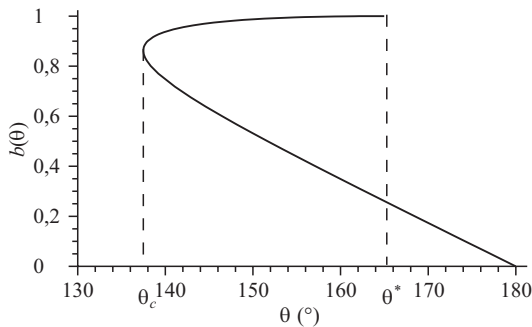
A képletben a  $dq/d\theta$  derivált abszolút értéke szerepel, figyelembe véve, hogy a derivált negatív is lehet. Ha a  $q(\theta)$  többértékű függvény (mint például a szivárványnál), akkor a függvény egyes ágainak megfelelően, külön-külön kell kiszámítani az egyes járulékokat a differenciális hatáskeresztmetszethez. Általában a  $\theta$  szórási szöget ismerjük a  $q$  ütközési paraméter függvényében. Ezért először a (9) képlet szerint meg kell határozni a  $\theta(q)$  függvény inverzét, azaz a  $q(\theta)$  függvényt, majd ennek deriváltját.

Vizsgáljuk a főszivárvány ( $p = 2$ ) esetét!<sup>3</sup> A (3) egyenletben megadott  $\theta(q)$  függvény inverzét algebrai átalakítások után a következő egyenletből kaphatjuk meg:

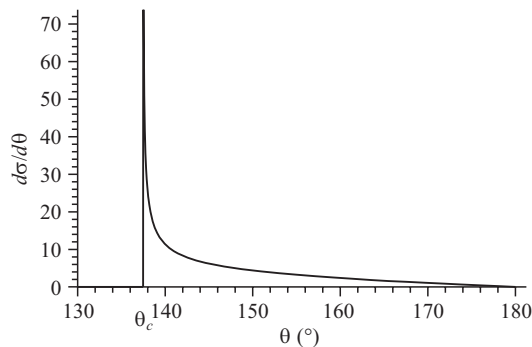
színek	$n$	$\pi - \theta_c$	
		$p = 2$	$p = 3$
vörös	1,330	42,5°	50,1°
zöld	1,335	41,8°	51,4°
kék	1,340	41,1°	52,7°

<sup>2</sup> Szórási jelenségeknél gyakran fordul elő, hogy ez a függvény nem monoton. Például szivárványnál ( $p > 1$ ) a 4. *ábra* alapján jól látható, hogy éppen ez a helyzet. Ilyenkor a függvényt felbontjuk monoton függvények ágaira.

<sup>3</sup> Itt jegyezzük meg, hogy  $p = 0$  és  $p = 1$  mellett a hatáskeresztmetszet analitikusan kiszámolható, a részletek megtalálhatók a [15] könyvben a 73. és a 80. oldalon.



6. ábra. A  $\theta(b)$  függvény inverze, azaz a  $b(\theta)$  dimenziótlan ütközési paraméter a  $\theta$  szórási szög (fokokban mérve) függvényében főszivárvány és vörös szín esetén. A függvény kétértékű, és értelmezési tartománya az alsó ágra a  $[\theta_c, \pi]$ , míg a felső ágra a  $[\theta_c, \theta^*]$  intervallum, ahol  $\theta^*$  értékét az (5) képlet adja.



7. ábra. A  $d\sigma/d\theta$  differenciális hatáskeresztmetszet ( $R^2$  egységekben) a  $\theta$  szórási szög (fokokban mérve) függvényében főszivárvány és vörös szín esetén. A függvénynek gyökös szingularitása van a  $\theta_c$  helyen, és értéke zérus az ennél kisebb  $\theta$  szögekre.

$$\left( \frac{b^2}{n^2} - \frac{1}{2} - \frac{b}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right)^2 = \frac{1 - b^2}{4} \cos^2 \frac{\theta}{2}. \quad (10)$$

Ez egy negyedfokú egyenlet  $b = \varrho/R$ -re, és két pozitív gyöke van (a másik kettő negatív gyök). Jelöljük az így kapott inverz függvényt  $b(\theta)$ -val! A függvény kétértékű, alakját a 6. ábra mutatja.<sup>4</sup> A  $b(\theta)$  függvény  $\theta$  szerinti deriváltja – az inverz függvény deriválásának megfelelő szabály szerint – a (6) egyenletben adott derivált reciproka. A  $db(\theta)/d\theta$  derivált értéke a  $b(\theta)$  függvény két ágán különböző, sőt ellentétes előjelűek (ezért kell venni az abszolút értéket a (9) képletben). Így a differenciális hatáskeresztmetszethez külön-külön adódnak járulékok az egyes ágakból.

Világos, hogy a  $db(\theta)/d\theta$  derivált a  $\theta = \theta_c$  helyen *szinguláris* (végtelen értéket vesz fel), és így a differenciális hatáskeresztmetszet ebben az irányban *végtelenné* válik. Ez az oka, hogy a szórt fényt ebben a  $\theta_c$  szögben látjuk a legerősebbnek. Vörös színre a differenciális hatáskeresztmetszet a 7. ábrán látható. Megjegyezzük, hogy a hatáskeresztmetszetben fellépő szingularitás *gyökös* jellegű, azaz

$$\frac{db(\theta)}{d\theta} \sim \frac{1}{\sqrt{\theta - \theta_c}}$$

<sup>4</sup> A  $b(\theta)$  függvényt geometriailag a 4. ábrán látható  $\theta(b)$  függvénynek a  $45^\circ$ -os egyenesre való tükrözésével kaphatjuk meg.

szerint közelíthető  $\theta_c$  közelében. Természetesen a teljes hatáskeresztmetszet, azaz az

$$\int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\theta} d\theta$$

mennyiség egyenlő a  $\pi R^2$  geometriai keresztmetszettel. Matematikailag az integrál a gyökös szingularitás miatt lesz véges. Teljesen hasonló gondolatmenet alapján belátható, hogy mellékszivárványra  $b(\theta)$  inverz függvény deriváltja a  $p = 3$ -nak megfelelő  $\theta_c$  értékénél válik végtelenné, és így a hatáskeresztmetszet is.

Összegezve, a szivárvány színeit azokban az irányokban látjuk legerősebbnek, amelyekben az egyes színekhez tartozó differenciális hatáskeresztmetszetek szingulárisak. Ezeket a szögeket a fő- és mellékszivárvány esetében a (8) képletből számolhatjuk ki, és numerikus értékei 1. táblázatban találhatóak. Mivel a (3) képletben adott  $\theta(b)$  függvénynek csak  $p > 1$  mellett van szélsőértéke, szivárványt csak ekkor figyelhetünk meg. A magasabb rendű szivárványokra ( $p > 3$ ) a differenciális hatáskeresztmetszetet az előbbiekhöz hasonlóan, általában csak numerikusan határozhatjuk meg.

Itt jegyezzük meg, hogy a 4. ábra alapján főszivárványra, adott színű fényre a  $\theta$  szórási szög nagyobb a  $p = 2$ -nek megfelelő  $\theta_c$ -nél, míg a mellékszivárvány esetén a szórási szög kisebb a  $p = 3$ -nak megfelelő  $\theta_c$ -nél. Mivel  $\theta_c(p=3) < \theta_c(p=2)$ , e két szög közti irányokból az adott színű fény sem a főszivárványból, sem a mellékszivárványból nem juthat a szemünkbe. A két szög közti irányban, a fő- és mellékszivárvány között egy sötét tartomány alakul ki, a bevezetőben említett *Alexander-féle sötét sáv*. Az 1. táblázatból látható, hogy  $\pi - \theta_c$  értéke főszivárvány esetén vörös színre a legnagyobb, mellékszivárványnál pedig vörös színre a legkisebb. Így az 1. táblázat numerikus adataival az Alexander-féle sötét sáv a  $42,5^\circ$  és az  $50,1^\circ$  szögek közti irányban látható.

Végül fontos hangsúlyozni, hogy a Descartes-féle elmélet szerint a szórt fény intenzitása sem a vízcsepp méretétől, sem a fény hullámhosszától nem függ. A szivárvány jelenségének megértésében továbblépés Descartes után közel kétszáz évvel következett be. Az új elméletekben a fénynek korábban ismeretlen tulajdonsága, a *hullámtermészete* kap alapvető szerepet. Ezek az elméletek, a szivárvány pontosabb leírásán túl, nagy hatással voltak az egész optika tudományára is. A következő fejezetekben a szivárványnak a fény hullámtermészetén alapuló elméleteit ismertetjük.

## Irodalom

1. <http://www.sundog.clara.co.uk/rainbows/bows.htm>
2. <http://www.sundog.clara.co.uk/rainbows/supers.htm>
3. RENÉ DESCARTES: *Discours de la Méthode* – 1637, további utalások találhatóak még [5]-ben
4. MÁTRAI TIBOR: *Gyakorlati spektroszkópia* – Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1963
5. SIMONYI KÁROLY: *A fizika kultúrtörténete* – Gondolat Kiadó, Budapest, 1986 (3. kiadás)
6. H.M. NUSSENZVEIG: *The theory of the rainbow* – Scientific American 236 (1977) 116–127
7. HONYEK GYULA: *A szivárvány* – Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok 1991/1 33–37

8. CZELNAI RUDOLF: *Bevezetés a meteorológiába I. Léggörtnai alapismeretek* – Egyetemi jegyzet, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979
9. H.C. VAN DE HULST: *Light scattering by small particles* – New York, John Wiley & Sons, Inc. 1957; New York, Dover 1981
10. M. KERKER: *The scattering of light* – Academic Press, New York and London, 1969
11. JOHN A. ADAM: *The mathematical physics of rainbows and glories* – Physics Reports 356 (2002) 229–365
12. R.L. LEE, JR., A.B. FRASER: *The rainbow bridge: rainbows in art, myth and science* – Pennsylvania State University, Philadelphia, USA, 2001
13. <http://www.kfki.hu/fszemle>  
<http://complex.elte.hu/cserti/Szivarvany.pdf>
14. J.D. WALKER: *Multiple rainbows from single drops of water and other liquids* – American Journal of Physics 44 (1976) 421–433
15. L.D. LANDAU, E.M. LIFSHIC: *Elméleti fizika I (Mechanika)* – Tankönyvkiadó, Budapest, 1974

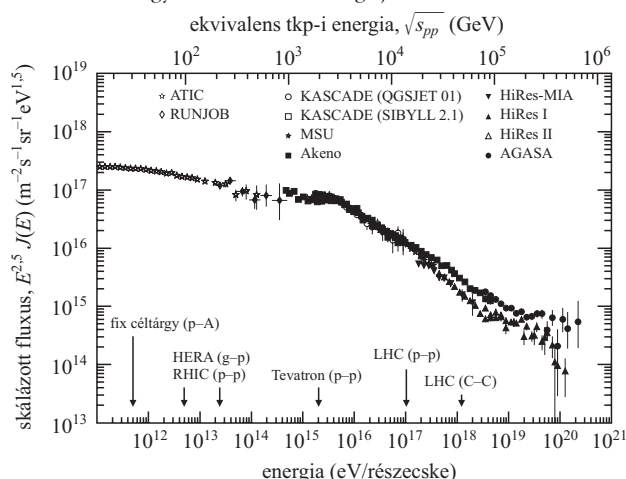
# A NAGYENERGIÁJÚ NEUTRÍNÓK ÉS A KOZMIKUS SUGÁRZÁS FIZIKÁJA ÉS ASZTROFIZIKÁJA

Mészáros Péter  
Pennsylvania State University

Világegyetemünk legtitokzatosabb hírvivői között vannak a neutrínók és a kozmikus sugárzás részecskéi, ezek között is pedig azok, amelyek nagy energiával érkeznek Földünkhöz, azaz TeV ( $10^{12}$  eV) energiák fölött. Ezt az energiaszintet csak nemrég közelítették meg a világ legnagyobb laboratóriumi gyorsítóiban, mint például az európai CERN-ben és az USA-beli Fermilab és RHIC gyorsítóknban. Ezzel szemben, a hozzánk érkező kozmikus részecskék egy kis hányada ezt az energiaszintet több nagyságrenddel meghaladja, és a kozmikus sugárzás okozta atmoszférikus neutrínók között is akad jóval nagyobb energiájú.

A kozmikus sugárzás megfigyelt energiaspektruma eléri a  $10^{20}$  eV-ot (1. ábra). Ezt a hatalmas, szinte makroszkopikus energiát (amely megfelel például egy gyorsan adogatott teniszlabda energiájának vagy egy 15 watos körtéből egy másodperc alatt kibocsátott energiának) egyetlen, földünkbe becsapódó atommag hozza magával. Ez a (Greisen, Zatsepin és Kuz'min kutatókról elnevezett) GZK-energiaszint, amely fölött várható, hogy a kozmikus részecskék száma drasztikusan megritkul a háromfokos kozmikus rádióhullám háttersugárzással való ( $p, \gamma \rightarrow n, \pi^+$ ) fotomezon kölcsönhatás miatt.

1. ábra. A kozmikus sugárzás spektruma, különböző kísérletek eredményeit használva és összehasonlítva különböző jelenleg működő és tervezett földi gyorsítók elérhető energiájával [15].



Az utolsó évtized legégetőbb kérdése ezzel kapcsolatban az volt, hogy egy ilyen „GZK-levágás” észlelhető-e a kozmikus sugarak becsapódási rátáján? Ez idáig a világ két legnagyobb kozmikus sugárzást mérő berendezése, a japán AGASA és az Amerikai HiRes kísérletek csak igen kisszámú (tucatnál kevesebb) kozmikus sugárzási eseményt mértek  $10^{20}$  eV energiák fölött, eltérő, de statisztikailag nem jelentősen különböző választ adva a GZK-levágás létezésére. Az egyértelmű választ nem könnyíti az a tény, hogy a két kísérlet más-más módszerrel és kalibrációval méri a kozmikus sugárzás részecskéinek energiáját. A földi atmoszféra felső rétegeibe érkezve a kozmikus sugárzás (akár proton, akár neutron, azaz közös nevükön nukleon,  $N$ ) az atmoszférikus nukleonokkal az erős kölcsönhatás révén egy hadronikus elektromágneses ( $N, p$  vagy  $N, n \rightarrow \text{pion, müon, elektron, pozitron}$ ) kaszkádszerű záport okoz, amely tehát főleg pionokból, müonokból és elektron-pozitron párokból áll.

A zápor energiáját és így az azt okozó kozmikus sugárzás nukleonjának energiáját az AGASA szcintillátorberendezésekkel a Föld szintjéhez érkező müonok révén méri. A HiRes (az előző úgynevezett „Légszem” kísérletük technikájával) a zápor által felgerjesztett atmoszférikus nitrogén fluoreszcenciáját méri optikai távcsövekkel. A legmagasabb energiájú kozmikus részecskék spektrumának és fizikai eredete kérdéseinek tisztázására már félig felépítették a Pierre Auger Kozmikus Sugárzás Observatóriumot [1], amelyet egy nemzetközi konzorcium működtet Argentínában (2. ábra). Ez a berendezés egyidejűleg kétféle módszerrel is méri a  $10^{18}$ – $10^{20}$  eV energiájú kozmikus részecskéket. Egyrészt, a HiReshez hasonlóan, a zápor töltött részecskéi által a felső légkörben felgerjesztett nitrogénmolekulák fluoreszcens fényét méri több irányban figyelő optikai távcsövekkel. Másrészt, a Föld felszínére érkező zápor keltette müonpárok víztartályokban okozott Cserenkov-sugárzását figyelni meg gyors időfelbontású fotoelektron-sokszorozókkal.

Ez idáig az Auger Observatórium teljes részecske-„befogadóképessége” (accumulated acceptance)  $1600 \text{ km}^2 \cdot \text{steradián} \cdot \text{év}$ , ami éppen meghaladja a már leál-



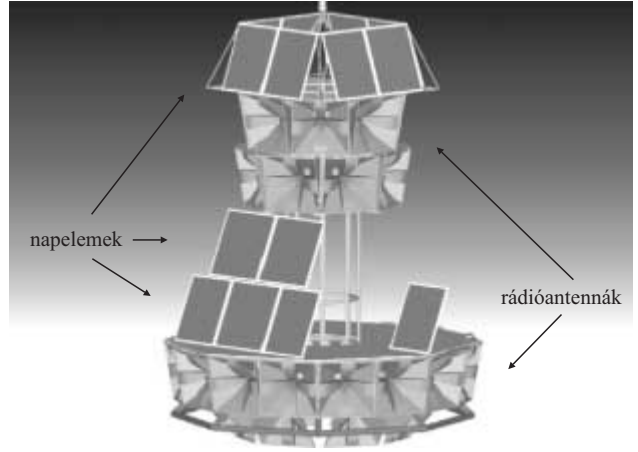


2. ábra. A Pierre Auger Koszmikus Sugárzási Observatórium egyik víz alapú Cserenkov-tankja, az argentinai Andok hegyvonulat lábánál. A 3000 km<sup>2</sup> műszerezett felületen elhelyezett 1600 tankból már 800, a 24 atmoszférikus fluoreszcens távcsőből már 12 működik.

lított AGASA tíz év alatt elért adatmennyiségét, és meghaladja a HiRes eddigi összbefogadását is. Az Auger-konzorcium most frissen megjelent jelentéseiből, amelyeket az Indiában tartott 29. Nemzetközi Koszmikus Sugárzási Konferenciára küldtek be, megerősítést nyer, hogy a 10<sup>20</sup> eV fölötti energiájú kozmikus részecskék kétségtelenül léteznek, de az egy éve működő, csak félig felépült obszervatóriumban észlelt becsapódások száma még nem elég ahhoz, hogy a GZK-levágásról véglegesen tudjon állítani [2]. A jövőre elkészülő teljes, 3000 km<sup>2</sup> területű mérőfelület viszont körülbelül tízszerese lesz az AGASA felületének, és a befogadása jövőre már kétszerese lesz az eddiginek. Így néhány éven belül komoly eséllyel rendelkezünk majd a GZK-vágás létezésének eldöntésére.

Várhatóan ezekből a 10<sup>20</sup> eV energiájú kozmikus eseményekből körülbelül EeV (azaz 10<sup>18</sup> eV) energiájú neutrínók is keletkeznek a fotomezon kölcsönhatás révén ( $p, \gamma \rightarrow \mu^+, \bar{\nu}_\mu \rightarrow e^+, \nu_e, \bar{\nu}_\mu$ ). A neutrínók megfigyelése körülmenyesebb, mivel ezek csak az általuk indukált másodlagos töltött müonok révén észlelhetők. A neutrínó ugyanis roppant kicsi kölcsönhatási keresztmetszettel rendelkezik, és a felülről érkező, neutrínóindukált müonok száma elenyészően kicsi a hadronikus elektromágneses zápor által indukált müonok számához képest. Viszont a láthatárnál pár fokkal alacsonyabb megfigyelési irányokból a földkéreg – éppen a gyenge kölcsönhatás okán – a neutrínókat átengedi, miközben az erősebben kölcsönható hadronkaszkádból eredő müonokat kiszűri. Az Antarktiszra telepített mérőberendezés láthatárán a jég felülete alól előbukkanó neutrínók által az utolsó több száz méteren előidézett ritka kölcsönhatások során keletkező relativisztikus müonok a Cserenkov-hatáshoz hasonló koherens rádiósugárzást okoznak (Aszkaryan-effektus), amelyet a 30–40 km magasságban a Déli Sark körül lebegő ANITA tudományos léggömb [3] lefelé irányított rádióantennáival lehet majd mérni (3. ábra). (Ennek a kísérletnek egy kisebb prototípusa már sikeresen bebizonyította a mérési elv gyakorlati kivitelezhetőségét).

A jóval alacsonyabb, de földi laboratóriumokban még nem elérhető, TeV-es energiájú extraterresztriális neutrínókról



3. ábra. Az ANITA együttműködés léggömbjének építés alatt álló, mintegy 7 m magas gondolája. Az antennák segítségével az Antarktisz fölött lebegő műszer körülbelül 680 km átmérőjű területről lesz képes az Aszkaryan-effektus rádiósugárzását mérni [3].

már egy ideje tudjuk, hogy sokkal nagyobb számban érkezik hozzánk, mint a feltételezett 10<sup>18</sup> eV-os neutrínók. Sőt, GeV energiákon felül már az atmoszférikus neutrínók oszcillációt is kimutatták, melynek során az elektron, a müon és a tau neutrínói nagy távolságot megtéve részben egymásba változnak át ([4], Nobel-díjjal honorált kísérleti eredmény). A TeV energiáknál észlelt nagyobb becsapódási ráta kiegyenlíti, sőt meghaladja az EeV-hez képest alacsonyabb kölcsönhatási keresztmetszetet, ami viszonylag megkönnyíti a megfigyelésüket. Az égbolt felsőbb tartományából érkező neutrínók az atmoszféra felső rétegeiben újfent, bár ritkán müonokat keltnek ( $\nu, N \rightarrow \text{pion} \rightarrow \text{müon}$ ) a gyenge kölcsönhatás révén. Ezek teljesen elvesznek a hadronikus záporok ( $p, N \rightarrow \text{pion} \rightarrow \text{müon}$ ) által keltett, sokkal nagyobb számú müon sokaságában. Viszont azok a neutrínók, amelyek a láthatárunk szintje alatt csapódnak a Föld atmoszférájába, túlnyomó részt átjutnak a földkérgen (és ritkán megfigyelhető müonokat is keltnek), miközben a hadronikus záporok müonjai elnyelődnek a földkéregben. Így a TeV-es energiáknál is kizárólag csak az alulról érkező neutrínók megfigyeléséről lehet szó. Fontos körülmény, hogy az EeV energiáknál a neutrínószám sokkal alacsonyabb, és ezek a nagyobb hatáskeresztmetszet miatt csak a láthatár alatti néhány fokos tartományban juthatnak át a detektorhoz. Ugyanakkor PeV energiák alatt akár a Föld teljes átmérőjén is szinte elnyelésmentesen jutnak át a neutrínók. Ilyen módon a láthatár alatti majdnem  $2\pi$  szteradiánból érkező TeV–PeV energiájú atmoszférikus neutrínókat már több éve méri a Déli Sarkon sikeresen működő Amanda kísérlet. Ennél is jóval érzékenyebben fogja ezt megtenni ennek a kísérletnek most épülő, IceCube nevű [5] hússzor nagyobb mérőtér fogatú utódja.

Honnét jönnek ezek a hatalmas energiájú kozmikus sugarak és a velük összekapcsolódó neutrínók, és milyen módon érik el ezeket az energiákat? Az izotrop érkezési irány azt bizonyítja, hogy a naprendszerünknel, sőt a Tejútjánál (galaxisunknál) is jóval távolabbi szülőhelyet kell feltételeznünk. Másrészt a GZK kozmikus sugárzás 95%-os bizonyossággal nem fotonokból áll [6], és részecskéi – mivel elektromágneses záporokat okoznak –

elektromos töltéssel is rendelkeznek. Nagy impulzusuk folytán pedig nukleonokra lehet következtetni. Ha protonokról van szó, felgyorsításuk  $10^{20}$  eV energiára, történjék ez akár elektromágneses terek révén (pl. [7]), akár lökéshullámokkal, azaz a Fermi-gyorsítás révén (pl. [8]), a következő feltételt adja a  $V$  potenciálra, amellyel  $E_p$  energiára gyorsítjuk fel a protonokat,

$$V = \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} \sim \frac{1}{c} \frac{BR^2 v}{R} \sim \beta BR > \frac{E_p}{e},$$

ahol  $\Phi$  a mágneses fluxus,  $t$  az idő,  $R$  a gyorsítási távolság,  $V$  a gyorsítási térerőssége,  $\beta = v/c$  és  $B$  a mágneses tér. Másrészt, a forrás luminozitására ( $L$ ), amelyből ezek a részecskék erednek, az

$$L > \frac{B^2}{8\pi} 4\pi R^2 v > \left(\frac{E_p}{\beta e}\right)^2 \beta c = \frac{c}{\beta} \left(\frac{E_p}{e}\right)^2 \\ \sim 10^{45.5} E_{p,20}^2 \text{ erg/s}$$

követelményt kell kielégítenie, ahol  $E_{p,20} = E_p/10^{20}$ . Ennek a követelménynek általában csak kétféle asztrofizikai objektum felel meg: a gamma-kitörések (GRB-k) és az aktív galaxismagok (AGN-ek). Ezekről viszont tudjuk, hogy a szóba jöhető  $v$  tömegsebességek erősen relativisztikusak: az AGN-eknél észlelt részecskecsóvák (*jets*) Lorentz-faktora,  $\gamma_p$ , a 10–30 értékig is felmegy, míg a GRB-knél észlelt csóvák átlagos  $\gamma_j$  értéke 300 körül van. Így tehát a gyorsításra fordítható  $t$  időből és az  $R$  távolságból egy-egy  $\gamma_j$  faktor jön be, amivel a luminozitási követelmény megnövekszik az

$$L > \frac{2\gamma_j^2}{\beta} E_{p,20}^2 10^{45.5} \text{ erg/s},$$

tehát legalább a  $10^{47}$ – $10^{48}$  erg/s értékre. Itt már csak a legerőteljesebb AGN-ekről lehet szó, vagy pedig a GRB-kről, amelyeknek az átlagos luminozitása is megfelel ennek a feltételnek.

Mind a GRB-kben, mind az AGN-ekben a részecskegyorsítás valószínűleg a Fermi-mechanizmus révén történik, amelyben a töltött részecskék a csóvákban megjelenő lökéshullámok diszkontinuitásán keresztül többszörösen oda-vissza szóródnak, minden egyes szórásnál a tömegsebesség különbségének megfelelő energiával gyarapodva. Ráadásul, mivel a csóvák maguk is relativisztikus tömegsebességgel ( $\gamma_j \gg 1$  Lorentz-faktorral) mozognak, a csóvában elért részecskeenergiák egy további  $\gamma_j$  együttáthattóval megszorozva figyelhetők meg.

A lökéshullámok általi Fermi-gyorsítás egyébként nagy valószínűséggel bebizonyított jelenség a szupernóva-maradványoknál, ahol a megfigyelt nem termikus gamma-, röntgen- és rádiósugárzás a felgyorsított elektronok szinkrotronsugárzásával magyarázható. Ilyen nem termikus fotonokat észleltek szupernóva-maradványokban, például a HESS Cserenkov-távcsővel, egészen 20 TeV energiáig [9]. Másrészt, a szupernóva-maradványokban tartalmazott protonok és ionok is szükségszerűen részt vesznek a gyorsítási folyamatban, és ezek is relativisztikus energiákat érhetnek el, legalább PeV-es

energiáig. A kozmikus sugárzásban PeV alatt észlelt protonok eredetének ez a legvalószínűbb magyarázata. Vitatott kérdés még az, hogy a szupernóva-maradványokban észlelt 20 TeV-es fotonok vajon teljes egészében az elektronok inverz Compton-szórásából erednek-e, vagy a proton–proton kölcsönhatásokban keletkező pionok bomlásának eredményei.

A GRB- és AGN-csóvákban is jól magyarázható a megfigyelt gamma-, röntgen- és optikai nem termikus foton-spektrum a lökéshullámok által gyorsított relativisztikus elektronok szinkrotron és inverz Compton-sugárzásával (pl. [10, 11]). Itt is várható a jelen levő ionok felgyorsítása, mégpedig ugyanazon fizikai körülmények között, amelyekkel a foton-spektrum is magyarázható, a protonok esetében egészen a megfigyelt rendszerében mért  $10^{20}$  eV energiáig [12]. Tehát lehetséges, hogy a GZK-energiás protonok forrásai a GRB-k, vagy esetleg az erősebb AGN-ek.

Másrészt, a GZK tartománybeli kozmikus sugárzás megfigyelt fluxusát is meg kell magyarázni, mely körülbelül egy részecske négyzetkilométerenként és száz évenként. Az  $E_p$  energiájú protonok pionkeltés miatt elnyelődnek, amikor

$$E_\gamma > \frac{m_\pi m_p}{E_p} \sim 10^{-3} E_{p,20}^{-1} \text{ eV}$$

energiájú fotonokkal kölcsönhatnak. Ilyen energiájúak a 3 K hőmérsékletű kozmikus háttérsugárzás fotonjai, amelyek sűrűsége

$$n_\gamma \sim (400/\text{cm}^3) \exp\left(1 - \frac{3}{E_{p,20}}\right).$$

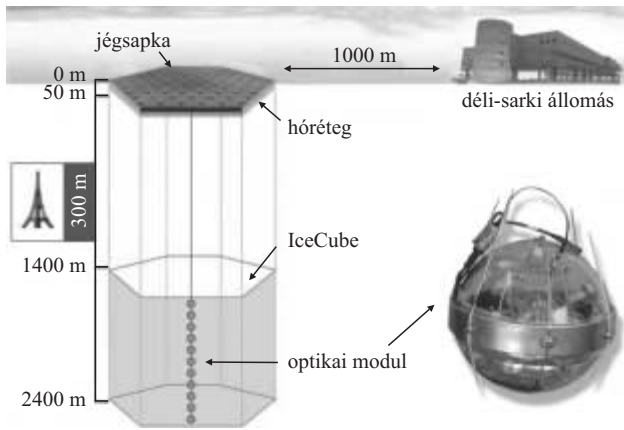
A protonok szabad úthossza tehát

$$\lambda_E \sim \frac{m_p}{m_\pi} \frac{1}{n_\gamma \sigma_\pi} \sim 11 \exp\left(\frac{3}{E_{p,20}} - 1\right) \text{ Mpc},$$

az úgynevezett „GZK-távolság”, ahol egy megaparsec = 1 Mpc  $\sim$  3 millió fényév,  $m_p$  és  $m_\pi$  a proton és a pion tömege,  $\sigma_\pi$  a (p, $\gamma$ ) fotomezon reakció hatáskeresztmetszete  $\sim 5 \cdot 10^{-26}$  cm<sup>2</sup>. Tehát legfeljebb 50 Mpc-en belül kereshetők a GZK-protonok forrásai.

Itt ötlük fel az AGN-eredettel kapcsolatos egyik legnehezebb probléma: 50 Mpc-en belül csak néhány (gyengébb) AGN található. Ráadásul, ennél az energiánál a protonoknak az intergalaktikus és galaktikus mágneses térben történő elhajlása legfeljebb 1 fokos. Amíg az alacsonyabb energiájú kozmikus sugárzás érkezési irányát a mágneses elhajlás izotropizálja, addig a GZK-protonok szinte egyenes vonalban érkeznek hozzánk. Márpedig, az eddig megfigyelt GZK-protonok nem mutatnak semmilyen kitüntetett érkezési irányt. Tehát jóval nagyobb számú forrást kell feltételeznünk, mint amennyi erős AGN van ezen a GZK-távolságon belül.

A GRB-k esetében is látszólag probléma lép fel, mivel a (felénk irányított csóvájú, tehát megfigyelhető) kitörési ráta körülbelül  $R_{\text{GRB}} \sim 0,5 \cdot 10^{-3} (D/100 \text{ Mpc})^{-3}$  évente. Viszont az intergalaktikus mágneses térben fellépő időbeli diszperzió



4. ábra. A Déli Sarkon építés alatt álló IceCube jég alapú Cserenkov-neutrínódetektor sematikus ábrája. Egy köbkilométeres térfogatot nanomásodperces felbontású fotocsövekkel műszereznek fel, amelyeket szálakon eresztnek le 1,5 és 2,5 kilométer közötti mélységbe, és a neutrínóütkezésekből eredő, felfelé törő müonok Cserenkov-fényét mérik. Az Amanda-II prototípus 12 szállal és 677 fotocsövel már sikeresen működik, az IceCube majd 80 szálon 4800 fotocsövel fog működni. A prototípusvizsgálat céljára ezekből egy szállal már bővítették a létező Amanda berendezést.

$$t_{disp} \sim 3 \cdot 10^7 \text{ év} \left( \frac{B}{10^9 G} \right)^2 \left( \frac{\lambda_B}{10 \text{ Mpc}} \right) \left( \frac{D}{100 \text{ Mpc}} \right) E_{p,20}^{-2},$$

ahol a  $B \sim 10^{-9} G$  és a  $\lambda_B \sim 10 \text{ Mpc}$  értékek parametrizálják az intergalaktikus mágneses tér átlagerősségét és a koherenciahosszát. Ezzel a GZK-távolságon belül

$$N_{GRB} \sim R_{GRB} t_{GRB} \sim 5 \cdot 10^3 B_{-9}^2 \lambda_{B,10} D_{10}^2 E_{p,20}^2$$

adja meg a GZK-fluxushoz járulékot adó GRB-k számát, ami megfelel a követelményeknek.

A GRB-knél csakúgy, mint az AGN-eknél, a protonok a GZK-energia alatt egy  $N(E_p) \sim E^{-2}$  körüli energiaeloszlást alakítanak ki a Fermi-féle gyorsítási mechanizmussal. Különböző kölcsönhatások változtatják az eloszlást a protonok intergalaktikus útja során. A forrásokban magukban egy másik kölcsönhatás vezet igen érdekes következményekre. Ez a reakció újfent a

$$p, \gamma \rightarrow \Delta^- \rightarrow n, \pi^+ \rightarrow \pi^+, \bar{\nu}_\mu, e^+, \nu_\mu$$

fotomezon kölcsönhatás a felgyorsított relativisztikus protonok és, ez esetben, a forrásban keletkezett fotonok között. A GRB-k esetében a fotonluminozitás az eredeti kitörés ideje alatt alapvetően egy hatványfüggvényyszerű eloszlás, amelyre átlagosan fennáll (pl. [10]), hogy  $N(E_p) \sim E^{-1}$ , illetve  $N(E_p) \sim E^{-2}$ , az úgynevezett  $E_{br} \sim 1 \text{ MeV}$  törési energia alatt, illetve felette. A fotonok sűrűsége a lökeshullám térfogatában a gamma-kitörés ideje alatt elég nagy ahhoz, hogy a gyorsított protonok ( $p, \gamma$ ) kölcsönhatási átlagideje ugyanolyan nagyságrendű legyen, mint a dinamikai vagy a gyorsítási időskála, így a protonok energiájának jelentős része, amennyiben az meghaladja a  $\Delta$  rezonancia küszöbét, müon és  $\nu$  formájában jelenhet meg. A gamma-kitöréssel egy időben tehát, a GRB luminozitásának egy jelentős része  $\nu_\mu$ -ként és  $\bar{\nu}_\mu$ -ként várható [13]. A neutrínóspektrum a fotonospektrumot tükrözi, a neutrínókitörési energia körülbelül 100 TeV (ahol a fo-

tonkitörési energia a proton nyugalmi rendszerében megfelel a  $\Delta$  rezonancia energiájának).

A neutrínók szinte elnyelés nélkül, egyenes vonalban jutnak el hozzánk az Univerzum legtávolabbi részeiből, ahol a GRB-kitörések történnek. Az egész Univerzumban évenként kitörő GRB-k (kb. egy GRB naponta) egy „diffúz neutrínó-háttérsugárzást” adnak. Az Antarktisz jegében elhelyezkedő köbkilométeres IceCube [5] Cserenkov-detektor (4. ábra), vagy a köbkilométeres KM3NeT vizes Cserenkov-detektor (az Európai Unió indítványára az Antares prototípusra alapozva, pl. [14] a Földközi-tenger alatt épül) ezt a diffúz neutrínóháttérrel észlelni tudja majd a neutrínók által keltett, a Föld belsejéből felfelé haladó müonok Cserenkov-fénye révén. Ezek megjelenési ideje egybeesik az egyes gamma-sugarak által jelzett GRB-k kitörési időpontjával. Különösen közeli GRB-k esetében pontszerű neutrínóforrásként is észlelni lehet a kitöréseket. Az atmoszférikus neutrínók háttérzaja kiküszöbölhető a kitörés rövid időtartama és jól meghatározott iránya segítségével. (Mind a jégbe, mind a vízbe telepített köbkilométeres Cserenkov-detektorok körülbelül 0,5–0,7 fokos irányfelbontásra képesek 1–100 TeV között, pl. [5, 14]).

A nagyenergiájú kozmikus sugárzás és a neutrínók rejtélye sokkal behatóbb vizsgálódás tárgya lesz a következő öt évben az Auger, az IceCube és más nagyszabású kísérletek révén. Az itt felvázolt kérdések a nagyenergiájú részecskék fizikájának és asztrofizikájának csak egy részét jelentik. A múlt tapasztalataira alapozva, nagy valószínűséggel feltételezhető, hogy a jelenlegi kérdések tisztázásával egy időben egy egész sor új kérdéskör tárul majd fel, amint a ma elérhető legnagyobb energiákon és távolságokon túlhatolunk.

## Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom Patkós András és Balázs Lajos kollégáimnak, valamint az ELTE Atomfizikai Tanszékének a szíves vendéglátásért és közreműködésért, amely a Magyar Tudományos Akadémiának egy Domus-ösztöndíja és az OTKA (T034549), NASA NAG5-13286 és NSF AST0307376 programok támogatásával történt.

## Irodalom

1. J.W. CRONIN – Nucl. Phys. B138 (2005) 465, további részletek: <http://www.auger.org/>
2. P. SOMMERS és az AUGER COLLABORATION – 29th ICRC Procs., Pune, India, 2005, <http://www.arxiv.org/pdf/astro-ph/0507150>
3. ANITA COLLABORATION – Nucl. Phys. B Supp. 143 (2005) 554, további részletek: <http://www.phys.hawaii.edu/~anita/>
4. M. KOSHIBA – (2002) [http://www.icepp.s.u-tokyo.ac.jp/news/Nobel\\_prize\\_en.html](http://www.icepp.s.u-tokyo.ac.jp/news/Nobel_prize_en.html)
5. J. AHRENS és az ICECUBE COLLABORATION – New Astronomy Reviews 48 (2004) 519, további részletek: <http://icecube.wisc.edu/>
6. M. RISSE és az AUGER COLLABORATION – 29th ICRC Procs., Pune, India, 2005, <http://www.arxiv.org/pdf/astro-ph/0507402>
7. A.M. HILLAS – Annual Reviews Astronomy and Astrophysics 22 (1984) 425
8. R. BLANDFORD, D. EICHLER – Phys. Rep. 154 (1987) 1
9. F. AHARONIAN, és mtársai – Astronomy and Astrophysics 437 (2005) L7, további részletek: <http://www.mpi-hd.mpg.de/hfm/HESS/HESS.html>
10. P. MÉSZÁROS – Annual Reviews Astronomy and Astrophysics 40 (2002) 137
11. L. MARASCHI, F. TAVECCHIO AIPC 745 (2005) 129
12. E. WAXMAN – Phys. Rev. Lett. 75 (1995) 386
13. E. WAXMAN, J.N. BAHCALL – Phys. Rev. Lett. 78 (1997) 2292
14. J. AGUILAR és az ANTARES COLLABORATION – Astroparticle Phys. 23 (2005) 131, további részletek: <http://km3net.org/>
15. R. ENGEL – Nucl. Phys. B Supp (2005) in press (astro-ph/0504358)

Azzal a célkitűzéssel, hogy a manapság tanított analízis és lineáris algebra nyelvezetét összhangba hozzuk a mechanikában még ma is használatos fogalmakkal és jelölésekkel, jelen tanulmány keretében a Lagrange-mechanika newtoni megalapozását vesszük nagyító alá. Ehhez elsőként a régi és a jelenlegi matematika néhány fogalmát kell tisztáznunk.

## Matematikai fogalmak

### Halmazok és függvények

A modern matematika alapját a logika és a halmazelmélet adja. A halmazelmélet szerepe kettős. Egyrészt axiómái biztosítják a legfontosabb objektumoknak, azaz a természetes ( $\mathbb{N}$ ) és valós ( $\mathbb{R}$ ) számok halmazának létezését, másrészt eszközeivel lehetővé teszi a matematika szinte minden ágának a halmazelméleten belüli megfogalmazását. Az egzaktág érdekében ezen eszközöknek egy igen szűk részét mi is használni fogjuk. A logikai eszközök közül a kvantorokat:  $\forall$  „bármely” és  $\exists$  „létezik olyan”, továbbá a  $:=$  „legyen egyenlő” definiáló egyenlőséget. A halmazokat megadhatjuk az elemeinek felsorolásával ( $A := \{1, 2, \dots, n\}$ ), vagy egy adott  $A$  halmaz egy részhalmazát ( $\subseteq$ ) képezhetjük valamilyen  $T$  tulajdonsággal:  $B := \{x \in A \mid T(x)\}$ . Itt  $B$  azokat az  $A$ -beli elemeket tartalmazza, amelyekre  $T$  teljesül. Ha  $A$  és  $B$  halmazok, akkor  $A \times B$ -vel jelöljük a direktorzatukat, vagyis az  $(a, b)$  párok összességét (itt  $a \in A$  és  $b \in B$  értelemszerűen). Továbbá  $A^n$  jelölje az  $A \times A \times \dots \times A$  ( $n$ -szer) halmazt, vagyis az  $A$  elemeiből képzett rendezett  $n$ -esek összességét. Ha  $A$  és  $B$  halmazok, akkor egy olyan  $f$  függvényt, amely  $A$ -ból  $B$ -be képez  $f: A \rightarrow B$ -vel jelöljük. Ekkor  $f$  értelmezési tartománya ( $\text{Dom} f$ ) része  $A$ -nak, és értékkészlete ( $\text{Ran} f$ ) része  $B$ -nek. Ha  $\text{Dom} f = A$ , akkor  $f$  megadásakor az  $f: A \rightarrow B$  jelölést használjuk. Ezekkel a jelölésekkel a szokásos értelemben bevezethető az egyváltozós ( $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ) és a többváltozós ( $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ) függvények folytonossága, differenciálhatósága és folytonosan differenciálhatósága (ez utóbbi azt jelenti, hogy a derivált függvény is folytonos, és ha van perem, akkor arra folytonosan kiterjeszthető).

### A lineáris algebra alapfogalmai

Az  $\mathbb{R}^n$  tér elemei vektorok, melyeket össze tudunk adni, valós számmal meg tudunk szorozni, továbbá két vektort egymással skalárisan össze tudunk szorozni. Általában egy olyan halmazt, amelyben értelmes ez a három művelet, és ugyanazok a műveleti tulajdonságai, mint  $\mathbb{R}^n$ -ben, valós euklideszi vektortérnek nevezünk. Az  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  vektorok lineáris kombinációján a  $\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k$  vektort értjük, ahol  $\alpha_j$ -k valós számok. Az  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  vektorokat lineárisan függetlennek nevezük, ha egyik sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként.  $\mathbb{R}^n$ -ben legfeljebb  $n$  darab lineárisan független vektor adható meg, és ekkor ezek már lineáris kombinációkkal

előállítják a tér összes vektorát. Ilyenkor nevezük az  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  vektorokat bázisnak. Egy bázis elemeinek a száma – akárhogyan választjuk is meg azokat – mindig ugyanaz. Ezt a számot nevezük a tér dimenziójának (azaz  $\dim \mathbb{R}^n = n$ ). Egy adott  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  bázisban tehát elő lehet állítani a tér összes  $\mathbf{v}$  vektorát, azaz a tér minden vektorához hozzárendelhető egy  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  szám  $n$ -es, melyre

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{a}_j.$$

Ezt a hozzárendelést nevezük az adott bázisbeli reprezentációnak. Egy  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  halmazt altérnek nevezünk, ha  $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$  és  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  esetén  $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} \in A$ . Például  $\mathbb{R}^3$ -ben altereket képeznek az origót tartalmazó síkok és egyenesek. Nyilván  $\mathbb{R}^n$  minden altére maga is valós euklideszi tér, és két altér metszete szintén altér lesz. Egy  $A$  altér ortogonális kiegészítőjének az  $A$  altér összes vektorára merőleges vektorok halmazát nevezük, és  $A^\perp$ -sel jelöljük, azaz  $A^\perp := \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \mathbf{b} \in A \text{ esetén } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0\}$ . Például egy origót tartalmazó sík ortogonális kiegészítője az origót tartalmazó a síkra merőleges egyenes. Könnyen belátható, hogy  $A^\perp$  is altér, és hogy  $A$ -nak egy bázisa és  $A^\perp$ -nek egy bázisa együttesen az  $\mathbb{R}^n$  tér egy bázisát adja, azaz  $\dim A + \dim A^\perp = n$ . Ha  $A$  altér, akkor minden vektor egyértelműen előáll egy  $A$ -beli és egy  $A^\perp$ -beli vektor összegeként. Az előbbit nevezük az adott vektor  $A$ -ra vett merőleges vetületének, az utóbbit az  $A^\perp$ -re vett merőleges vetületének.

### A differenciál értelmezése

A manapság tanított standard analízisben már nem tananyag a differenciálok azon klasszikus értelmezése, amelyekre a klasszikus fizika és elsősorban a mechanika sok fejezete épül. Ezért itt azok jelentését röviden tárgyaljuk. Először is tekintsünk egy  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $a \in \mathbb{R}$ -ben differenciálható függvényt. Az  $f$  grájfához az  $(a, f(a))$  pontban megrajzolhatjuk az érintőt. Ezt az egyenest az origóba tolva kapjuk azt az egyenest, amelyet az  $f$  függvény  $a$  pontbeli differenciáljának nevezük, azaz az  $y = f'(a)x$  egyenletű egyenest. Ezt az egyenest egy függvénnyel is leírhatjuk. Jelölje ezt a függvényt  $df(a)$ , és a változója legyen  $h$ , vagyis  $df(a)(h) = f'(a)h$ . A  $g(x) = x$  identitásfüggvény deriváltja 1. Így ha ezt a függvényt  $g$  helyett  $x$ -szel jelöljük, akkor a differenciál előbbi értelmében  $dx(h) = h$ . Ezzel viszont az  $f$  függvény  $a$ -beli differenciálja átírható:  $df(a)(h) = f'(a)dx(h)$ , vagy elhagyva a változókat  $df(a) = f'(a)dx$ , még klasszikusabban  $df(x) = f'(x)dx$ . Az utóbbi jelölésnél viszont észben kell tartanunk, hogy  $x$  egyrészt jelöl egy olyan pontot, ahol  $f$  deriválható, és jelöli az identitásfüggvényt is. Könnyen meggondolható, hogy a deriváláson keresztül a differenciál megőröklí a műveleti tulajdonságokat, sőt értelmet kap az  $f'(x) = df(x)/dx$  jelölés, és ezáltal pedig a Leibniz-szabály és a



láncszabály klasszikusan felírt formulája is. Többváltozós függvény esetén a differenciált érintő terekkel (a gráfot érintő alterekkel) értelmezzük. Legyen  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható valamilyen  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  pontban. Ekkor az  $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$  ponthoz tartozó érintő alteret ( $n = 2$  esetén érintő síkot) eltolva az origóba kapjuk azt az alteret, amelyet most differenciálnak nevezünk. Ennek az alternek az egyenletét a  $df(\mathbf{x})$  függvénnyel írjuk le, ahol

$$df(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} b_1 + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} b_2 + \dots + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} b_n.$$

Annak igazolását, hogy a  $df(\mathbf{x})$  függvénynek a gráfja valóban a keresett alter, az olvasóra bízunk. Ha  $x_i$ -vel jelöljük az  $i$ -edik változó identitásfüggvényét (azaz  $x_i(\mathbf{a}) = a_i$ ), akkor a fenti értelemben – mivel az  $x_i$  függvény deriváltja az  $i$ -edik koordinátában 1, a többiben 0 – egyszerűen képezhetjük az  $x_i$  függvény differenciálját:  $dx_i(\mathbf{h}) = b_i$ . Mindezek értelmében a fenti függvényt változók nélkül felírhatjuk

$$df(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} dx_n.$$

A megfelelő megfontolásokkal a differenciál most is megőröklí a deriválás műveleti tulajdonságait.

## A Lagrange-mechanika axiómái

Vizsgáljunk inerciarendszerből egy  $N$  anyagi pontból álló mechanikai rendszert. Legyenek a koordináták  $\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}, \dots, \mathbf{r}^{(N)}$  és a tömegek  $m^{(1)}, m^{(2)}, \dots, m^{(N)}$ . Vezessük be a szokásos átkoordinátázást

$$\mathbf{x} := \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{\mathbf{r}^{(1)}} \underbrace{(x_4, x_5, x_6)}_{\mathbf{r}^{(2)}} \dots \underbrace{(x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N})}_{\mathbf{r}^{(N)}}$$

és

$$\underline{m\mathbf{x}} := (m_1 x_1, m_2 x_2, \dots, m_{3N} x_{3N}),$$

ahol  $m_1 = m_2 = m_3 = m^{(1)}$ ,  $m_4 = m_5 = m_6 = m^{(2)}$  stb. Keresjük a mozgás idejének  $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}$  intervallumát és a mozgás pályáját leíró  $\mathbf{x}: \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$  kétszer folytonosan differenciálható függvényt. Ezt a függvényt a továbbiakban a változójával együtt  $\mathbf{x}(t)$ -vel jelöljük.

### Fizikai ismereteink

Először is ismertnek tekintjük a kezdeti feltételeket, azaz a  $t = 0$  időpillanathoz tartozó helyeket és sebességeket. Adottnak tekintjük a szabaderőket, azaz egy  $\mathbf{F}: \mathbb{R}^{6N+1} \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$  függvényt, amelyről feltesszük, hogy folytonos, és  $\text{Dom}\mathbf{F}$  nyílt halmaz. Továbbá ismertnek tételezzük fel a kényszerfeltételeket leíró egyenleteket, azaz egy  $0 < k < 3N$  egész számot, és  $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$  esetén a

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij}(\mathbf{x}, t) dx_j + b_i(\mathbf{x}, t) dt = 0 \quad (1)$$

egyenleteket, ahol  $a_{ij}: \mathbb{R}^{3N+1} \rightarrow \mathbb{R}$  és  $b_i: \mathbb{R}^{3N+1} \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények. Normális (holonóm) esetben a fenti egyenletek helyett az  $f_i(\mathbf{x}, t) = 0$  egyenletekkel írjuk le a kényszerfeltételeket, ahol  $f_i: \mathbb{R}^{3N+1} \rightarrow \mathbb{R}$  folytonosan differenciálható függvény. Közvetlen geometriai jelentése csak ezeknek van. A fent megadott egyenletekre úgy kell gondolni, mint a geometriai jelentést hordozó kényszerfeltételek differenciáljaira.

### A konfigurációs tér

Az általános eset tárgyalása előtt tekintsük a legegyszerűbb esetet. Legyen  $N = 1$ , és legyen egyetlen holonóm kényszer, azaz adott az  $f(\mathbf{x}, t) = 0$  egyenlet. Ez az egyenlet minden  $t$  időpillanatban egy felületet ír le a 3-dimenziós térben, amelyet kényszerfelületnek nevezünk. Rögzítsünk most egy  $t$  időpillanatot! A kényszerfelület ehhez a rögzített időpillanathoz tartozó alakjának adott  $\mathbf{x}$  ponthoz tartozó érintő síkját toljuk el az origóba! A kapott síkot (pontosabban alteret) az adott  $\mathbf{x}$  helyhez és  $t$  időpillanathoz tartozó konfigurációs térnek nevezzük. Ennek jele  $\text{Konf}(\mathbf{x}, t)$ . Könnyű belátni, hogy a  $\text{Konf}(\mathbf{x}, t)$  síknak (alternek) az egyenlete differenciálisan

$$\underbrace{\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1}}_{a_1(\mathbf{x}, t)} dx_1 + \underbrace{\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial x_2}}_{a_2(\mathbf{x}, t)} dx_2 + \underbrace{\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial x_3}}_{a_3(\mathbf{x}, t)} dx_3 = 0.$$

Hagyomány szerint a  $\text{Konf}(\mathbf{x}, t)$  sík elemeit *virtuális elmozdulásoknak* nevezzük, és  $\delta\mathbf{x}$ -szel jelöljük. Vagyis  $\delta\mathbf{x}$ -ek azok a vektorok, amelyeknek a komponenseit ha beírjuk a  $dx_1, dx_2, dx_3$  differenciálok helyére, akkor a  $0 = 0$  azonosságot kapjuk. Ezek alapján már felírhatjuk  $\text{Konf}(\mathbf{x}, t)$  egzakt definícióját is. Ehhez vezessük be az  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) := (a_1(\mathbf{x}, t), a_2(\mathbf{x}, t), a_3(\mathbf{x}, t))$  jelölést:

$$\text{Konf}(\mathbf{x}, t) := \{ \delta\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \cdot \delta\mathbf{x} = 0 \}.$$

Ebből viszont látható, hogy az  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$  vektor merőleges a  $\text{Konf}(\mathbf{x}, t)$  síkra, azaz  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \in \text{Konf}(\mathbf{x}, t)^\perp$ . Még egy dolgot hangsúlyoznunk kell. Azzal a feltevessel éltünk, hogy az adott időben és helyen létezik az  $f$  térbeli alakjának érintő síkja, vagyis azt tettük fel, hogy  $\dim \text{Konf}(\mathbf{x}, t) = 2$ , és jogos az a követelmény is, hogy ez minden helyen és időben igaz legyen. Vagyis itt egy – a kényszerfeltételeket megszorító – feltevésről van szó, amelynek a teljesülését a fizikai valóság követeli meg. Ezek alapján már könnyen megfogalmazhatjuk a megfelelő fogalmakat és feltevéseket az általános esetben is. Ehhez már csak azt kell végiggondolni, hogy több kényszerfeltétel esetén adott helyen és időben mindegyiknek külön-külön vehetjük az érintő terét, ezeket eltolhatjuk az origóba, így annyi alteret kapunk, ahány kényszerfeltétel van, a konfigurációs tér pedig ezeknek az altereknek a metszete lesz (azaz csak olyan virtuális elmozdulásokat engedünk meg, amelyek mindegyik kényszerfeltételnek eleget tesznek). Így most már egzaktul definiálhatjuk az (1) egyenletek által meghatározott konfigurációs teret. Ehhez vezessük be az  $\mathcal{N}_k := \{1, 2, \dots, k\}$

halmazt, és  $\forall i \in \mathcal{N}_k$  esetén az  $\mathbf{a}_i := (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{i3N})$  vektort, ahol az (1)-ben meghatározottak szerint  $\mathbf{a}_i: \mathbb{R}^{3N+1} \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$  folytonos.

$$\text{Konf}(\mathbf{x}, t) := \left\{ \delta \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N} \mid \forall i \in \mathcal{N}_k \text{ esetén } \mathbf{a}_i(\mathbf{x}, t) \cdot \delta \mathbf{x} = 0 \right\}.$$

Elszakadva mindenfajta geometriai szemléltetéstől, azt hogy  $\text{Konf}(\mathbf{x}, t)$  minden helyen és időben altere lesz  $\mathbb{R}^{3N}$ -nek, onnan tudjuk, hogy  $\text{Konf}(\mathbf{x}, t)$ -t egy  $k$  egyenletből álló  $3N$  ismeretlenes ( $k < 3N$ ) homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai adják, melyek alteret alkotnak  $\mathbb{R}^{3N}$ -ben. A  $\text{Konf}(\mathbf{x}, t)$  altér dimenziója nyilván helyről-helyre és időről-időre változhat. Továbbá az is világos, hogy ez az altér legalább  $3N - k$  dimenziójú, hiszen ebből a  $k$  számú egyenletből, ha adott helyen és időben  $0 \leq l \leq k$  számú független, akkor a konfigurációs tér  $3N - l$  dimenziós. Fizikailag azonban fontos – mint azt a fenti szemléltetésben láttuk –, hogy a konfigurációs tér minden helyen és időben azonos dimenziójú legyen, azaz:

*Konfigurációs elv:* Megköveteljük, hogy minden helyen és időben a konfigurációs tér  $3N - k$  dimenziós legyen, azaz  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N}$  és  $\forall t \in \mathbb{R}$  esetén

$$\dim \text{Konf}(\mathbf{x}, t) = 3N - k.$$

Nyilván azért a  $3N - k$  dimenziót követeljük meg, és nem többet, mert fölöslegesek az összefüggő egyenletek. Mint azt láttuk,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N}$  és  $\forall t \in \mathbb{R}$  esetén  $\forall i \in \mathcal{N}_k$ -ra  $\mathbf{a}_i(\mathbf{x}, t) \in \text{Konf}(\mathbf{x}, t)^\perp$ . A konfigurációs elv tulajdonképpen azzal ekvivalens, hogy minden helyen és időben ezek az  $\mathbf{a}_1(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{a}_2(\mathbf{x}, t)$ , ...,  $\mathbf{a}_k(\mathbf{x}, t)$  vektorok a  $\text{Konf}(\mathbf{x}, t)^\perp$  altér bázisát képezik. Sőt a konfigurációs elvből az is következik (illetve azzal is ekvivalens), hogy az eredeti (1) egyenletrendszer minden helyen és időben független egyenletekből áll. A  $3N - k$  szám a konfigurációs elv miatt kitüntetett szerepet kap, hiszen ez a szám mutatja meg, hogy hány független irányban történhetnek virtuális elmozdulások. Éppen ezért ezt a számot a rendszer szabadsági fokának nevezzük és  $f$ -fel jelöljük:  $f := 3N - k$ .

### A kényszerfeltételek és az $\mathbf{x}(t)$ pálya

Az  $N = 1$ -hez kötött előző pontban tárgyalt speciális esetből azt is végiggondolhatjuk, hogy az anyagi pontnak az  $f(\mathbf{x}, t) = 0$  egyenletű felületen kell mozognia. Vagyis a keresett  $\mathbf{x}(t)$  pályának  $\forall t \in \mathcal{I}$  esetén ki kell elégítenie ezt az egyenletet, azaz  $\forall t \in \mathcal{I}$  esetén  $f(\mathbf{x}(t), t) = 0$ . Véve ennek az idő szerinti teljes deriváltját az

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial f(\mathbf{x}(t), t)}{\partial x_j} \dot{x}_j(t) + \frac{\partial f(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} = 0$$

egyenletet kapjuk. Ezt már átfogalmazhatjuk az általános esetre is.

*Kényszerelv:* Megköveteljük, hogy a keresett  $\mathbf{x}(t)$  pálya kielégítse a kényszerfeltételeket, azaz  $\forall t \in \mathcal{I}$  és  $\forall i \in \mathcal{N}_k$  esetén

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij}(\mathbf{x}(t), t) \dot{x}_j(t) + b_i(\mathbf{x}(t), t) = 0.$$

Itt a  $\forall i \in \mathcal{N}_k$  feltételt azért kötöttük ki, mert csak olyan megoldást keresünk, amely az összes kényszerfeltételnek eleget tesz. Ez a követelmény  $k$  egyenletet jelent a keresett  $\mathbf{x}(t)$   $3N$  ismeretlenére.

További egyenletek meghatározásához újabb feltevések szükségesek. Most mutatunk két ekvivalens feltevérendszer. Az egyiket *Newton-féle szemléletnek*, a másikat *D'Alembert-féle szemléletnek* nevezzük. Mindkét szemlélet felteszi a kényszernek, azaz olyan erőnek a létét, amely az anyagi pontokat a „kényszerfelületen tartja”. Hogy pontosan mit is jelent ez a mondat, azt az egyes szemléletek rögzítik.

### A Newton-féle szemlélet

A newtoni szemlélet úgy közelíti meg a kényszer fogalmát, hogy – mivel a pontrendszernek a kényszerfelületen kell maradnia, azért – a keresett pálya mentén a kényszernek ki kell oltania a szabaderőnek a kényszerfelületre merőleges komponensét. Persze az (1) egyenletekből a kényszerfelület általában meghatározhatatlan (ez csak holonóm esetben lehetséges), annyit azonban biztosan tudunk, hogy a kényszernek a keresett pálya mentén merőlegesnek kell lennie a kényszerfelületre. Ezt viszont ki tudjuk fejezni a konfigurációs térrel is, hiszen a konfigurációs tér nem más, mint az adott időhöz és helyhez tartozó érintő tere a kényszerfelületnek, vagyis a kényszer akkor merőleges a kényszerfelületre, ha merőleges a konfigurációs térre. Vagyis a keresett pálya mentén a kényszernek merőlegesnek kell lennie a konfigurációs térre.

*A virtuális munka elve:*  $\exists \mathbf{K}: \mathbb{R}^{6N+1} \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$  folytonos és  $\mathcal{D}\text{om} \mathbf{K} = \mathcal{D}\text{om} \mathbf{F}$  függvény, amelyre a keresett  $\mathbf{x}(t)$  pálya mentén  $\forall t \in \mathcal{I}$  és  $\forall \delta \mathbf{x} \in \text{Konf}(\mathbf{x}(t), t)$  esetén

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) \cdot \delta \mathbf{x} = 0.$$

Ezek után a kényszerekkel kibővíve felírhatjuk a dinamika alaptörvényét:

*A dinamika alaptörvénye:* A keresett  $\mathbf{x}(t)$  pálya mentén  $\forall t \in \mathcal{I}$  esetén

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) + \mathbf{K}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) = \underline{m} \ddot{\mathbf{x}}(t).$$

Ezek a feltevések már elegendőek ahhoz, hogy meghatározhassuk a keresett  $\mathbf{x}(t)$  pályát. Ennek igazolása előtt azonban vizsgáljuk meg a másik szemléletet.

### A D'Alembert-féle szemlélet

Az, hogy a keresett pálya mentén a kényszer kioltja a szabaderő kényszerfelületre merőleges komponensét, úgy is megfogalmazható, hogy a szabaderőnek a konfigurációs tér ortogonális kiegészítőjére vett merőleges vetülete a kényszer ellentettjét adja. A D'Alembert-féle szemlélet attól vált a Newton-féle szemlélettől független-

né, hogy a keresett pálya mentén a  $-m\ddot{\mathbf{x}}$ -ot is szabad-erőnek tekintjük. Ha  $A \subseteq \mathbb{R}^{3N}$  altér, akkor jelölje  $\mathcal{P}_A$  az  $A$  al-terre merőlegesen vetítő operátort. Ekkor a fenti gondolat mindent egybevetve így írható:

*A D'Alembert-elv:*  $\exists \mathbf{K} : \mathbb{R}^{6N+1} \mapsto \mathbb{R}^{3N}$  folytonos és  $\mathfrak{D} \circ m\mathbf{K} = \mathfrak{D} \circ m\mathbf{F}$  függvény, amelyre a keresett  $\mathbf{x}(t)$  pálya mentén  $\forall t \in \mathcal{J}$  esetén

$$\mathcal{P}_{\text{Konf}(\mathbf{x}(t), t)} [\mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) - m\ddot{\mathbf{x}}(t)] = -\mathbf{K}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t).$$

A következő egyenlet azt fejezi ki, hogy a bővített szabad-erő a keresett pálya mentén merőlegesen a konfigurációs térre. Ez a feltevés azért szükséges, mert ennyi kell minimálisan ahhoz, hogy a két szemlélet ekvivalens legyen, és a hagyomány szerint is ez a D'Alembert-elvek kanonikus alakja.

*A D'Alembert-egyenlet:* A keresett  $\mathbf{x}(t)$  pálya mentén  $\forall t \in \mathcal{J}$  és  $\forall \delta \mathbf{x} \in \text{Konf}(\mathbf{x}(t), t)$  esetén

$$[\mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) - m\ddot{\mathbf{x}}(t)] \cdot \delta \mathbf{x} = 0.$$

### A szemléletek ekvivalenciája

A szemléletekben megfogalmazottak feltevések a keresett  $\mathbf{x}(t)$  pályáról, vagyis az ekvivalenciát is a keresett pálya mentén kell igazolni. Így az alábbi igazolásoknál tartjuk ezt észben, és akkor nem kell kiírni a függvények változóit.

*Newtontól D'Alembert-ig.* A dinamika alaptörvényét átalakíthatjuk:  $\mathbf{F} + \mathbf{K} - m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ . Megszorozva ezt az egyenletet  $\delta \mathbf{x}$ -szel és felhasználva a virtuális munka elvét, miszerint  $\mathbf{K} \delta \mathbf{x} = 0$ , megkapjuk a D'Alembert-egyenletet. Vagyis az  $\mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{x}}$  benne van a konfigurációs tér ortogonális kiegészítőjében, azaz erre a térre vett merőleges vetülete önmagát adja, és tudjuk, hogy  $\mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{K}$ , azaz igaz a D'Alembert-elv.

*D'Alembert-től Newtonig.* A D'Alembert-egyenlet szerint az  $\mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{x}}$  vektor benne van a konfigurációs tér ortogonális kiegészítőjében, vagyis az erre a térre vett merőleges vetülete önmagát adja, így felhasználva a D'Alembert-elvet az  $\mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{K}$  egyenletet, vagyis a dinamika

alaptörvényét kapjuk. Ha ezt az egyenletet megszorozzuk  $\delta \mathbf{x}$ -szel, akkor a D'Alembert-egyenletet felhasználva adódik, hogy  $\mathbf{K} \delta \mathbf{x} = 0$ , vagyis igaz a virtuális munka elve is.

### Az elsőfajú mozgásegyenletek

Most megmutatjuk, hogyan lehet előállítani a keresett pályát az előző feltevésekből. Használjuk a Newton-féle szemléletet! Tudjuk, hogy létezik a  $\mathbf{K}$  kényszer, és a keresett pálya mentén benne van a konfigurációs tér ortogonális kiegészítőjében. Azt is láttuk *A konfigurációs tér* alfejezetben, hogy az  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  vektorok bázisát adják ennek a térnek minden helyen és időben (a konfigurációs elv miatt), így a keresett pálya mentén  $\mathbf{K}$  reprezentálható ebben a bázisban, vagyis a keresett pálya mentén  $\mathbf{K} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k$ . Ezt viszont be lehet tenni a dinamika alaptörvényébe, vagyis tudjuk, hogy a keresett pálya mentén fennáll az

$$\mathbf{F} + \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k = m\ddot{\mathbf{x}}$$

egyenlet. Ez  $3N$  egyenletet jelent  $3N+k$  ismeretlenre, hiszen a  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  úgynevezett Lagrange-multiplikátorok is ismeretlenek. Ugyanakkor a kényszerelv még biztosít számunkra  $k$  egyenletet, tehát összesen van  $3N+k$  egyenletünk, vagyis a probléma elvben megoldható. Hangsúlyozzuk viszont, hogy feltevéseink nem teljesekek abban az értelemben, hogy nem biztosítják egyértelmű megoldás létezését, „csak” annyit tesznek lehetővé számunkra, hogy megoldási módszereket konstruáljunk. Erre volt példa a most felírt  $3N+k$  egyenlet.

### Irodalom

- MATOLCSI TAMÁS: *Analízis I.* – ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1999  
 MATOLCSI TAMÁS: *Analízis II.* – ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1999  
 CSÁSZÁR ÁKOS: *Valós analízis I.* – Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999  
 ABONYI IVÁN, NAGY TIBOR: *Elméleti fizika* – Tankönyvkiadó, Budapest, 1980  
 V.I. ARNOLD: *A mechanika matematikai módszerei* – Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985  
 BUDÓ ÁGOSTON: *Mechanika* – Tankönyvkiadó, Budapest, 1952  
 NAGY KÁROLY: *Elméleti mechanika* – Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1993

## FIATAL CSILLAGOK ÉS KÖRNYEZETÜK KÖLCSÖNHATÁSAI

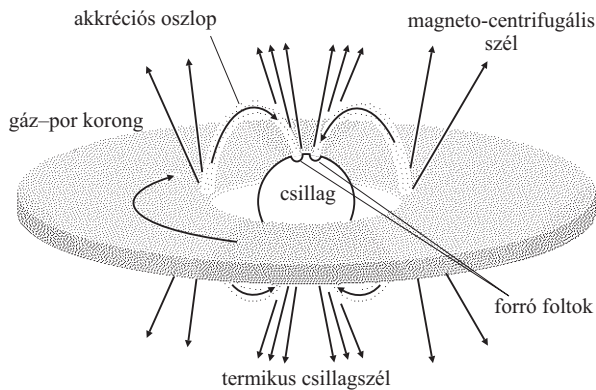
Kun Mária

MTA Konkoly Thege Miklós Csillagászati Kutatóintézete

A csillagok életútját és a fejlődésük különböző szakaszaiban megfigyelhető tulajdonságait egyértelműen meghatározza a tömegük. A legfiatalabb csillagok kivételek. Fejlődésük kezdeti szakaszaiban a csillagok még nagyon szoros kapcsolatban vannak azzal a csillagközi felhővel,

A cikkben ismertetett kutatások az OTKA T34584 és T49082 sz. pályázatai támogatják.

amelyben születtek. Megfigyelhető tulajdonságaik jelentős része a környezet fizikai állapotát, valamint a csillag és környezete kölcsönhatásait tükrözi, nem a születő csillag tömegét és korát. Azt várhatjuk, hogy a különböző csillagkeletkezési régiókban feltűnő különbségeket találunk az azonos tömegű és korú csillagok megfigyelhető tulajdonságaiban. Ebben a cikkben ezekre a különbségekre mutatok be néhány példát.



1. ábra. A fősorozat előtti csillagok vázlatos szerkezete

## A fiatal csillagok tágabb környezete: a csillagkeletkezési régió

A csillagkeletkezési régió mint galaktikus objektum nagyjából  $10^2$ – $10^6 M_{\odot}$  (naptömeg) tömegű molekuláris gázból, porból és a benne keletkezett fiatal csillagokból–csillagcsoportokból áll. A fiatal csillagkeletkezési régió térfogatának jelentős részét sűrű gáz tölti ki, és a hozzá tartozó csillagok mélyen a felhőkbe ágyazott infravörös objektumok. Fejlődése során a legsűrűbb tartományokban csillagok keletkeznek, a ritkább gáz szétszóródik, és a fiatal csillagok az optikai hullámhosszakon is megjelennek: a csillagkeletkezési régió csillagtársulássá (asszociáció) alakul át.

A fiatal csillagokat spektrális tulajdonságaik különböztetik meg a felhőre vetülő mezőcsillagoktól és infravörös galaxisoktól. A kis tömegű protocsillagok optikailag láthatatlan infravörös források. Spektrális energiaeloszlásukat jól leírja a központi égitest hőmérsékleti sugárzását elnyelő és visszasugárzó, különböző sűrűségű és hőmérsékletű rétegekből álló, porban dús burok modellje [1]. A molekulafelhő anyagából kialakuló protocsillagokat megfigyelési szempontból, infravörös spektrumuk energiaeloszlása alapján két osztályba sorolják: a fő akkréciós fejlődési fázis elején tartanak a 0. osztályú protocsillagok, amelyek tömegének nagy része még a burokban található, és a tömegbefogás végénél az 1. osztályú protocsillagok, amelyeknek cirkumsztelláris burka már a csillag tömegénél sokkal kevesebb anyagot tartalmaz [2, 3].

A tömegbefogás végén a születő csillagot fősorozat előtti csillagnak nevezik. A fősorozat előtti csillagok tömege már alig nő, lassú, több millió évig tartó kontrakcióval érik el a magfúzióhoz szükséges centrális hőmérsékletet, azaz a Hertzsprung–Russell-diagram fősorozatát.

## A Nap típusú csillagok keletkezése dióhéjban

A Nap típusú csillagok keletkezése négy fő szakaszból áll (ld. pl. [4]):

1) *Gravitációsan instabil felhőmag kialakulása.* A csillagközi molekulafelhők legsűrűbb tartományainak, a felhőmagoknak tipikus mérete 0,01–0,1 pc, kinetikus hőmérséklete 10–20 K, tömege néhány naptömeg.

2) *A felhőmag közepén dinamikus kollapszus kezdődik és kifelé terjed: a felhőmagok gravitációs instabilitása következtében a felhőkben protocsillagok keletkeznek.* Kezdetben a kollapszus izoterm, a felszabaduló gravitációs energiát a por és a molekulák hatékonyan sugározzák ki. A sűrűség növekedésével a kollapszus centrális tartománya optikailag vastagga válik, hőmérséklete addig emelkedik, míg végül hidrosztatikus egyensúlyt ér el. A hidrosztatikus mag tömege kialakulásakor mintegy  $0,01 M_{\odot}$ . A csillagkeletkezésben részt vevő anyag tehát időben monoton növekvő tömegű és sugarú hidrosztatikus magból, bezuhanó burokból és az egészet beágyazó, még nyugalomban levő felhőmagból áll.

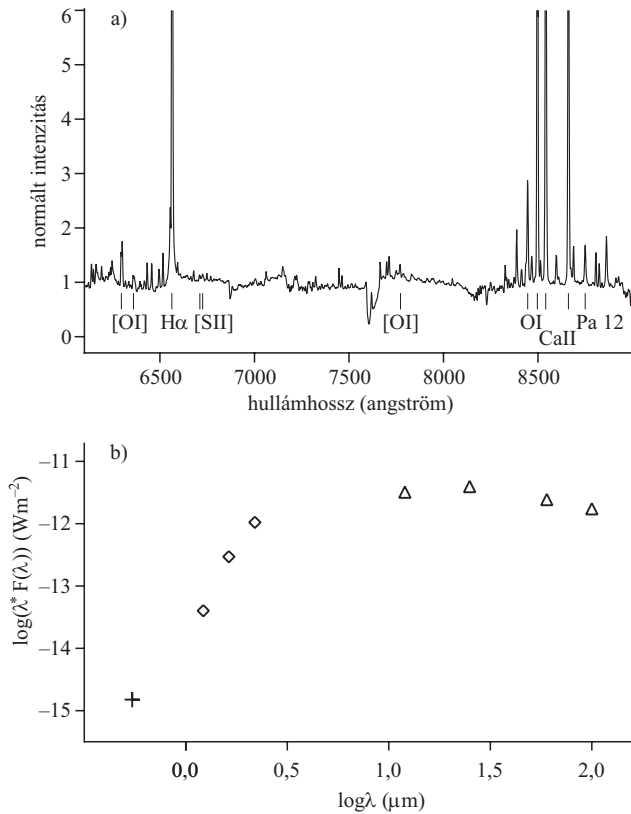
3) *Centrifugális korong kialakulása a protocsillag körül, és ezzel egy időben a deutérium fúziója és konvekció a protocsillagban.* Magnetocentrifugális szél indul a protocsillag forgástengelyének irányába. A felhő kezdeti forgása felgyorsul a kollapszus közben, ezért a beeső részecskék radiális mozgása a kollapszus centrumától egy, a csillag tömegétől, valamint a bezuhanó gáz kezdeti sebességétől és hőmérsékletétől függő távolságban (a centrifugális sugárnál) tangenciálissá változik. A csillagkezdemény körül így akkréciós korong alakul ki. A kollapszus a korongot táplálja, a csillag tömege pedig a korongról növekszik. Protocsillagnak az egész hidrosztatikus csillagkezdemény – akkréciós korong – bezuhanó burokrendszert tekintjük. A centrumban növekvő csillagkezdemény hőmérséklete az eredetileg molekuláris anyag disszociációja, majd ionizációja után emelkedni kezd.  $10^6$  K centrális hőmérsékletnél elkezdődik a deutérium fúziója héliummá. Ekkor, mivel a csillag még jóval terjedelmesebb a hasonló tömegű fősorozati csillagoknál, és a nagy felületen gyorsan hűl, konvektív válik. A konvekció és a forgás mágneses dipólteret hoznak létre, és ettől kezdve a csillag mágneses terének a befelé tartó anyaggal való kölcsönhatását is figyelembe kell venni. Az akkréciós korongról befelé áramló ionizált gáz impulzusnyomatékától függően a csillag mágneses erővonalai mentén vagy a csillag felszínére jut (magnetoszférikus akkréció), vagy kirepül a rendszerből (magnetocentrifugális szél).

4) *A tömegbefogás vége, a csillag megjelenése fényforrásként.* A szél térszöge kiszélesedik, a csillag leválik a felhőről, és tömege már nem nő jelentősen. Lassú, néhány millió évig tartó kvázisztatikus kontrakció során emelkedik centrális hőmérséklete a hidrogénfúzióhoz szükséges 15 millió kelvinre.

## A fiatal csillagok megfigyelhető tulajdonságai

Az 1. ábra mutatja, hogyan néz ki az előző szakaszban vázolt folyamatban létrejött fősorozat előtti csillag. Feltűnően nem gömbszimmetrikus: nagyjából 100–200 csillagászati egység sugarú, néhány század naptömegnyi gázból és porból álló akkréciós korong övezi. A korong ionizált felszíne mágneses kapcsolatban van a csillaggal. A korong anyaga a mágneses erővonalak mentén áramlik a csillag felszínére. A korongról a csillagra hulló gáz a csillag optikai színekében erős emissziós vonalak formájá-





2. ábra. a) A PV Cephei optikai spektruma a Calar Alto Observatóriumban 2,2 m-es távcsövvel 2004. augusztus 5-én készült felvétel alapján. b) A PV Cephei Herbig Ae-csillag spektrális energiaeloszlása a 2MASS és az IRAS adatainak felhasználásával.

ban jelenik meg. A vonalak szélessége által tükrözött sebességek összemérhetők a csillagfelszíni szabadesés sebességével (kb. 300 km/s). A korong belső szélénél induló *magnetocentrifugális szél*ben a korong anyagának legnagyobb perdületű részecskéi távoznak a rendszerből a nyitott erővonalak mentén. Ez a nagy sebességű, ritka gáz tiltott emissziós vonalak formájában figyelhető meg a fiatal csillagok optikai színképében. Az akkréció talppontjaiban a csillag felszíne felforrósodik. A forró foltok jelenléte miatt a csillag kékebbnek látszik, mint a hasonló tömegű, öregebb csillagok. A forró foltok is erős csillagszél forrásai. Ennek a szélnek a részecskéit tükrözi az optikai színképben látható héliumemisszió.

A Nap típusú, fősorozatot előtti csillagok egyik csoportját a G, K és M típusú, színképükben emissziós vonalakat mutató *klasszikus T Tauri csillagok* alkotják. A klasszikus T Tauri csillagok egyik legfeltűnőbb spektrális tulajdonsága a színképükben észlelhető erős H $\alpha$ -emisszió, a másik pedig az infravörös többlétsugárzás. Feltűnőek még a tiltott emissziós vonalak, amelyek az akkréciós korong és a csillag kölcsönhatása következtében fellépő csillagszélből erednek.

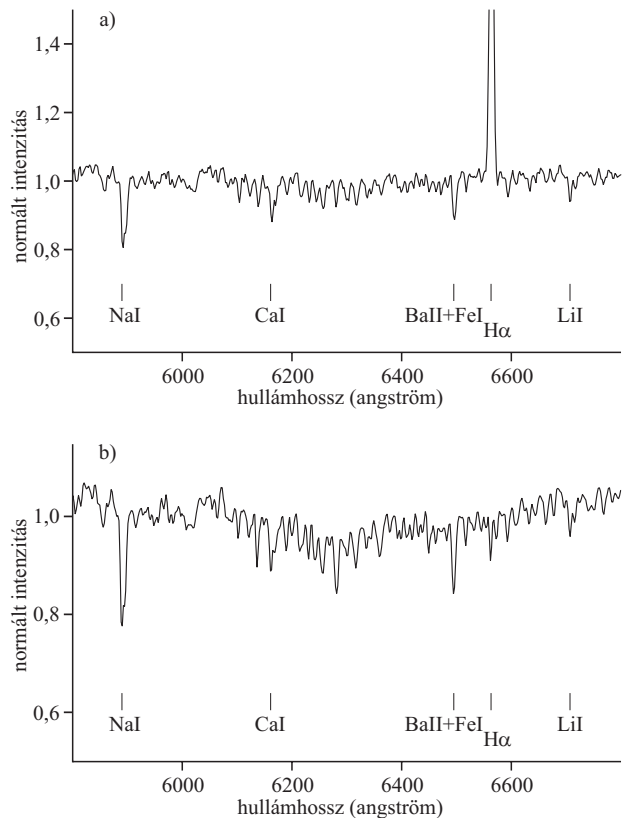
A Nap típusú fősorozatot előtti csillagok másik csoportja a *gyenge vonalú T Tauri csillagok*. Ezeknél az ugyancsak G, K és M színkép típusú csillagoknál nem figyelhető meg az akkréciós korong és a csillag kölcsönhatását tükröző jelenségek. Csillagkeletkezési régiókhöz való közelségük és erős *röntgensugárzásuk* hívta fel rájuk a figyelmet. A röntgensugárzás erős kromoszférikus aktivitást

tükröz, ami fiatal korra utal. A Napnál nem nagyobb tömegű csillagok fiatal korának legfontosabb indikátora a lítium rezonanciavonalának jelenléte a spektrumban 6707,6 Å-nél. A lítium a fősorozat előtti fejlődés során a kis tömegű, konvektív csillagokban elfogy, mivel már 3 millió kelvinen fuzionál. A gyenge vonalú T Tauri csillagok fiatal korát a lítium jelenléte bizonyítja legmeggyőzőbben.

Nem tudjuk egyértelműen megmondani, miért létezik a fiatal csillagoknak ez a két különböző csoportja. Kézenfekvő arra gondolni, hogy a gyenge vonalú T Tauri csillagok öregebbek, mivel az akkréció üteme csökken, ahogy a csillag a fősorozat felé közeledik. A lítiumgyakoriságra alapozott korvizsgálatok azonban azt mutatják, hogy mindkét csoport nagyjából azonos korú csillagokból áll. A protosztelláris fejlődés során kialakuló korong tulajdonságai függenek a csillagelőtti felhőmag sűrűségétől, perdületétől, mágneses terétől. A gyenge vonalú T Tauri csillagok általában a molekulafelhőkön kívül találhatóak. Valószínű, hogy kisebb, ritkább felhők voltak a csillagkeletkezés alapanyagai, amelyek a csillagkeletkezés után gyorsan szétszóródtak. Mind a csillagképződésben, mind a felhők szétszórásában fontos szerepet játszanak a külső hatások: közeli szupernóva-robbanás vagy közeli nagy tömegű csillagok erős szele.

A fősorozatot előtti csillagok nagyobb, körülbelül 2,5  $M_{\odot} < M < 8 M_{\odot}$  tömegű képviselői a *Herbig-féle Ae/Be csillagok*. Ezek B, A és F színkép típusú, csillagkörüli

3. ábra. a) Az AS 507 – G2V típusú, pontosan mint a Nap – klasszikus T Tauri csillag a Cepheusban. Fiatal korát az erős H $\alpha$ -emisszió és a 6707 Å hullámhosszú lítiumabszorpció bizonyítja. b) Egy K3 színkép típusú, gyenge vonalú T Tauri csillag (GSC 0448000917) optikai színképe.



portól származó infravörös többletsugárzást mutató, emissziós színképű csillagok, és legtöbbjük reflexiós ködöt is megvilágít.

A 2. ábrán egy fősorozat előtti csillag, a PV Cephei optikai színképe látható a 6300–8800 Å hullámhossztartományon, valamint spektrális energiaeloszlása az optikai és az infravörös hullámhosszakon. A színképeket a csillag–korong kölcsönhatást tükröző emissziós vonalak uralják. A legfeltűnőbb vonalak, a H $\alpha$  és a CaII infravörös triplétt intenzitása a csillagra áramló anyag mennyiségével arányos. Az oxigén, nitrogén és kén tiltott vonalai a ritka csillagszélből erednek. A spektrális energiaeloszlás sem hasonlít a csillagok néhány ezer kelvines feketetest-sugárzásához: a csillagot körülvevő korong és burok infravörös sugárzása adja a megfigyelt sugárzás zömét.

A 3. ábrán egy sokkal kevésbé aktív – azaz lassabb ütemben építkező – G2 színkép típusú klasszikus T Tauri és egy K3 színkép típusú gyenge vonalú T Tauri csillag optikai színképe látható. Mindkét csillag a Cepheus csillagkép közeli molekulafelhőiben található [5, 6].

Legtöbb csillagnál megfigyelhető a vonalintenzitások időbeli változása, ami arra utal, hogy az akkréció és a hozzá társuló szél nem állandó. A korong belső viszkozitása következtében részecskéi a csillag felé spiráloznak. Előfordulhat, hogy a korong belső szélénél – amelynek helye a csillag tömegétől és mágneses térerősségétől is függ – nagy mennyiségű anyag gyűlik össze, majd hirtelen

4. ábra. A Boszorkányfej-köd az Orion csillagképben kis tömegű csillagok születési helye.



len a csillagra zúdul. Ekkor a csillag rövidebb-hosszabb időre kifényesedik, és spektrumában megnő az emissziós vonalak intenzitása. A 2. ábrán látható PV Cephei valószínűleg éppen ilyen fázisban van. A meglódult akkréció egyes esetekben néhány hónap alatt véget ér, amikor elfogy a korong belső szélénél az anyag, és nincs utánpótlása. Vannak azonban olyan esetek, ahol a gyors anyagbeáramlás évtizedekig is eltart. Ezek a csillagok az *FU Orionis típusú változócsillagok*. Ezen csillagok valószínűleg a legfiatalabb fősorozat előtti objektumok közé tartoznak: akkréciós korongjaik az átlagosnál nagyobb tömegűek, és a csillagra hulló anyag folyamatosan pótlódik a csillagelőtti burokból.

A színképvonalak alakja néhány esetben egyértelműen megmutatja, hogy a vonal a csillagra áramló vagy éppen a szélben távozó anyagból ered. A kiáramló anyag esetében a széles emissziós vonalnak a rövid hullámhosszú oldalán abszorpciós összetevője van (P Cygni profil), míg a beáramló anyag nyomjelzője a vörös oldalon abszorpcióval társuló *inverz P Cygni* profil. Mivel korong a csillagkörülí anyag egyes tartományait eltakarja, a megfigyelhető színkép megjelenése attól is függ, milyen szögben látunk rá a korongra.

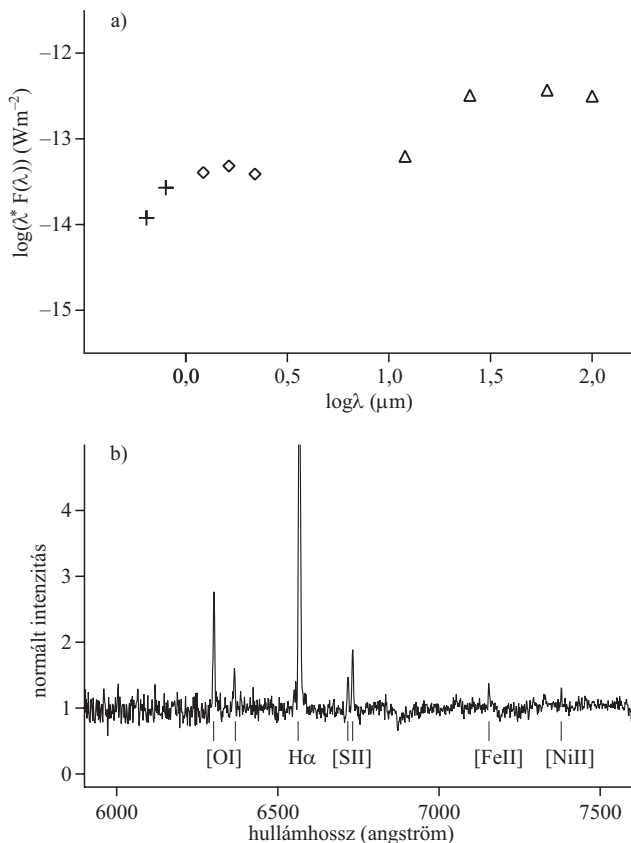
Maga az akkréciós korong jellegzetes infravörös spektrumáról ismerhető fel. A csillag–korong rendszer spektrális energiaeloszlásában összegződik a néhány ezer kelvines felszíni hőmérsékletű csillag és a kifelé radiálisan csökkenő hőmérséklet-eloszlású korong spektruma. A burok maradványai a hosszabb infravörös hullámhosszakon járulnak hozzá a fiatal csillag energiakibocsátásához.

## A fiatal csillagok és tágabb környezetük viszonya

A fiatal csillag szűkebb környezete, a *cirkumsztelláris korong és burok* jelenléte határozza meg a csillagok spektrális megjelenését. A születő csillagok tömegeloszlása, csoportosulási tulajdonságai és a csillagkörülí anyag szerkezete és fejlődése viszont a csillagkeletkezési régió nagy léptékű tulajdonságaitól függ. A legismertebb közeli csillagkeletkezési régiók az Orion és a Taurus csillagkép molekulafelhői. Míg az előbbiben forró óriáscsillagokat is tartalmazó sűrű halmazok keletkeznek, az utóbbiban csak kis tömegű csillagok ritkás csoportokban.

Az MTA Konkoly Thege Miklós Csillagászati Kutatóintézetében számos, kevésbé ismert, közeli molekulafelhő csillagképző tulajdonságait vizsgáltuk. Összehasonlításuk egymással és ismert csillagkeletkezési régiókkal hasznos információkat adhat a csillagkeletkezés kezdőfeltételeiről és környezettől való függéséről.

A *Boszorkányfej-köd* (IC 2118, 4. ábra) a jól ismert Orion csillagkeletkezési terület nyugati szélén, a Rigeltől 2° távolságban északnyugatra található. Noha az Orion az egyik legalaposabban tanulmányozott csillagkeletkezési régió, az IC2118 az Orionra irányuló legtöbb vizsgálat hatókörén kívül esett. A reflexiós köd és a hozzájuk tartozó molekulafelhők feltűnően aszimmetrikusak. Alakjuk azt sugallja, hogy dinamikai kölcsönhatásban vannak a közeli *Orion OB1* asszociáció nagy tömegű, forró csillagaival.



5. ábra. a) Kis tömegű protocsillag (IRAS 02086+7600) spektrális energiaeloszlása azt mutatja, hogy a sugárzás zöme a hideg csillagkörüli burokból ered. b) Az objektum optikai spektruma a csillag körüli burkon szórt fényt folytonos színekéből, valamint a nagy sebességű protoszteriális szél és gázburok ütközése során keltett tiltott vonalakkól áll. A „burokban születő” csillagról semmit sem árulnak el ezek a megfigyelések. A színekép a 2,5 m-es *Nordic Optical Telescope*-pal készült 2001 januárjában.

A Rigel által megvilágított kis felhőkben öt fősorozat előtti csillagot és egy I. osztályú protocsillagot találtunk [7]. A csillagképző felhők az Orion OB1 asszociáció forró csillagai által létrehozott, nagy nyomású gázzal kitöltött csillagközi térrész, az Orion–Eridanus-buborék hozzánk legközelebbi szélén vannak. A csillagkeletkezést a csillagközi buborék belsejében uralkodó nagy nyomás indította el. Az IC2118 csillagkeletkezési régió különlegessége, hogy az egy protocsillagra jutó felhőtömeg sokkal kisebb benne, mint a többi ismert csillagkeletkezési régióban (az átlagos 11  $M_{\odot}$ /protocsillag helyett mindössze 6  $M_{\odot}$ /protocsillag). A környezet nagy nyomása segítette a kisebb tömegű felhők kollapszusát.

A Lynds 1333 kicsi (0,007 négyzetfok) átmérőjű sötét felhő a Kassiopeia csillagképben, mindössze 180 parsekre a Naptól. A felhő rádiócsillagászati megfigyelései

azt mutatták, hogy ezen a területen valószínűleg két felhő összeütközése indította el a csillagkeletkezést [8]. A csillagképző felhőmagok a galaktikus síkkal nagyjából párhuzamos, keskeny, filamentáris felhő mentén helyezkednek el. A L1333 fiatal csillagainak optikai spektrumait 2001 januárjában észleltem a *Nordic Optical Telescope ALFOSC* spektrográfjával. Különösen érdekes az IRAS 02086+7600, amelynek infravörös színindexei az optikailag általában láthatatlan I. osztályú protocsillagokéra hasonlítanak. Ezzel az infravörös forrással azonban egybeesik egy halvány, nagyon vörös csillag, amelynek optikai színeképe és spektrális energiaeloszlása az 5. ábrán látható. Ebben a spektrumban a protocsillag és a beágyazó burok kölcsönhatásait látjuk. Az erős [OI] és [SII] tiltott emissziós vonalak ott keletkeznek, ahol a csillagszéllel való ütközés gerjeszti a burok atomjait. Az erős H $\alpha$ -vonal valószínűleg a burkon belüli akkréciós korongról a csillagra áramló gázban keletkezik. Az IRAS 02086+7600 a piszkétetői 1 m-es RCC teleszkóppal R és I szűrőkön át készült optikai képeken nem pontszerű. Az objektum képeinek és a kép ponteloszlási függvényének félértékszélességéből a látható burok becsült lineáris mérete körülbelül 360 AU. Ezzel szemben a H $\alpha$ -szűrőn át készült felvételen az IRAS 02086+7600 képeinek profilja nem különbözik a csillagokétól, bizonyítva, hogy a H $\alpha$ -emisszió kisebb térfogattól érkezik, mint a folytonos szórt fény. Nagyobb szögfelbontású műszerekkel vizsgálva az IRAS 02068+7600 protocsillagot a korai csillagfejlődés sok érdekes részletét fedezhetjük fel.

A közeli csillagkeletkezési régiók vizsgálatával megismerhetjük a legszűkebb galaktikus környezetünkben, a szemünk előtt zajló csillagképződés törvényeit. A környezettől való függés vizsgálata segíthet megérteni, hogyan változhattak a csillagkeletkezési folyamatok a világegyetem fejlődése során, míg évmilliárdok alatt kialakították a kozmosz mostani képét.

## Irodalom

1. F.C. ADAMS, C.J. LADA, F.H. SHU – *Astrophys. J.* 312 (1987) 788
2. C.J. LADA: *The Physics of Star Formation and Early Stellar Evolution* – szerk. C.J. Lada és N.D. Kylafis, Kluwer, 1991, 329. o.
3. P. ANDRÉ, D. WARD-THOMPSON, M. BARSONY – *Astrophys. J.* 406 (1993) 122
4. F.H. SHU, A. ALLEN, E. OSTRICKER, Z-Y. LI: *The Origin of Stars and Planetary Systems* – szerk. C.J. Lada és N.D. Kylafis, Kluwer, 1999, 193. o.
5. M. KUN – *Astrophys. J. Suppl.* 115 (1998) 59
6. K. TACHIHARA, R. NEUHÄUSER, M. KUN, Y. FUKUI – *Astron. & Astrophys.* (2005) nyomdában
7. M. KUN, T. PRUSTI, S. NIKOLIĆ, L.E.B. JOHANSSON, N.A. WALTON – *Astron. & Astrophys.* 418 (2004) 89
8. A. OBAYASHI, M. KUN, Y. YONEKURA, F. SATO, Y. FUKUI – *Astron. J.* 115 (1998) 274

Szerkesztőség: 1027 Budapest, II. Fő utca 68. Eötvös Loránd Fizikai Társulat. Telefon/fax: (1) 201-8682

A Társulat Internet honlapja <http://www.elft.hu>, e-postacíme: mail.elft@mtsz.hu

Kiadja az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, felelős: Berényi Dénes főszerkesztő.

Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza. A szerzőknek tiszteletpéldányt küldünk.

Nyomdai előkészítés: Kármán Tamás, nyomdai munkálatok: OOK-PRESS Kft., felelős vezető: Szathmáry Attila ügyvezető igazgató.

Terjeszti az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, előfizethető a Társulathoz vagy postautalványon a 10200830-32310274-00000000 számú egyszámlán.

Megjelenik havonta, egyes szám ára: 600.- Ft + postaköltség.

HU ISSN 0015-3257

Amióta az optikai mikroszkópot feltalálták, állandó probléma volt, hogyan lehet láthatóvá tenni a vízben lebegő olyan piciny mikroorganizmusok és sejtpopulációk szerkezetét, amelyek átlátszóak, mint a víz, csupán a törésmutatójuk tér el attól.

A megoldást a fáziskontraszt-mikroszkóp jelentette, amelynek segítségével az átlátszó, de eltérő törésmutatójú objektumok láthatóvá tehetőek. A működési elv alapgondolata az, hogy az ilyen objektumokon áthatoló fény fázisa eltérő a tiszta vízhez képest és megfelelő optikai elrendezéssel a fáziseltérés fényintenzitás-eltéréssé alakítható át.

A fáziskontraszt-mikroszkópot *Frits Zernike* (1888–1966) holland fizikus találta fel 1934-ben, s ezért 1953-ban Nobel-díjat kapott [1]. Érdemes megemlíteni, hogy a tudomány történetében viszonylag ritkán fordul elő, hogy egy műszaki találmányért – a szabadalmi oltalom megszerzése mellett – a feltaláló ilyen magas tudományos kitüntetést is kapjon.

Ami a műszaki megoldás lényegét illeti, ez voltaképpen a térbeli Fourier-transzformáció elvének koherens optikai alkalmazása évtizedekkel a lézerek feltalálása előtt. Előremutató jellegére jellemző, hogy a megoldás elméleti alapjául szolgáló térbeli Fourier-transzformáció matematikai módszereit ma is számos helyen alkalmazzák, többek között a *Gábor Dénes* által felfedezett holográfiában, továbbá a tanuló alakfelismerésben, a szoftveres képfeldolgozásban, valamint a katonai célú céltárgy-követésben is.

Az 1. ábra szerinti vázlat nem Zernike eredeti mikroszkópjának felépítését mutatja, hanem csupán azt az elvet szemlélteti, ahogyan egy úgynevezett fázistárgyról intenzitásmodulált képet lehet leképezni [2, 3].

Az 1. ábrán az *FF* fényforrás  $\lambda$  hullámhosszúságú párhuzamos fénynyalábot bocsát ki, amely megvilágítja az *FT* fázistárgyat. Ez utóbbit azért nevezik így, mert az áthaladó fényből elvileg nem nyel el semmit, csupán pont-ról-pontra változó törésmutatójának megfelelően módosítja, vagyis az úgynevezett képtartalommal modulálja a fény fázisát.

A fény Helmholtz-féle hullámegyenletéből levezethető, hogy a párhuzamos fénynyalábbal így megvilágított *FT* fázistárgy minden egyes pontja úgy viselkedik, mint egy-egy önálló, pontszerű fényforrás [4–6], amelyek mindegyikéből eltérő fázisú és egymással interferáló gömbhullámok indulnak útnak az *f* fókusz távolságú *L1* gyűjtőlencse felé, s ezek az *SZ* szűrőn és az ugyancsak *f* fókusz távolságú *L2* gyűjtőlencsén keresztül a *K* képernyőre jutnak.

A geometriai optika klasszikus leképezési szabályai alapján egyszerűen belátható, hogy ha nem szerepelne a rendszerben az *SZ* szűrő, akkor a *K* képernyőn az *FT* tárgy fordított helyzetű képe jelenne meg [6].

A fáziskontraszton alapuló módszernél az *SZ* szűrő olyan optikai elem, melynek közepén piciny kerek folt

található, amely a rajta áthatoló fény fázisát  $\lambda/4$  mértékben eltolja („lambdanegyedes” szűrő), míg a szűrő többi része a fényt változtatás nélkül átengedi [3, 5].

Zernike felismerése az volt, hogy ezzel az egyszerű trükkal a fázistárgy fekete-fehér képként láthatóvá tehető. A trükk azonban bármennyire is pofonegyszerűnek látszik, mögötte mély fizikai és matematikai megfontolások húzódnak. Számos műszaki találmányra egyébként is jellemző, hogy utólag – amikor már feltalálták a megoldást – szinte magától értetődően egyszerűnek tűnik.

Vizsgáljuk meg, hogyan is működik az 1. ábra szerinti optikai elrendezés! Az *FT* tárgyat, amely általános esetben a megvilágító fénynyalábot fázisában és amplitúdójában egyaránt modulálja, úgynevezett világosságfüggvénnyel lehet jellemezni, amelynek formája:

$$g = g(\mathbf{r}), \quad (1)$$

ahol  $\mathbf{r}$  síkbeli helyvektort jelent, amelynek komponensei:

$$\mathbf{r} = (x, y). \quad (2)$$

Az  $\mathbf{r}$  helyvektor abszolút értéke:

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (3)$$

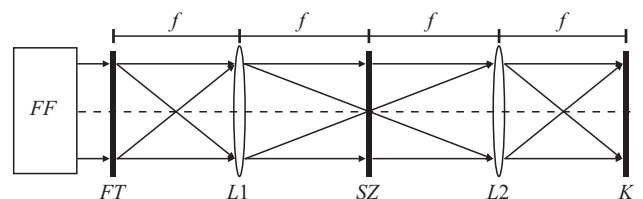
A világosságfüggvény értelmezési tartománya elvileg a teljes  $x$ - $y$  sík, azonban a tárgy határain kívül az értéke mindenütt zérus. A tárgy határain belül a  $g$  értéke általában esetben komplex szám, azaz:

$$g = |g| e^{j\varphi}, \quad (4)$$

ahol a világosságfüggvény  $g(\mathbf{r})$  abszolút értéke 0 és 1 között lehet, és megmutatja, hogy a kép  $\mathbf{r}$  helyvektorú pontjában a bejövő fény (mint elektromágneses hullám) amplitúdója milyen arányban változik, a  $\varphi(\mathbf{r})$  fázisszög pedig megmutatja, hogy a fázisa mekkora eltolódást szenved.

Az 1. ábrán vázolt optikai elrendezés úgynevezett lineáris optikai rendszer, vagyis definiálható hozzá egy  $w(\mathbf{r})$  súlyfüggvény, amelynek hatására a  $g(\mathbf{r})$  bemeneti világosságfüggvényből a *K* képsíkban  $b(\mathbf{r})$  kimeneti világosságfüggvény képződik [4, 7].

1. ábra. A fáziskontraszt kép – fázistárgyról intenzitásmodulált kép – készítésének elve.





A lineáris rendszer  $w(\mathbf{r})$  súlyfüggvényével azonos  $b(\mathbf{r})$  kimeneti kép a  $K$  képsíkban elvileg akkor jöhetne létre, ha az  $FT$  tárgy világosságfüggvénye az origóban elhelyezkedő térbeli Dirac-impulzus lenne, amely az alábbi határátmenettel definiálható:

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \exp[-N^2 \pi (x^2 + y^2)]. \quad (5)$$

Általános esetben a  $K$  képsíkban megjelenő  $b(\mathbf{r})$  kimeneti kép a bemeneti  $g(\mathbf{r})$  világosságfüggvény, valamint a  $w(\mathbf{r})$  súlyfüggvény konvolúciós integrálja:

$$b(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}) * w(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{u}) w(\mathbf{r} - \mathbf{u}) du_x du_y, \quad (6)$$

ahol az integrálban szereplő  $\mathbf{u}$  helyvektor komponensei:

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y). \quad (7)$$

A  $w(\mathbf{r})$  súlyfüggvény általában komplex függvény, vagyis

$$w = |w| e^{j\psi} \quad (8)$$

alakban fejezhető ki, ahol a  $w$  és  $\psi$  változók természetesen a helyvektor függvényei.

A már hivatkozott Helmholtz-féle hullámegyenletről viszonylag egyszerűen levezethető, hogy az *1. ábra* szerinti elrendezés esetén az  $SZ$  szűrő síkjába jutó fénynyaláb modulációja a  $g(\mathbf{r})$  világosságfüggvény térbeli Fourier-transzformáltja [4, 8], amely egy további komplexváltozós függvény, nevezetesen:

$$G(\mathbf{k}) = F[g(\mathbf{r})] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{r}) \exp(-2\pi j \mathbf{r} \mathbf{k}) dx dy, \quad (9)$$

ahol az  $SZ$  szűrő síkjában a  $\mathbf{k}$  térfrekvencia (hullámszám) vektor komponensei:

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y), \quad (10)$$

és a térfrekvencia skálázása olyan, hogy a  $\mathbf{k}$  térfrekvencia-vektort az  $SZ$  szűrő síkjában egy olyan  $\mathbf{p}$  helyvektor ábrázolja, amelyre igaz, hogy

$$\mathbf{p} = \mathbf{k} f \lambda, \quad (11)$$

ahol  $f$  az *1. ábra* szerinti gyűjtőlencsék fókusz távolsága,  $\lambda$  pedig az  $FF$  fényforrásból kilépő fény hullámhossza [4].

A  $\mathbf{k}$  térfrekvencia-vektor

$$k = |\mathbf{k}| \quad (12)$$

abszolút értéke megadja a térbeli frekvenciát (hullámszámot), a  $\mathbf{k}$  vektor iránya pedig megadja az  $SZ$  síkban a térbeli hullámfront haladási irányát, vagyis  $\mathbf{k}$  merőleges a hullámfrontra, s párhuzamos annak gradiensevel, a (9) szerinti  $G$  függvényérték pedig megadja, hogy a képen az illető térfrekvenciájú Fourier-komponenshez mekkora amplitúdó és fázisszög tartozik.

Valamely előírt  $w(\mathbf{r})$  súlyfüggvény az *1. ábra* szerinti elrendezésben úgy valósítható meg, hogy elhelyezzük az  $SZ$  szűrő síkjában a súlyfüggvény térbeli Fourier-transzformáltjának képét, amely a következő:

$$W(\mathbf{k}) = F[w(\mathbf{r})] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(\mathbf{r}) \exp(-2\pi j \mathbf{r} \mathbf{k}) dx dy. \quad (13)$$

Ekkor a  $K$  képsíkban kimeneti képként a bemeneti függvény és a súlyfüggvény 180 fokkal elfordított konvolúciós integrálja jelenik meg, ugyanis az  $L2$  lencse e két függvény Fourier-transzformáltjaink szorzatát a  $K$  képsíkba 180 fokkal elforgatva visszatranszformálja:

$$b(-\mathbf{r}) = F^{-1}[G(\mathbf{k}) W(\mathbf{k})] = g(\mathbf{r}) * w(\mathbf{r}). \quad (14)$$

Az inverz Fourier-transzformáció definíciója:

$$b(\mathbf{r}) = F^{-1}[H(\mathbf{k})] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(\mathbf{r}) \exp(2\pi j \mathbf{r} \mathbf{k}) dk_x dk_y. \quad (15)$$

Vegyük észre, hogy ez formailag megegyezik a Fourier-transzformáció (9) képletével, a különbség csak annyi, hogy az exponensben – helyett + jel szerepel, ami úgy is felfogható, hogy a helyvektor előjele megváltozik.

Az  $SZ$  szűrő átviteli együtthatója mindenütt egységnyi, kivéve az origót és annak szűk környezetét, ahol az átviteli együttható  $j$ , vagyis a képzetes egység, mivel ez jelenti a 90 fokos fázistolást.

Az *1. ábra* szerinti elrendezésből látszik, hogy ha az  $FT$  tárgysíkban nem lenne fázismoduláció, akkor az  $SZ$  szűrő síkjában a teljes fényenergia az origón és annak szűk környezetén haladna keresztül. Fázistárgy esetén is az origó környezetében halad át a fény túlnyomó része, ezért az origót és annak szűk környezetét közelítően egy térbeli Dirac-impulzusfüggvénnyel lehetne helyettesíteni, illetve, ha ott  $\lambda/4$  mértékű fázistolás is van, akkor ennek  $j$ -szerepével.

Ebben az esetben tehát a  $w(\mathbf{r})$  súlyfüggvény Fourier-transzformáltja a következő lesz:

$$W(\mathbf{k}) = F[w(\mathbf{r})] = 1 + j\delta(\mathbf{k}). \quad (16)$$

Maga a súlyfüggvény pedig ennek inverz Fourier-transzformáltja:

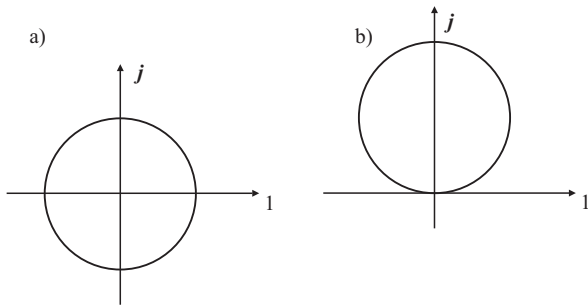
$$w(\mathbf{r}) = F^{-1}[W(\mathbf{k})] = \delta(\mathbf{r}) + j. \quad (17)$$

Legyen az  $FT$  tárgysíkban egy elvileg tökéletes fázistárgy, amelynek világosságfüggvénye:

$$g(\mathbf{r}) = e^{j\phi}, \quad (18)$$

vagyis csak fázismodulációja van, intenzitásmodulációja nincs. Ha egy ilyen fázistárgy lehetséges képpontjainak  $g$ -értékeiből képezhető halmazzal a komplex számsíkon ábrázoljuk, akkor egység sugarú kört kapunk, középpontjában az origóval (*2.a ábra*).

Ha képezzük egy ilyen bemeneti világosságfüggvény konvolúciós szorzatát a (17) szerinti súlyfüggvénnyel,



2. ábra. Tökéletes fázistárgy világosságfüggvénye (a) és annak kép-függvénye (b).

akkor a képfüggvény értékeinek halmaza a komplex számsíkon  $+j$  értékkel eltolódik (2.b ábra).

A bemeneti tárgyon a 2.a ábra szerint minden egyes tárgyponthoz tartozó amplitúdó éppen egységnyi volt, míg a kimeneti kép pontjainál a 2.b ábra szerint az amplitúdó 0 és 2 között változik. Mivel a fényesség (intenzitás) az amplitúdó négyzetével arányos, ezért ennek értéke 0–4 között lesz.

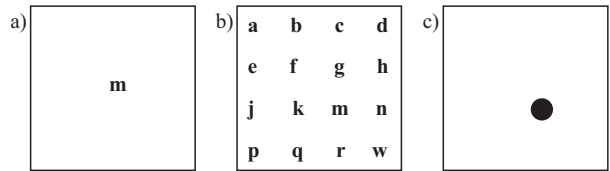
Érdeemes megemlíteni, hogy a fáziskontraszt-effektus a sokféle hullámhosszúságú komponensekből álló fehér megvilágító fényvel is működik, csak a kontraszthatás mérsékeltebb, ugyanis mindegyik hullámhossznál jelentkezik bizonyos mértékű fáziseltolás, még ha az nem is pontosan 90 fokos.

Zernike mikroszkópjának felépítése eltér attól, amit az 1. ábrán bemutatunk, hiszen nemcsak láthatóvá kellett tenni a fázistárgyat, hanem azt jelentősen fel is kellett nagyítani. Ennek megfelelően a tényleges fáziskontraszt-mikroszkópok különféle változatainál általában eltérő fókusztávolságú lencsákat alkalmaznak, és az 1. ábra szerinti elrendezés a kép nagyítása céljából még egy további úgynevezett szemlencsével (okulárral) egészül ki. Létezik olyan megoldás is, ahol az SZ szűrő síkjának közepén a lambdanegyedű szűrő helyett az origón áthaladó középső fényutat egyszerűen eltakarják, így a Fourier-transzformált zérus térfrekvenciához tartozó tagja kivonódik a képből, miáltal a 2.a ábra szerinti kör középpontja most is eltolódik – habár kisebb mértékben –, és így módon is fellép bizonyos mértékű fényességi kontraszthatás [5].

Az 1. ábra szerinti optikai elrendezésben rejülő műszaki lehetőségek ezzel még nem merültek ki, hiszen hasonló elrendezés alkalmazható képek összehasonlításánál is. Ha ugyanis az SZ síkban egy másik kép Fourier-transzformáltját helyezzük el szűrőként, akkor a kimeneti kép a bemeneti tárgy és a szűrőkép térbeli keresztkorrelációs függvénye lesz.

Legyen a bemeneti világosságfüggvény most is  $g(\mathbf{r})$ , a kimeneti kép  $b(\mathbf{r})$ , az összehasonlításul szolgáló mintakép  $m(\mathbf{r})$ . Fourier-transzformáltjaik rendre:  $G(\mathbf{k})$ ,  $H(\mathbf{k})$  és  $M(\mathbf{k})$ . Legyen az SZ síkban elhelyezve a minta  $M(\mathbf{k})$  Fourier-transzformáltja, de 180 fokkal elforgatva. A kimeneti kép ebben az esetben:

$$b(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}) * m(-\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{u}) m(\mathbf{u} - \mathbf{r}) du_x du_y. \quad (19)$$



3. ábra. Alakfelismerés folyamata: felismerendő tárgy (most betű)  $g(\mathbf{r})$  világosságfüggvénye (a),  $m(\mathbf{r})$  minta képek (b) és  $b(\mathbf{r})$  kimeneti kép (c).

(6) képlettel a (19) szerinti keresztkorrelációs integrált összevetve ugyanis belátható, hogy a térbeli keresztkorrelációs integrál csak a helyvektor előjelében tér el a térbeli konvolúciós integráltól.

Legyen a feladat például egy betű felismerése. A 3.a ábra szemlélteti a felismerendő betű  $g(\mathbf{r})$  függvényét, a 3.b ábra az  $m(\mathbf{r})$  minta képet, a 3.c ábra pedig a  $b(\mathbf{r})$  kimeneti képet. A 3.c ábrán fekete pöttyel jelöltük azt a helyet, ahol a kimeneti képen világos folt mutatkozik annak jelöl, hogy ezen a helyen található a minta képen az az ábra, amely a bemeneti tárggyal a legnagyobb korrelációt mutatja [3].

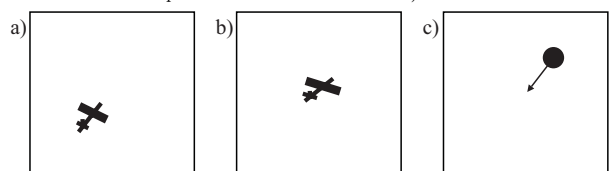
Alakfelismerési technikákat alkalmaznak például a katonai célú célkövetésben is. Itt azonban gyakran az a probléma merül fel, hogy a követendő céltárgy, például repülőgép vagy harckocsi síkbeli képe folyamatosan változik, annak megfelelően, ahogyan a céltárgy mozog, elfordul, illetve különféle manővereket végez.

Az ilyen probléma egyik lehetséges megoldása az, hogy a céltárgyról rendszeres időközönként, például tízedmásodpercenként pillanatfelvételt készítünk, majd ennek Fourier-transzformáltját helyezzük az SZ síkba, majd a következő mintavételi képet ehhez hasonlítjuk. A keresztkorreláció maximumhelye ilyenkor megmutatja, hogy a céltárgy milyen irányba mozdult el, s a célkövető berendezés irányát ennek megfelelően kell módosítani.

Legyen a feladat például az, hogy egy rakétával követni kell egy mozgó céltárgyat, például egy repülőgépet. A 4.a ábra mutatja, hogy mit lát pillanatnyilag a célkövető távcső, a 4.b ábra pedig azt, hogy mit látott egy mintavétellel korábban. A 4.c ábra mutatja a két kép keresztkorrelációját. Mivel a korrelációs maximum a 4.c ábrán jobbra felfelé mozdult el, ez azt jelenti, hogy a 4.a ábrán a cél nem a kép közepén van, hanem ahhoz képest balra és lefelé mozdult el.

Ennek alapján a célkövető távcsövet el kell mozdítani a 4.c ábrán feltüntetett nyílnak megfelelő irányban és mértékben azért, hogy a céltárgy ismét a távcső látóterének centrumába kerüljön, majd újabb pillanatfelvételt kell készíteni a céltárgy megváltozott képéről és ennek Fourier-transzformáltját el kell helyezni az SZ síkban.

4. ábra. A célkövetés folyamata: pillanatnyi kép (a), a korábbi mintavétellel származott kép (b) és e két kép keresztkorrelációja (c). E folyamat alapján kell igazítani a célratartás irányán és elkészíteni a követendő cél módosult képének Fourier-transzformáltját.



Ezzel egyidejűleg a célkövető rakéta pályáját és hossztengetyének irányát is úgy kell módosítani, hogy az párhuzamossá váljon a távcső hossztengetyével.

Egy ilyen berendezés tehát úgy működik, hogy igyekszik a *4.c ábra* szerinti fényes foltot a kimeneti képmező közepén tartani, s a rakétát ennek megfelelően vezérelni. Ehhez azonban az SZ síkban olyan eszközt kell elhelyezni, amely tárolni képes egy kép Fourier-transzformáltját, s ez nagy gyakorisággal elektronikus vagy optikai úton nagyon rövid idő alatt módosítható. Ilyen optikai eszközök jelenleg is léteznek, illetve kísérletezés és fejlesztés alatt állnak, egyrészt a folyadék-kristályos (LCD) technológia, másfelől pedig szerves molekulákra épülő úgynevezett bioinformatikai eszközök alkalmazásával. Ez utóbbiak képesek arra, hogy egy Fourier-kép fényességi és fázisinformációját közvetlen optikai elven nagyon rövid idő alatt, felülírható módon tárolják [9, 10].

Az ilyen és ehhez hasonló megoldások lehetőségének alapgondolata voltaképpen már benne volt Zernike találmányában. Nem tudhatjuk, hogy Zernike úgy dolgozta-e ki a találmányát, hogy a fentebbihez hasonló Fourier-analízist végzett, vagy pedig hosszadalmas kísérletek során alakult-e ki a megoldás, amely természetesen a fentebbi elemzéshez képest még számtalan műszaki részletkérdés megoldását is igényelte, az azonban bizonyos, hogy a találmánya korszakalkotó volt a hullámoptika gy-

korlati alkalmazásában. Könnyen elképzelhető, hogy ez a találmány hatással volt Gábor Dénes fantáziájára is a holográfia elméletének kidolgozásakor, és ötleteket adott a képi alakfelismerésben jelenleg alkalmazott módszerek kifejlesztéséhez, beleértve az olyan megoldásokat is, amelyeknél a képfeldolgozás optikai berendezések nélkül, pusztán a Fourier-optikai és holográfiai effektusokat szimuláló szoftverek segítségével történik.

#### Irodalom

1. VÉSZITS FERENCNÉ: *A Nobel-díjasok kislexikona* – Gondolat, Budapest, 1974
2. HÉJJAS ISTVÁN: *Analog optikai processzorok* – Mérés és Automatika, 1985/4
3. HÉJJAS ISTVÁN: *Az optikai információfeldolgozás módszerei és eszközei* – Műszeripari Kutatóintézet Közleményei, 1982/21
4. J.W. GOODMAN: *Introduction to Fourier Optics* – McGraw-Hill, 1968
5. L. LEVI: *Applied Optics, Volume 1* – John Wiley & Sons, New York, 1968
6. HORVÁTH JÁNOS: *Optika, elektromágneses fényelmélet* – Tankönyvkiadó, Budapest, 1966
7. T.S. HUANG: *Picture Processing and Digital Filtering* – Springer, New York, 1979
8. FODOR GYÖRGY: *Lineáris rendszerek analízise* – Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1967
9. R.R. BIRGE: *Protein-Based Computers* – Scientific American, March 1995
10. R. THOMA, N. HAMPP: *Real-time holographic correlation of two video signals by using bacteriorhodopsin films* – Optics Letters, 17/1992

## MEGEMLÉKEZÉSEK

# TISZTELGÉS A SIMONYI-FÉLE GYORSÍTÓÉPÍTŐ ISKOLÁNAK

Klopfér Ervin

Magyar Természettudományi Társulat

Mottó:

„dolgozni csak pontosan, szépen,  
ahogy a csillag megy az égen,  
úgy érdemes.”

József Attila: Ne légy szeles

A magyar szaksajtóban 2001–2004 között több cikk és megemlékezés látott napvilágot *Simonyi Károly* professzor életútjáról, úttörő munkásságáról a magyar részecskegyorsító berendezések tervezése és építése terén [1–11]. Ezek az írások részletesen felsorolják a *Simonyi gyorsító iskola* által megépített berendezéseket, ezek történetét, technikai paramétereit, de nem vagy alig tesznek említést azokról a személyekről, magyar iparvállalatokról, gyárról, üzemekről és intézetekről, akik/amelyek aktív közreműködésével ezek a berendezések megszülettek.

Jelen cikk mulasztást szeretne pótolni: a *soproni és budapesti* gyorsítókat létrehozó személyeknek, közösségeknek kíván köszönetet mondani és emléket állítani. Simonyi Károly professzor 2001 őszén hunyt el. Munka-

társai, iskolájának tagjai, munkájának folytatói közül számosan ma már nincsenek közöttünk. A berendezések között van, amelyik ma már kiállítási tárgy, tudománytörténeti emlék [3, 4, 7–10], van, amelyik ma is működik itthon vagy külföldön, és van, amelyik máig a magyar kísérleti fizikai kutatások magas kihasználtságú, kulcsfontosságú berendezése, mint a EG-2R jelű 5 MV-os Van de Graaff iongyorsító, az NIK jelű 450 kV-os nehézion-gyorsító, az SAFI jelű 150 kV-os ion-implanter, az NA-jelű 120 kV-os mobil neutrongenerátor (*1. ábra*) stb.

Simonyi Károly professzor humanista tudós és rendkívüli ember volt. Egyike volt az utolsó magyar *polibisztoroknak*, aki maradandót alkotott mind a természettudomány, mind a humán kultúra területén; életével és munkájával



1. ábra. Az NA-jellő, 120 kV-os mobil neutrongenerátor, aktivációs analitikai célokra

bizonyította, hogy az emberiség kultúrája egy és oszthatatlan. E sorok írója részesülhetett abban a kivételes szellemi élményben, hogy egyetemi tanítványa, tanszékének oktatója, kutatóintézeti munkatársa is lehetett, és részt vehetett a gyorsítók jelentős részének tervezésében, kivitelezésében, üzemeltetésében és fejlesztésében. Kimondhatatlan hálával tartozom Simonyi Károlynak, a tanárnak, tudósnak, tudományszervezőnek, vezetőnek és embernek. Fentiek okán éreztem úgy, hogy kötelességem emléket állítani egy kiváló tudományos–műszaki iskola szerepvállalóinak.

A Simonyi gyorsító iskola gyorsító berendezéseinek tervezésében, építésében, üzemeltetésében és fejlesztésében részt vevő 164 munkatárs (Sopron, MTA KFKI Atomfizikai Osztály, Gyorsító Üzem, RMKI Gyorsítóberendezések Osztálya, Gyorsítók Osztálya, KFKI SzFKI, KFKI MSZl Műszaki Főosztály, BME Atomfizikai Tanszék, Elméleti Villamosság-tan Tanszék) feje, keze és szíve benne volt az elmúlt 55 év e téren elért impozáns eredményeiben. Áldozatkész, magas tudományos és műszaki színvonalat képviselő munkájukért köszönet illeti mindnyájukat. Alfabetikus sorrendben (nagybetűsen kiemelve a közvetlenül Simonyi professzor mellett dolgozó kollégákat):

Diplomások (mérnökök, fizikusok, vegyészek):

BAY ZOLTÁN (Tungsram Rt., BME Atomfizikai Tanszék), SIMONYI KÁROLY (Sopron, BME Atomfizikai Tanszék, BME Elméleti Villamosság-tan Tanszék, KFKI Atomfizikai Osztály), ÁDÁM ANDRÁS, BALLA JÁNOS, BARNA ÁRPÁD (BME Elm. Vill. Tsz.), Bán Tamásné Kati, Berecz György, BERKES ISTVÁN, Bíró János, Bod László, Bürger Gábor, Csonka Ferenc, Csőke Antal, CZELLÁR KATALIN, DEMETER ISTVÁN, Dobrosz Marian, Egri Béla, Endrőczy Gábor, Erdélyi János (Tungsram Rt., KFKI Atomfiz. Oszt.), Erdélyiszky Zsigmond, ERŐ JÁNOS (Sopron, KFKI Atomfiz. Oszt.), Feith Pál, Gombos Péter, Gyalog Pál, Házkötő László, Horváth Béla, HREHUSS GYULA, KÁLMÁN GÁBOR, KARLOVITS JÓZSEF (Sopron), Királyhídi László, KLOPPER ERVIN (BME Elm. Vill. Tsz., KFKI), KOSTKA PÁL, Kótai Endre, Kovács István, Krafcsik István, LUX ANDRÁS (Sopron), MÉREY IMRE, MÉREY IMRÉNÉ ÁGI (BME Elm. Vill. Tsz.), Mészáros Zoltán, Molnár Béla, Nagy Barna, NAGY TIBOR, Németh Attila, Németh József, NESZMÉLYI ANDRÁS, PALLAGI DEZSŐ, PAPP GYÖRGY (BME Atomfizikai Tsz.), Páris Gyula, PÁSZTOR ENDRE, Pazonyi János, Péter István, PÓCS LAJOS, Pongrácz Csaba

(ELTE Atomfizikai Tsz., KFKI), Ránky Miklós, Riedl Péter, ROÓSZ JÓZSEF, Sauer Rudolf, SCHMIDT GYÖRGY, SIEGLER JÁNOSNÉ ÁGI, Seres Csaba, SZABÓ LÁSZLÓ, Szabó Zoltán, Szegő László, SZENTPÉTERY IMRE, Szulman Márton, Szunyovszky Andor, TÁRCZY-HORNOCH ZOLTÁN, Tóibisch Ferenc, VÁLYI LÁSZLÓ, Váradi József, VARGA GÉZA (BME Atomfizikai Tsz.), VARGA LÁSZLÓ, VÁRKONYI LAJOS, Venekei Attila, Veress Imre, Vértes Péterné Margit, ZSIGMOND GYÖRGY, Zwickl Zoltán.

Technikusok, műszerészek, üzemeltetők, technológusok, szerkesztők, rajzolóok, kooperátorok, szakmunkások, laboránsok, adminisztrátorok:

Alföldi Ferenc, B. Nagy Sándor, Balázs Árpád, Baranyi Ferenc, Baranyi Ferencné Marcsi, Belányi Béla, Benke József, Benkő Tibor, Békési György, Békési Györgyné Zsóka, Boda Imre (BME Atomfizikai Tsz.), Bóday Csaba, Borsos József, BOZÓ IRÉN, Budai Géza, Cserge Lajos, Csikós József, Csillag András, Czúgler Alajosné Éva, Deme Sándorné Teri, Farkas László, Ferenczik Imre, Forgács Tibor, Földiák Iván, Gábor Imre, Gazdácska Ferenc, GÖLEN KÁROLY, GRÜBER HUGÓ, Hamar Károly, HAUER ALFRÉD (Sopron), Hegedűs Ernő, Hegyi Jenő, Holczer György, Horeczky László, HORN EMIL, HORVÁTH ISTVÁN (Sopron), JÉCSY KÁROLY, KAPELLÁRÓ JÓZSEF, KARLOVITS JÓZSEFNÉ LINKA ERZSÉBET (Sopron), Kárpáti Mibályné Edit, Kátsik László, Ketskeméti Józsefné Ili, KERTÉSZ IMRE, Kiss János, KOSTYÁL LÁSZLÓ, Kovács Józsefné Lenke, Kovács Mariann, Kurucz Béla, LÁNG TIBOR, LEMÁK GYÖRGY, ifj. Lemák György, Lieb Hedvig, MAGYAR JÁNOS, Meskó András, Meskó Andrásné Gyimesi Mária, Monori Jenőné Edit, Morassi László, Najden Ferenc, Nemoda Ferenc, Novák Endre, Nyitrai Zoltánné Marika, Orgoványi Frigyes, Paczolai Jenő, Repka Lajos, Rithnovszky Csaba, Rithnovszky Csabáné Simon Zsuzsa, RÓSA ANTAL, Schmidt György, Schmidt Görgyné Éva, Simon Tiborné Ági, Szabó István, Szabó Zoltán, SZÉCHENYI BEÁTA (Sopron), Széll László, SZÜCS JÁNOS, TALLÓS GYÖZÖ, TONELLI MIKLÓS, Tóth Kálmánné Márta, Tuscher István, Uglík Ernő, Végh Ottó, Voczelka Ferenc, Waizinger József, Zelena László, Zs. Tóth Sándor.

Meg kell említenünk, hogy Magyarországon a gyorsító-építés másik központja Debrecen, ahol az MTA Atommagkutató Intézetében (ATOMKI) és a Kossuth Lajos Tudományegyetem (KLTE) Kísérleti Fizikai Tanszékén épültek különböző típusú részecskegyorsítók (2 MV-os szabadtéri Van de Graaff generátor, neutrongenerátorok, kaszkádgenerátor, 5 MV-os nyomás alatti Van de Graaff iongyorsító [1971] és a Szovjetuniótól vásárolt ciklotron; utóbbi 1985-ben állt üzembe). A debreceni gyorsító iskola meghatározó személyiségei: Szalay Sándor, Csikai Gyula, Koltay Ede, Kiss Árpád Zoltán professzorok, Papp István, Bobátka Sándor, Angeli István, Bornemiszné Pauspertl Panna, Kiss Ildikó, Máthé György, Nagy János, Berecz István és még sokan mások.

A soproni és budapesti gyorsító berendezések létrehozásában részt vevő hazai iparvállalatok, gyárak, üzemek és intézetek:

Lenin Kohászati Művek, Láng Gépgyár, Csepel Vas- és Fém-művek, Ganz Villamossági Művek, BHG, Híradótech-



nikai Vállalat, Audió, EVIG Egyesült Villamosgépgyár, Kismotor- és Gépgyár, Szerszám gép Fejlesztési Intézet (Halásztelek), Pestvidéki Gépgyár (Szigethalom), Ikladi Műszeripari Művek (IMD), Kőbányai Vas- és Acélöntőde (KÖVAC), ERŐTERV, Emelőgépgyár, Karcagi Üveggyár, Tungsram Egyesült Izzólámpa és Villamossági Rt., Kontakta, Állami Pénzverde, Vákuumtechnikai Gépgyár, Vasipari Kutatóintézet, Magyar Optikai Művek (MOM), Magyar Kábel Művek (MKM), Magyar Selyemipari Vállalat, MEDICOR, Röntgen Javító és Szerelő Vállalat, Gördülő-csapágó Művek (GÖCS, Debrecen), Budapesti Kőolajipari Vállalat, PEMÜ Műanyagipari Rt. (Solymár), Kenéstechnikai Intézet, Reanal Finomvegyszergyár Rt.

Köszönet segítségükért és szakszerű munkájukért. Akik/amelyek fenti felsorolásokból esetleg kimaradtak volna, azoktól ezúton kérek szíves elnézést.

## A FIZIKA TANÍTÁSA

# ISMÉT FÖLDKÖZELBEN A MARS!

Pálfalvi László

MTA PTE Nemlineáris Optikai és Kvantumoptikai Kutatócsoport  
PTE, Kísérleti Fizika Tanszék

A bolygók mozgása régóta foglalkoztatja az emberiséget. Kepler a XVII. században tapasztalati úton állította fel a bolygómozgás törvényeit. Később Newton Kepler eredményeit felhasználva eljutott az általános tömegvonzás törvényéig (Newton-féle gravitációs törvény). Tudjuk jól, hogy ez az út fordítva is járható, a Newton-féle gravitációs törvényből következnek Kepler törvényei. Noha Kepler törvényei már több száz évesek, a 60-as, 70-es években több cikk is megjelent a Kepler-problémával kapcsolatban. Györgyi Géza elsősorban a Kepler-probléma szimmetriáival foglalkozott. A Kepler-mozgás geometriai szemléltetésével kapcsolatban is jelentek meg publikációk. Ezek közül ugyancsak Györgyi Géza cikkét [1] emelném ki, amelyben leírtak segítséget nyújtanak jelen cikk kitűzött problémájának megoldásához, melyre hagyományos módszerekkel csak komolyabb erőfeszítések árán nyílik lehetőség. Az utóbbi években ismét fellendült az érdeklődés a bolygómozgás problémaköre iránt. P.A. Horváthnak jelentek meg ilyen vonatkozású írásai, melyekben egy konkrét probléma kapcsán, mindjárt a módszer alkalmazását is bemutatta.

Jelen cikkben két bolygó (konkrétan a Föld és a Mars) távolságának az időtől való függését vizsgáljuk. A bemutatott módszerrel lehetőség nyílik a közelállások időpontjainak megjóslására. A számítások során néhány egyszerűsítő közelítést használunk, ugyanis a cikk célja nem a maximális pontosságra való törekvés (ez a csillagászok feladata), hanem egy fizikai módszer alkalmazásának bemutatása.

Irodalom:

1. JÉKI LÁSZLÓ: *KFKI* – MTA KFKI és Arteria Studio, Budapest, 2001
2. KESZTHELYI LAJOS: *Simonyi Károly 1916–2001* – Fiz. Szemle 51 (2001) 322
3. STAAR GYULA: *A soproni részecskegyorsító. Beszélgetés Simonyi Károllyal* – Természet Világa 132/12 (2001)
4. KOSTKA PÁL: *Részecskegyorsítók Sopronban és Budapesten* – Híradástechnika 47/4 (2002) 23–27
5. CSURGAYNÉ ILDIKÓ: *Simonyi Károly professzor emeritus, akadémikus, 1916–2001* – Híradástechnika 47/4 (2002) 3–8
6. KESZTHELYI LAJOS: *Simonyi Károly...* – Fiz. Szemle 53 (2003) 45
7. KOSTKA PÁL: *Simonyi Károly gyorsítói* – Fiz. Szemle 53 (2003) 49
8. KLOPPER ERVIN: *Simonyi Károly és a magyar részecskegyorsítók* – Fiz. Szemle 54 (2004) 204–206
9. KOSTKA PÁL: *A hazai fizikátörténet jeles emléke* – Természet Világa 135 (2004) 482–484
10. KLOPPER ERVIN: *Simonyi Károly professzor és a magyarországi részecskegyorsító-berendezések* – Informatika 24 7/5 (2004) 5–29
11. KLOPPER ERVIN: *Tisztelet a gyorsítóépítőknek* – Élet és Tudomány Online (2005. 03. 23)

## A Föld és a Mars távolságának vizsgálata

A Mars Földhöz legkedvezőbb közeli állapotainak időbeli periodicitása az évtizedes skálán figyelhető meg. Ez legutóbb 2003. augusztus 27-én következett be. Az ilyen események megjóslásához a két bolygó egymástól mért távolságának az időfüggését kell ismernünk. Vizsgáljuk meg, hogy a mechanika törvényeiből kiindulva erre milyen lehetőség adódik!

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a bolygók keringési síkja egybeesik (ez Naprendszerünk bolygói esetén jó közelítéssel igaz is, különösen a Föld és a Mars esetén)! Ha nem élünk ezzel a feltevéssel, csupán technikailag lesz kissé komplikáltabb a számítás, elvi nehézségbe nem ütközünk. A Napot tekintsük nyugvónak és csak a Nap–bolygó kölcsönhatásokat vegyük figyelembe!

## A Föld pályáját körrel közelítve

Tegyük fel, hogy a Föld körpályán, a Mars ellipszispályán kering a Nap körül! Ez jó közelítéssel igaz is, hiszen a Mars pályájának az excentricitása  $\epsilon_M = 0,093$ , míg a Földé  $\epsilon_F = 0,017$ .

Ezen feltevésekkel élve az adott bolygó  $N$  impulzusmomentuma (pontosabban annak nagysága) és  $E$  energiája mozgásállandó:

$$N = m r^2 \dot{\phi}, \quad (1)$$

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \gamma \frac{mM}{r}. \quad (2)$$

Az (1) és (2) egyenleteket felhasználva

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{N}{m r^2}, \quad (3)$$

illetve

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left( E + \gamma \frac{mM}{r} - \frac{N^2}{2 m r^2} \right)} \quad (4)$$

adódik. Ennél a pontnál a tankönyvek hangsúlyozzák, hogy a (3) és (4) egyenletekből  $r(t)$  és  $\varphi(t)$  nem határozható meg zárt explicit alakban. Viszont az idő eliminálásával az

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \quad (5)$$

pálya származtatható, ahol ( $E < 0$  esetén)  $p = b^2/a = a(1 - \varepsilon^2)$  az ellipszis paramétere,  $\varepsilon$  az excentricitása,  $a$  és  $b$  a fél nagy-, illetve fél kistengely hossza. Az (1) és (5) egyenletek felhasználásával  $t$ -nek a  $\varphi$ -től való függése megadható

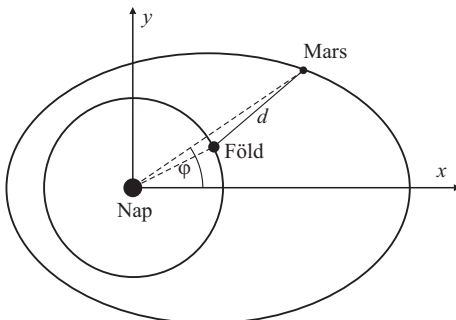
$$t(\varphi) = \frac{m}{N} \int_{\varphi_0}^{\varphi} r(\varphi')^2 d\varphi' \quad (6)$$

módon. A (6) integrál ugyan zárt alakban nem adható meg, de numerikus módszerrel meghatározható a  $t(\varphi)$  kapcsolat. Ennek az inverz függvénye a számunkra érdekes  $\varphi(t)$ , ahonnan  $r(t)$  (5) ismételt felhasználásával meghatározható, tehát a koordináták időfüggése ismertté válik.

Most visszatérhetünk az eredeti problémához, a Föld–Mars távolságának időbeli vizsgálatához. A (6) egyenlettel az időt a Mars  $\varphi$  koordinátájával paraméterezzük, és ez a  $\varphi$  fogja az időn keresztül a Föld helyzetét is paraméterezni. Vegyünk fel egy derékszögű koordináta-rendszert (1. ábra) a pályák síkjában, melynek origója a Nap. A keringési időket jelöljük  $T_F$ -fel, illetve  $T_M$ -mel, a Föld szögsebessége pedig  $\omega_F = 2\pi/T_F$ . A Mars impulzusmomentumának és területi sebességének kapcsolata:

$$N = 2 m \frac{\pi a b}{T_M} = 2 m \frac{\pi a^2 (1 - \varepsilon^2)^{1/2}}{T_M}. \quad (7)$$

1. ábra. A Föld és a Mars pályája Napközéppontú koordináta-rendszerben. A Föld pályáját körrel közelítjük.



A  $t = 0$  időpillanatban a Mars legyen  $\varphi_0$  fázisú állapotban! Az (5) és (7) összefüggéseket (6)-ban figyelembe véve az időre, mint a  $\varphi$  koordináta függvényére

$$t(\varphi) = \frac{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}{2\pi} T_M \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{1}{(1 - \varepsilon \cos \varphi')^2} d\varphi' \quad (8)$$

adódik. A Mars Descartes-koordinátái:

$$x = r(\varphi) \cos \varphi, \quad (9)$$

$$y = r(\varphi) \sin \varphi. \quad (10)$$

A Föld mozgása egyenletes körmozgás, tehát az  $X$  és  $Y$  koordinátái egyszerűen meghatározhatók az idő függvényében, azaz közvetlenül a Mars  $\varphi$  koordinátájának segítségével:

$$X[t(\varphi)] = R \cos(\omega_F t(\varphi) + \Phi_0), \quad (11)$$

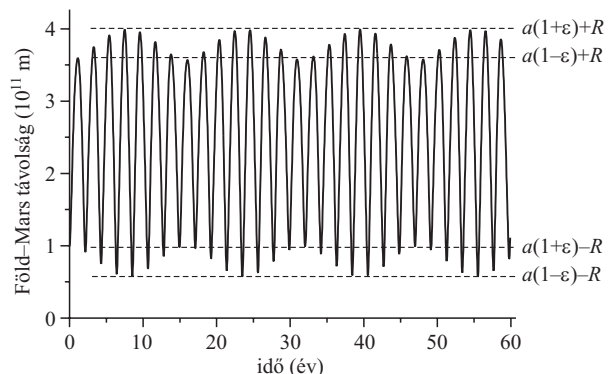
$$Y[t(\varphi)] = R \sin(\omega_F t(\varphi) + \Phi_0), \quad (12)$$

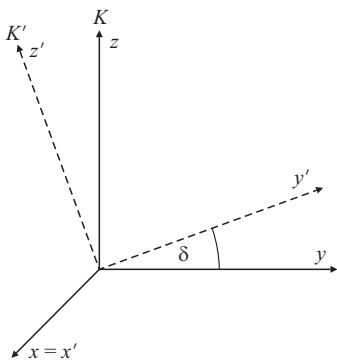
ahol  $R$  a körpálya sugara, és a  $t = 0$  időpillanatban a  $\Phi_0$  fázisú állapotban van. A két bolygó távolsága pedig:

$$d[t(\varphi)] = \sqrt{(X[t(\varphi)] - x[t(\varphi)])^2 + (Y[t(\varphi)] - y[t(\varphi)])^2}. \quad (13)$$

A probléma megoldásának a kulcsa tehát az, hogy a Mars  $\varphi$  koordinátájával tudjuk paraméterezni mind az időt, mind pedig a bolygók távolságát. Ezáltal minden  $t$  időpillanathoz hozzá tudjuk rendelni a  $d$ -t, ahol a két mennyiség a  $\varphi$  paraméteren keresztül kapcsolódik össze. Érdekes valós adatokat ( $a = 2,88 \cdot 10^{11}$  m,  $T_M = 1,881 \cdot T_F$ ,  $\varepsilon = 0,093$ ,  $R = 1,5 \cdot 10^{11}$  m) felhasználva ábrázolni a bolygók távolságát az idő függvényében. Erre alkalmas számítógépes szoftverek például a MathCad, illetve a Maple. A 2. ábrán a Föld–Mars távolság látható az idő függvényében  $\varphi_0 = \Phi_0 = 0$  kezdőfázisok esetén. A vízszintes tengelyen az időt (8) alapján), a függőleges tengelyen a bolygók távolságát (13) szerint) mérjük. A körülbelül 2 év periódusú oszcillációt alulról is és felülről is egy körülbelül 16 év periódusú burkoló modulálja. A bolygótávolság–idő függvénynek nem szimmetriatranszformációja a burkoló

2. ábra. A Föld–Mars távolság az idő függvényében. A Föld pályáját körrel közelítettük.





3. ábra. A valóságos bolygómozgás az  $x$ - $y$  síkban történik, a segédkör az  $x'$ - $y'$  síkban helyezkedik el.

periódusidejével való eltolás, ahogy az a 2. ábrán látszik is. A függvény alsó és felső korlátja a kör és az ellipszis azon két-két pontjának távolsága, melyek egymáshoz legközelebb, illetve legtávolabb esnek.

### Mindkét bolygó Kepler-mozgást végez

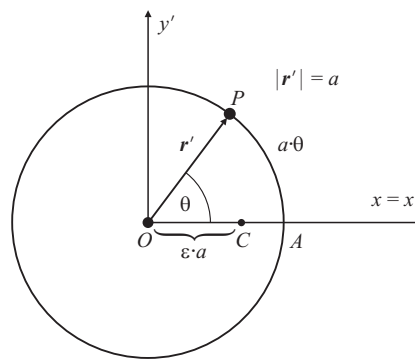
A továbbiakban vizsgáljuk ugyanezt a problémát abban az esetben, amikor mindkét bolygó ellipszispályán mozog! (8)-hoz hasonló módon az időt fejezzük ki az egyik bolygó, például a Föld  $\varphi_F$  koordinátájának segítségével! Folytatva az előző gondolatmenetet ezután meg kellene határozni a Mars helyzetét ( $\varphi_M$ ) az idő függvényében. Ez körmozgás esetén könnyen ment, elliptikus mozgás esetén viszont a  $\varphi_M(t)$  függvénykapcsolatot nem tudjuk megadni, csak  $t(\varphi_M)$ -t, hasonlóan, mint (8)-ban tettük. Így azt tehetjük, hogy a (8) összefüggéssel kiszámolt  $t(\varphi_F)$  és  $t(\varphi_M)$  időket egyenlővé tesszük:

$$\frac{(1 - \varepsilon_F^2)^{3/2}}{2\pi} T_F \int_{\varphi_{of}}^{\varphi_F} \frac{1}{(1 - \varepsilon_F \cos \varphi'_F)^2} d\varphi'_F = \quad (14)$$

$$\frac{(1 - \varepsilon_M^2)^{3/2}}{2\pi} T_M \int_{\varphi_{om}}^{\varphi_M} \frac{1}{(1 - \varepsilon_M \cos \varphi'_M)^2} d\varphi'_M,$$

ezáltal  $\varphi_F$  és  $\varphi_M$  között relációt kapunk. Ez nyilván megint csak egy implicit függvénykapcsolat, de a probléma elvileg megoldott. Adott pillanatban tehát tudjuk, hogy hol van a Föld ( $\varphi_F$ ), illetve a Mars ( $\varphi_M$ ). A probléma csak az, hogy ez a számolás meglehetősen bonyolult és időigényes.

Az alábbiakban olyan gondolatmenetet ismertetünk, amely lényegesen leegyszerűsíti és meggyorsítja a számolás menetét. A megoldás alapja az, hogy minden Kepler-mozgás származtatható egy körmozgásból. Elsődleges lépés, hogy az adott Kepler-mozgáshoz meghatározzuk a körpályát, illetve a körmozgás időbeli lefolyását. Vegyünk fel egy  $K$  koordináta-rendszert, az  $x$ ,  $y$  és  $z$  tengelyek irányába mutató egységvektorokat jelöljük  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ , illetve  $\mathbf{e}_3$ -mal! Vegyünk fel egy másik,  $K'$  koordináta-rendszert (egységvektorai  $\mathbf{e}'_1$ ,  $\mathbf{e}'_2$ , és  $\mathbf{e}'_3$ ), melynek origója és  $x'$  tengelye egybeesik  $K$  origójával és  $x$  tengelyével. A  $K'$  rendszer a közös tengely körül legyen  $\delta$  szöggel ( $0 \leq \delta \leq \pi/2$ ) elforgatva a 3. ábrán látható módon! Legyen  $\sin \delta = \varepsilon$ , aminek indokoltsága hamarosan világos



4. ábra. Az  $a$  sugarú segédkörön mozgó  $P$  pont  $x$ - $y$  síkra vett vetülete a Kepler-mozgás.

lesz. Mozogjon egy  $P$  pont a  $K'$  rendszer  $x'$ - $y'$  síkjában origó középpontú,  $a$  sugarú körön, lásd a 4. ábrát! Jelöljük  $\theta$ -val azt a szöveget, amelyet az  $O$ -ból a  $P$  pontba húzott  $\mathbf{r}'$  helyvektor az  $x'$  tengellyel bezár! Ekkor

$$\mathbf{r}' = \mathbf{e}'_1 a \cos \theta + \mathbf{e}'_2 a \sin \theta. \quad (15)$$

Az  $x'$ - $y'$  síkban körpályán mozgó  $P$  pontot vetítsük merőlegesen a  $K$  rendszer  $x$ - $y$  síkjára! Az így kapott  $Q$  pont  $K$ -beli koordinátái:

$$x = \mathbf{e}_1 \mathbf{r}' = \underbrace{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}'_1}_{1} a \cos \theta + \underbrace{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}'_2}_{0} a \sin \theta = a \cos \theta, \quad (16)$$

$$y = \mathbf{e}_2 \mathbf{r}' = \underbrace{\mathbf{e}_2 \mathbf{e}'_1}_{0} a \cos \theta + \underbrace{\mathbf{e}_2 \mathbf{e}'_2}_{\cos \delta} a \sin \theta = a \sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \theta = b \sin \theta \quad (17)$$

Mivel az  $x$ ,  $y$  koordinátákra teljesül az  $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$  összefüggés, látszik, hogy az alkalmasan megválasztott ( $R = a$ ,  $\sin \delta = \varepsilon$ ) körpálya merőleges vetülete  $a$  fél nagys- és  $b$  fél kistengelyű ellipszis. Most már csak az a kérdés, hogy hogyan kell a  $P$  pontnak mozognia (azaz  $\theta$  milyen függvénye legyen az időnek), hogy a  $Q$  pont Kepler-mozgást végezzen? A 4. ábrán látható  $O$  pont az  $a$  sugarú segédkörnek és az ellipszisnek is a középpontja,  $C$  a centrum (az ellipszis fókuszpontja). Az  $O$  és a  $C$  pont rajta van az  $x$ , illetve  $x'$  tengelyeken. A Kepler-mozgás területi sebességének állandósága azt jelenti, hogy a  $C$ -ből a bolygóhoz ( $Q$ -hoz) húzott vezérsugár azonos idők alatt azonos területeket sűrol. A merőleges vetítés tulajdonságából következik, hogy ennek a  $CP$  vezérsugárra is igaznak kell lennie, a területi sebességek csak egy  $\cos \delta$  faktorban különböznek (ahol  $\delta$  a két szóban forgó sík normálisa által bezárt szög). Legyen a  $P$  pont (és egyben a  $Q$  pont is) a  $t = 0$  időpillanatban a kör és az  $OC$  egyenes  $A$  metszéspontjában! A területi sebesség állandósága miatt a  $CAP$  síkidom területének az idővel arányosan kell változnia! Ez a terület viszont nem más, mint

az  $OAP$  körcikk  $\frac{1}{2}\theta a^2$  területének és az  $OCP$  háromszög  $\frac{1}{2}\varepsilon a^2 \sin\theta$  területének a különbsége. Mivel a  $CAP$  terület változási gyorsasága  $a^2\pi/T = \frac{1}{2}a^2\omega$ , ezért

$$\frac{1}{2}\theta a^2 - \frac{1}{2}\varepsilon a^2 \sin\theta = \frac{1}{2}a^2\omega t,$$

azaz

$$\theta - \varepsilon \sin\theta = \omega t, \quad (19)$$

ahol  $\omega$  nem más, mint a bolygó ( $Q$  pont) átlagos szögsebessége. Ha a  $t = 0$  időpillanathoz  $\theta_0$  szög tartozik, akkor

$$\theta - \varepsilon \sin\theta - (\theta_0 - \varepsilon \sin\theta_0) = \omega t. \quad (20)$$

Térjünk vissza a Föld és a Mars esetéhez! Mindkét bolygóhoz rendeljük hozzá a segédkört,  $t = 0$ -ban a bolygópozíciók által meghatározott  $\theta$  koordináták legyenek  $\theta_{OF}$  és  $\theta_{OM}$ ! Írjuk fel a (20) egyenletet a segédkörökön történő mozgásra, melyekből a  $\theta_F$  és  $\theta_M$  között – noha expliciten nem kifejezhető, de – viszonylag egyszerű kapcsolat adódik:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_F} [\theta_F - \varepsilon_F \sin\theta_F - (\theta_{OF} - \varepsilon_F \sin\theta_{OF})] = \\ \frac{1}{\omega_M} [\theta_M - \varepsilon_M \sin\theta_M - (\theta_{OM} - \varepsilon_M \sin\theta_{OM})]. \end{aligned} \quad (21)$$

A bolygók helyzete közti kapcsolat vizsgálatára ez lényegesen könnyebben kezelhető, mint a (14) egyenletbeli összefüggés. Igaz, hogy (21)-ben a kapcsolat nem a keringési síkbeli polárkoordináták között van értelmezve, de a vetítéseket megtéve még mindig lényegesen egyszerűbb a dolgunk, mintha a (14) összefüggést használnánk. A merőleges vetítést kell tehát elvégeznünk (16) és (17)-nek megfelelően, hogy a két bolygó helyzetét megkapjuk a  $K_F$  és  $K_M$  koordináta-rendszerekben (lásd 5. ábra).  $K^*$ -ban és  $K^{**}$ -ban való megadáshoz az eltolási transzformációt kell megtenni. Ezekben a rendszerekben a bolygópozíciókra kapjuk:

$$x_F^* = a_F (\cos\theta_F + \varepsilon_F), \quad (22)$$

$$y_F^* = b_F \sin\theta_F, \quad (23)$$

$$x_M^{**} = a_M (\cos\theta_M + \varepsilon_M), \quad (24)$$

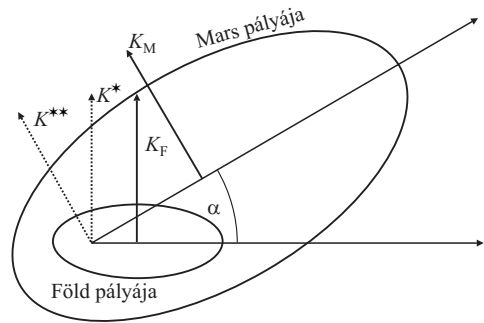
$$y_M^{**} = b_M \sin\theta_M. \quad (25)$$

A Mars helyzetének  $K^*$ -ban való megadáshoz egy forgatási transzformációt kell még végrehajtani:

$$x_M^* = x_M^{**} \cos\alpha - y_M^{**} \sin\alpha, \quad (26)$$

$$y_M^* = x_M^{**} \sin\alpha + y_M^{**} \cos\alpha. \quad (27)$$

A (21)–(27) egyenletek felhasználásával lehetővé vált a bolygók távolságának a paraméterezése a Föld  $\theta_F$  koordinátájával. Az időt is, és a bolygók távolságát is kifejezhetjük  $\theta_F$  segítségével:



5. ábra. A bolygók helyzetét először a  $K_F$  és  $K_M$ , majd a  $K^*$  és  $K^{**}$  rendszerekben adjuk meg. Innen egy forgatási transzformációval a Mars helyzete is megadható a  $K^*$ -ban.

$$t = \frac{1}{\omega_F} [\theta_F - \varepsilon_F \sin\theta_F - (\theta_{OF} - \varepsilon_F \sin\theta_{OF})], \quad (28)$$

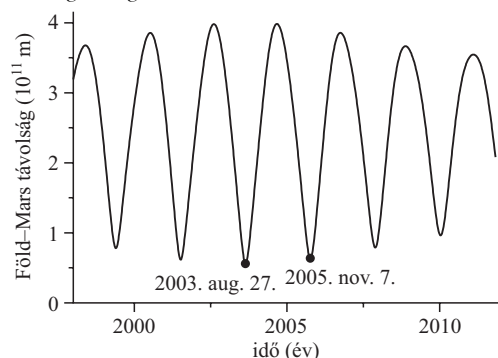
$$d = \sqrt{(x_F^* - x_M^*)^2 + (y_F^* - y_M^*)^2}. \quad (29)$$

Most már elkészíthető a  $d(\theta_F) - K(\theta_F)$  grafikon, és nyomon lehet követni a két bolygó távolságát az idő függvényében. Meg kell azt a nem utolsó gyakorlati szempontot is jegyeznünk, hogy ezzel a módszerrel több nagyságrenddel rövidebb a számolási idő, mintha a (14) egyenletet használtuk volna fel a bolygópozíciók kapcsolatának meghatározásához.

A Mars–Föld távolság meghatározásához (6. ábra) felhasználtuk a bolygók keringési időinek, nagytengelyeinek és excentricitásainak értékeit. Felhasználtuk továbbá, hogy a nagytengelyek által bezárt szög (5. ábra)  $\alpha = 232^\circ$ , valamint hogy  $\theta_{OF} = 178,4^\circ$ , illetve  $\theta_{OM} = 175,92^\circ$ . Ez utóbbi két mennyiséget az 1998. évi *Csillagászati Évkönyv*-ben közzétett adatokból számoltuk, 1998. január 1-jét választva  $t = 0$ -nak. A görbe segítségével néhány nap eltéréssel meghatározható a 2003. augusztus 27-i nevezetes esemény, amikor is a Föld és a Mars lehető legközelebb került egymáshoz. A pár nap pontatlanság egy ilyen időskálán lejátszódó esemény esetében elenyészőnek számít. A grafikonról leolvasható a következő lokális minimum is, amely 2005. november 7-én fog bekövetkezni.

Modellünkben a nagytengelyek által bezárt  $\alpha$  szöget időben állandónak tekintettük, ugyanis ez egy időben igen lassan változó mennyiség. Ezenkívül a pályasíkok

6. ábra. A Föld–Mars távolság az idő függvényében. A Föld is és a Mars is Kepler-mozgást végez.





hajlásszögét zérusnak vettük, hogy további koordináta-transzformációkat spóroljunk meg. Ennek csupán didaktikai oka volt: jobban tudunk a mondanivaló lényegére fókuszálni.

## Összefoglalás

Kepler-mozgásnál a bolygó pozícióját az idő függvényében megadni nem magától értetődő feladat. Explicit alakban nem is adhatók meg az  $r$  és  $\varphi$  koordináták az idő függvényében. Ez azt vonja maga után, hogy számos kérdés megválaszolása (pl. két bolygó távolságának a nyomon követése) nehézségekbe ütközik. Érdekes – és szempontunkból szerencsés – tény, hogy minden Kepler-mozgáshoz rendelhető egy körmozgás, melynek időbeli lefolyása nem túl bonyolult. Ezzel a segédeszközzel két bolygó pozíciója közt egyszerű kapcsolat teremthető, távolságuk időfüggése könnyedén számolható.

## Irodalom

1. GYÖRGYI GÉZA: *A Kepler-mozgás és a gravitációs törvény* – Fiz. Szemle 21 (1971) 205
2. GYÖRGYI GÉZA: *A Kepler-problémáról* – Fiz. Szemle 15 (1965) 74
3. GYÖRGYI GÉZA: *A Kepler-probléma „rejtett” szimmetriáiról* – Fiz. Szemle 18 (1968) 142
4. BALÁZS BÉLA: *Csináljuk egyszerűbben!* – Fiz. Szemle 14 (1964) 158
5. P.A. HORVÁTHY: *Bolygómozgásról – egy régi versenyfeladat kapcsán* – Fiz. Szemle 11 (2003) 405
6. P.A. HORVÁTHY: *Bolygómozgás és geometria I.* – Fiz. Szemle 55 (2005) 48
7. P.A. HORVÁTHY: *Bolygómozgás és geometria II.* – Fiz. Szemle 55 (2005) 264
8. VERMES MIKLÓS: *A Kepler-féle bolygópályák szerkesztése* – Fiz. Szemle 14 (1964) 123
9. HRASKÓ PÉTER: *Elméleti mechanika* – Egyetemi tankönyv, PTE, 1995
10. BUDÓ ÁGOSTON: *Mechanika* – negyedik kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1965
11. *Csillagászati Évkönyv 1998* – Magyar Csillagászati Egyesület, Budapest, 1997
12. *Csillagászati Évkönyv 2005* – Magyar Csillagászati Egyesület, Budapest, 2004
13. <http://www.macsed.ngo.hu/z812.htm>

## MINDENTUDÁS AZ ISKOLÁBAN

# HOGYAN ÁRNYÉKOLHATÓ LE A MOBILTELEFON?

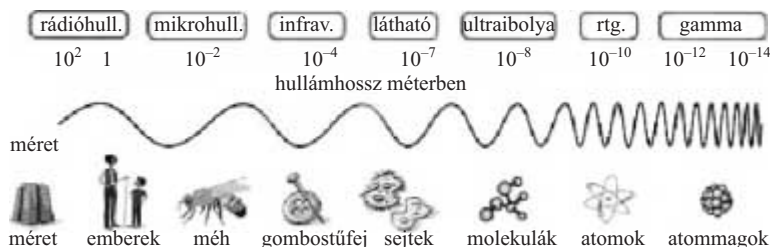
A közmondás szerint „más kárán tanul az okos”. Ha jól megvizsgáljuk ennek a mondásnak a gyakorlati megvalósulását, észrevehetjük, hogy más kárán ritkán tanulunk, az vésődik csak be igazán tudatunkba, amit magunk tapasztalunk, magunk élünk át, amelyet személyes tapasztalattal szereztünk. Hasonló a helyzet a tanulással is. Az elmondott szöveget elhihetjük, jól megtanulhatjuk, de csak akkor válik igazi sajátunké, ha sok tapasztalat révén kapcsolatot teremtünk az elmondottak és az átélt események között. Regények olvasásakor is beleéljük magunkat a szereplő helyébe, és közben felöltik gondolatunkban az az élmény, amely hasonlóságot mutat a szereplő által megélttel.

Hasonló a helyzet a fizikával is. Megtanuljuk a törvényeket, tudjuk *Newton* megállapításait, *Buridan* és *Galilei* által megfogalmazott tehetetlenséget, de csak akkor válik igazán magunkévá, ha tapasztaljuk, hogy a járműben fékezéskor előreesünk, az autót fékezni kell, hogy megálljon.

Az elektromágneses hullámok közül csak a fényt érzékeljük, de a technika fejlődése lehetőséget adott széles skálában történő megismerésre (1. ábra). A leghosszabb hullámhossz, amit rádióhullámként tapasztalunk, kilométer nagyságrendű. Ezek a hosszúhullámok. Bár a rádiózás ebben a hullámhossztartományban kezdődött, ma már alig találunk itt adót, és a modern rádiók már ezt a sávot nem is fogják. A középhullám tartománya 100 m-től 1000 m-ig terjed. Itt van a Kossuth adó, és még sok egyéb rádióadó is. Ez a sáv azért terjedt el, mert jó terjedési tulajdonságai vannak. A felületi hullámok, amelyek a Föld felszínén terjednek, sokáig nem csillapodnak, és a sugárzás visszaverődik az ionoszférán, ezért középhullámú adót távoli kontinenseken is lehet fogni. A rádiókon a 600 m-nél hosszabb hullámhosszok nem találhatóak meg, mivel azt a frekvenciasávot a tengeri navigációnak tartják fenn.

A középhullámú tartományban (10–100 m) a felületi hullám már erősebben csillapodik, a hosszútávú rádiózásban nem játszik szerepet, a visszaverődés az ionoszféráról még jelentős. Akik még gyakran hallgatták ezeket az adásokat, emlékezhetnek a *fading* jelenségére. A jelenség abban nyilvánult meg, hogy az adás hol csendesebb, hol hangosabb volt. Ez az érdekes hatás az ionoszféra mozgásának következménye. A mozgó, ionoszféráról visszavert sugár frekvenciája Doppler-eltolódást szenved, és ez a sugár interferál a direkt sugárral.

1. ábra. Az elektromágneses hullámok különböző tartományai



Mivel ennek a lebegésnek frekvenciája 1–0,5 Hz, és a leggyakrabban hallgatott rövidhullámú adó hullámhossza 25 m, kiszámolható az ionoszféra mozgásának sebessége, amelyre körülbelül 12–25 m/s adódik.

Ennél rövidebb hullámhosszúságú elektromágneses hullám már nem verődik vissza az ionoszférán, hanem áthalad rajta, innentől a rádióhullámokkal kitekinthetünk a világűrbe. Az ionoszféra egy plazma, amely pozitív és negatív elektromosan töltött részecskékből, azaz ionokból áll. Elektromos tér hatására a pozitív töltések a tér irányába, a negatívok vele ellentétes irányba igyekeznek elmozdulni. Ha most kikapcsoljuk a teret, akkor a kialakult töltésszétválás okozta tér igyekszik visszamozgatni a töltéseket. Ez a visszatérítő erő harmonikus rezgőmozgást hoz létre, amelynek a frekvenciája az ionok tömegének és sűrűségének felhasználásával meghatározható. Ha a plazmát a rezonanciafrekvencia alatti frekvenciával gerjesztjük, a töltések elmozdulnak. Ezek a mozgó töltések olyan elektromágneses hullámokat keltenek, amelyek interferálva az eredeti hullámmal, a továbbhaladó hullámokat kioltják, a visszamenőket nem. Ez magyarázza az ionoszféráról történő visszaverődést. Nagyobb frekvencia esetén az ionok már nem olyan fűgék, hogy követni tudnák a mozgást, ezért e hullámok terjedésében az ionoszféra nem akadály.

Tehát 10 m alatti hullámhosszok esetében (ultrarövid rádióhullámok) a sugár áthatol az ionoszférán. Az ultrarövid hullámról (URH, UHF, VHF) már azt mondják, hogy egyenes vonalban terjed, ami azt jelenti, hogy nincs felületi hullám, amely követné a Föld görbületét, és nincs visszaverődés sem, a hullám ki tud jutni az űrbe. Ebben a tartományban vannak a jól ismert rádióállomások, és a televízió-adások.

Lassan áttérünk ahhoz a tartományhoz, ahol a mobiltelefonok kommunikálnak. A mobiltelefonok vagy 900 MHz-en, 33 cm-es hullámhosszon, vagy újabban 1,8 GHz-en, 16,6 cm-es hullámhosszon adják és veszik a jeleket. Ezzel a frekvenciasávval fogunk részletesebben foglalkozni. De előbb nézzük meg, mi van a magasabb frekvenciákon.

Az ultrarövid rádióhullámnál kisebb hullámhosszú elektromágneses sugárzást hívjuk mikrohullámnak, vagy centiméteres hullámnak. Ezekkel működnek a radarok, ezek mérik a gyorsajtást, és ezekkel főzünk, sütünk a mikrohullámú sütőben, itt található az a frekvencia, amelyet a mobiltelefonozás használ.

Tovább csökkentve a hullámhosszt, először az infravörös, majd a látható fényhez, azután az ultraibolya sugárzáshoz jutunk. A látható fényt az emeli ki, hogy szemünk arra érzékeny, erről a tartományról szerezzük a legközvetlenebb információt.

A fémekben az ionok pozitív háttére előtt szabad elektronok mozognak. Ez is egy plazma, melynek ugyanúgy kiszámíthatjuk a plazmafrekvenciáját, mint az ionoszférának. Az elektronok sokkal könnyebbek, mint az ionoszférát alkotó ionok, illetve a fémekben az elektronok sűrűsége jóval nagyobb, mint az ionok sűrűsége az ionoszférában, ezért a plazmonfrekvencia jóval magasabb. A fémek plazmonfrekvenciája az ultraibolya sugárzás frekvenciatartományába esik. Ennek következtében olyan frekvenciákon,



2. ábra. Mobiltelefon-antennák egy pesti háztetőn

amelyek alacsonyabbak ennél a plazmafrekvenciánál a fém tükröző: a beeső sugárzás meg tudja mozgatni az elektronokat, melyek olyan sugárzást bocsátanak ki, amely interferál a beeső sugárral, úgyhogy továbbhaladó sugár nincs, csak visszaverődés. Ezért a fémek tükröként működnek.

A rövidebb hullámhosszú sugarak, a röntgen-, és gamma-sugarak, már behatolnak a fémekbe, számukra a fém már nem jelent tükröt.

Jól ismert, hogy a fém hogyan viselkedik elektromágneses tér hatására. Jól ismert, hogy a Faraday-kalitkába – amely egy zárt fémháló – nem hatol be az elektromágneses tér, ezért nem kell félnünk az autóban vagy vonaton, hogy megcsap a villám. A Faraday-féle kalitka leárnyékolja a rádióhullámokat is. Bárki kipróbálhatja, hogy a rádió nem szól a liftben, és a villamoson, autóbuszban, vonaton is csak akkor jó a vétel, ha a rádió az ablak mellett van. Az autónak azért van kívül antennája, hogy az adást fogni lehessen.

Mi a helyzet a mobiltelefonnal (2. ábra)? Ha bemelegítünk egy alagútba, akkor a kapcsolat megszakad, tehát oda nem jutnak be a hullámok, míg az autóban, vonaton, liftben van vétel. Mi lehet tehát az effektus, amely ezt lehetővé teszi. Ez a kérdés izgatott, mikor én is mobiltelefon-tulajdonos lettem. Különböző próbákat tettem, hogy mi árnyékolja le a telefont, mivel úgy véltem, a mobiltelefon jó eszköz arra, hogy a mikrohullámok tulajdonságát amatőr módon megtapasztalhassam.

Tapasztalatom, hogy ha egy elég nagy vékony falú fémdobozba zárom a telefont, akkor megszólal. Ez akár egy fémhálóból kialakított doboz – amilyen a bemutatásra szolgáló Faraday-kalitka –, akár ez egy vasláda, vagy egy nagyobb süteményes doboz lehet. Ennek magyarázata nem lehet az, hogy a nagyfrekvenciás teret fémekben a lévő elektronok nem tudják követni, mivel a plazmonfrekvenciáig, amely az ultraibolya tartományban van, az elektronok mozgékonyak. Akkor mi lehet az effektus magyarázata?

Ha kisebb dobozba tesszük a telefont, például egy konzervdobozba, vagy becsomagoljuk alufóliával, akkor a leárnyékolás teljes. Mi a különbség a nagy és a kis doboz között? A megoldást szintén a rezonancia effektusában kell keresnünk, de itt nem a plazmongerjesztés jelentős, hanem a doboz – amit a mikrohullámmal foglalkozó szakemberek üregnek neveznek – rezonanciája.

Alacsony frekvenciánál az elektromos tér hatására elmozdulnak a töltések. Ezek addig mozognak, míg létezik az a tér, amely mozgatja. Elmozdulnak a fém széléig, ahol feltorlódnak, helyi töltéssűrűség jön létre, és a töltéssűrűség által keletkezett tér kompenzálja a külső teret, a fémdoboz belsejében megszűnik az elektromos tér. Ez a Faraday-kalitka ismert magyarázata. Ha növeljük a frekvenciát, a töltés még mindig tudja követni a teret, mert kis elmozdulás is elég, és a fém közepétől nem megy a töltés a széléig, hanem mindegyik töltés csak kicsit mozdul el. Az effektus kulcsa abban van, hogy az elmozdult töltések nem rögtön kompenzálják a teret, mivel az elektromágneses hatás fénysebességgel terjed. Idő kell arra, hogy a terjedő hatás eltolja a töltéseket. A karakterisztikus frek-

vencia az, amikor a hatás a doboz egyik felétől a másikig éppen el tud jutni, azaz a doboz mérete hullámhossznyí.

Tehát eljutottunk oda, hogy hullámhossznál nagyobb doboz nem tud leárnyékolni, kisebb pedig árnyékol. Itt most olyan dobozról van szó, melynek fala vékony. Az alagútban annak ellenére, hogy az egy nagy doboz, nem működik a mobiltelefon, hacsak az alagút belsejében nincs adó.

Ennyi, amit előljáróban elmondtam azokról a gondolataimról, melyek akkor keletkeztek, mikor a mobiltelefonnal elkezdtem kísérletezni. A mobiltelefon ideális kísérletező eszköz, még a tér erősségét mutató műszer is van rajta. Zárószóként mindenkinek jó kísérletezését kívánok!

Tichy Géza

## A FIZIKA VILÁGÉVE HÍREI

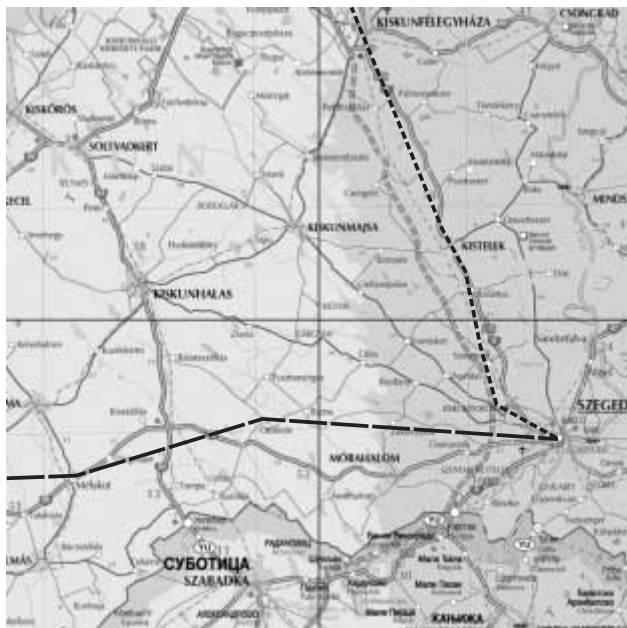
# FÉNY A VILÁG KÖRÜL – IN MEMORIAM ALBERT EINSTEIN

## Beszámolók a fénystafétáról

2005. április 18-a, *Albert Einstein* halálának 50. évfordulója a fizika évének nevezetes eseménye.

Két osztrák fizikus ötlete volt, hogy egy sok tízezer embert megmozgató rendezvénnyel emlékezzünk a fizika egyik legnagyobb alakjára. A terv szerint április 18-án este fénysugár indult az Egyesült Államokból, Princetonból, és 24 óra múlva a Földet megkerülve érkezett vissza. A fényt az emberek adták tovább egymásnak. A továbbítás módja mindenkinek a kreativitására volt bízva. A staféta útvonala Magyarországon keresztül az alábbi térkép szerint vezetett.

A Szegedre érkező fény további útjai



A szervezés természetesen az Eötvös Loránd Fizikai Társulat dolga volt. Az útba eső megyékben egy-egy központi szervező osztotta be az útvonalakat, szervezte a fénystafétához kapcsolódó programokat.

A részt vevő országok versenyben álltak egymással abban, hol sikerült a népszerűséghez képest a legtöbb embert bevonni. Azoknak tehát, akik részt kívántak venni, regisztrálniuk kellett magukat az Interneten. *Nyerges Gyula* Esztergomból és *Härtlein Károly* a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemről készítette el és tartotta karban a rendezvény honlapját, ahol most is megtekinthető a részletes program, a felhívások és az alább közölt beszámolók teljes verziója.

Következzen néhány részlet az eseményekről a szervezők helyszíni beszámolóiból (megközelítőleg keletnyugati irányban):

... A Horgosról Röszkénél belépő fényjelet Szegeden két irányban kellett továbbítani: egyrészt Kecskemét, másrészt Pécs irányában. A megye térképét szemlélve és eszténként különböző helyekről próbákat tartva, végül az alábbi útvonalakat jelöltük ki:

**Kecskeméti vonal:** Szeged – Kiskundorozsma (templortorony) – Szatymaz (víztorony) – Balástya (templortorony) – Kistelek (templortorony) – Kiskunfélegyháza (adótorony)

**Pécsi vonal:** Szeged – Öttömös (kilátó) – Mélykút (gabonatóráló) – Baja (Ólom-hegy)

Ezúton is szeretnénk kifejezni köszönetünket azoknak a lelkes tanároknak, diákoknak, csillagászoknak, plébánosoknak és plébániai munkatársaknak, akik nélkül a fényjel továbbítása aligha sikerülhetett volna. ...Lelkes fizikatanárok megszervezték, hogy a Dómtól a saját isko-

lájukig a tanulók láncot alkotva a Dórhoz érkező fényjelet saját iskolájukig továbbítsák. Itt említjük meg, hogy *Tapody Éva* tanárnő fáradhatatlan lelkesedésének eredményeképpen egy 5 km hosszú, körülbelül 150 diákból és szülőkből álló lánc is összeállt a Dómtól a kiskunorozsmai templomig.

A harmadik – talán leglátványosabb – eleme a szegedi terveinknek a több mint 1000 m<sup>2</sup>-es Einstein-fényportré a Dóm téren. Egy Einstein-fotó digitalizálása után kijelöltünk a Dóm téren több mint 1000 db pontot, egy deszkákból és kötelekből álló maszk segítségével. A pontokat egy nappal az esemény előtt aszfaltkrétával jelöltük meg, majd amikor elkészültünk, délután egy kiadós eső tisztára mosta a Dóm tér kövezetét. Így április 19-én – újabb 7 órás munkával és *Szabóné Virág Katalin* tanárnő és körülbelül 30 ságváris diák segítségével – maradandóbb formában (szeg és műanyaglapok) újratelepítettük a pontokat.

Estefelé mindenki elfoglalta a helyét, minden készen állt, vártuk a fényjel érkezését. Este 9 órától kezdve egyre többen jöttek a Dóm térre, diákok és felnőttek egyaránt, érkeztek a különböző televíziók stábjai, illetve fotóriporterek. Öröm volt nézni, hogy a Dóm tornyából mennyi kamera és fényképezőgép objektív figyel a történéseket. 21:45-kor telefonon értesítettek Röszkéről, hogy most kapták a hírt Horgosról, a fényjel Szerbiában van, és körülbelül 2 percet késni fog a tervezett 21:51 perces érkezéshez képest. A Dóm téren várakozó szegedi polgárok, és főleg a diákok izgatottan várták a jel érkezését. 21:51 perc. Már itt kellene lennie a jelnek, de tudjuk, hogy talán 2 percet késik. Mindannyian Röszke irányába nézünk, tekintetünkkel fürkesszük a halovány fényeket. 21:53 után pár másodperccel a Röszkei templomtoronyban föl villan az 1000 W-os reflektor. A következő pillanatban az egyetem épületét egy hatalmas zöld fénycsík köti össze a Dóm tornyának tetejénél lévő kossárral. Ez volt az a jel, amire mindenki várt, hogy a Dómtól az iskoláig álló sorok első emberei elindítsák a fényjelet. A zöldszínű fénycsík az egyetem TeWaTi lézertanlaborjának 4000 mW-os lézérének a nyalábja volt, melyet *Osvay Károly* indított, hogy az előző napokban *Kurdi Gábor* által gondosan beállított 9 tükrön keresztül a toronyba jusson. Két védőszemüveg mögött figyeltünk most is főt a toronykosárnál lévő szűk helyen, mint a megelőző napok próbái alkalmával, de ez most egészen más volt. Az itt elhelyezett tükrök segítségével

Az Einstein-kép terve és a megvalósult fény-kép a szegedi Dóm téren



Megérkezik a zöld lézersugár a szegedi Dórhoz

először a kiskunorozsmai templom irányába tereltük a fényt, majd a pécsi vonalon Csongrád megye legmagasabb pontján, egy sötét erdőben lévő (Szegedtől majd 40 km-re) elhagyatott kilátó felé. Öttömösön szegedi fizikusok egy autónyi csoportja várta távcsővel, aggregátorral és reflektorral felszerelve, hogy ők is tovább adhassák a fényt. Egy vagy két perc néma várakozás után megcsörren a telefon: *Szabó Gábor* professzor volt, jelezte, hogy látták a zöld fényt, és továbbították Baja felé a jelet. Ismét telefoncsörgés: a másik irányban Kisteleken is túljutott a fény Kiskunfélegyháza felé. Nagyszerű volt érezni, hogy egy pillanatra mi is részesévé váltunk ennek a világot átívelő eseménynek.

Máris a következő feladatra kellett koncentrálni, hiszen időközben több ezren gyülekeztek odalenn a téren, hogy együtt megalkossuk zseblámpákból Einstein „fényképét”. A kordonnal körbehatárolt 1000 m<sup>2</sup>-es területet négy szektorra osztották, és a pontok rajzolásában tevékenykedő diákok igazgatták a lelkes résztvevőket, ki hova álljon. Látszólag nagy volt a tumultus, rengeteg ismerős arc a tömegben, „Jó estét tanár úr, mi is itt vagyunk!” hangzott innen-onnan. Közben a színpadon lévő kivetítőn (a toronyból egy kamerával közvetítettük a látványt) kezdett körvonalazódni egy arc. Az állá egészen jól kivehető, aztán az a sok-sok fénypont, mintha valami nagy bajusszá formálódna. A feje fölött alig kivehetően a felirat: Szeged. Alul jól lehet látni egy másik feliratot:  $E = mc^2$ . De a szeménél és az arcánál nagy a feketeség! Nincs elég lámpás ember. Mit tegyünk? Feloszlátjuk az arc alatti feliratot, és gyorsan beküldjük az ottani embereket középre. „Akkor most mindenki egyszerre fölfelé világítson!” Csillagszórók gyúlnak a Szeged D betűjében és izgatott tekintettel vizsgáljuk a kivetítőt. Egyre többen mondják: „igen ... igen, ez ő, hasonlít, ez valóban Einstein!” Taps, az egybegyűlt tömeg tapssal ünnepel. Ünnepli a közös munkálkodás eredményét.

A gyengécske hangosbemondóban alig hallhatóan megköszönik Szeged polgárainak, a diákoknak, tanároknak



hogy eljöttek, a tanároknak a szervezést. Ismét taps, a 2–3 ezer ember együtt örül. Fantasztikus volt, igen sikerült! Eljött több ezer ember, itt volt 4 tv-csatorna, a helyi napilap, több internetes újság, egyetemi lapok. Ez az este a fizikáról szólt Szegeden a Dóm téren. ...

*Csiszár Imre, Szeged*

Igyekeztünk mindenhova eljuttatni ennek a rendezvénynek a hírét, segítségül vettük a helyi rádiót, akik naponta 3-szor beolvasták a felhívást, illetve ezenkívül főleg az iskolákat célba véve, plakátokat küldtünk ki, és személyesen is mindenhol hirdettük. A Staféta estéjén előadást tartottunk, melyben röviden ismertettük Einstein életét, munkásságát, a relativitáselméletet nagyon leegyszerűsítve, illetve ezek mellett általános kísérleteket mutattunk a jelenlévőknek. 25 000 fős városunk végül 50 fővel kezdte a rendezvényt. Közben elkezdett szakadni az eső, így nem is várhattuk el, hogy részt vegyen mindenki az utcai világitásban. Mikor szétosztottuk az embereket, 25 fő vállalta a zuhogó esőben is a részvételt. Ez pont elég volt a főtca végigállításához. Ezen a környéken lekapcsolták a közvilágítást, így tényleg hatásos volt a fény áthaladása. A városi TV felvételt készített, amelyet le is adtak műsorukban, illetve egy riportot is összehoztunk a rádióban.

*Vígh Viktória, Hajdúszoboszló*

Bajára a fény lézeres átvitelével érkezett Szegedről. A Bajai Csillagvizsgáló munkatársai az ólomhegyi geodéziai tornyónál vették át fényt, majd egy 30 mW teljesítményű hélium–neon lézerral lötték meg a bajai Ferences templom tornyát. Onnan kézi halogénreflektorral világították meg a bátai mikrohullámú átjátszó épületét, innen ismét kézi halogénreflektorral világították meg a vémei gabonatarló tetejét. Innen lézeres átvitelével, egy 50 mW teljesítményű argonlézerral, két irányba ment a fény. Egyrészt a pécsi tv-toronyba, másrészt a mohácsi víztorony oldalára.

A pécsi tv-toronyból a fő térre érkezett a fény, ahol 4000 ember várta. A fény városházára való beérkezése indította el azt az erre az alkalomra tervezett lézershows, amelyet sokáig emlegetni fognak a pécsi lakosok. Természetesen a fény megérkezése előtt a téren felvezető események zajlottak 18 órától, ahol fizikai kísérletek bemutatására került sor, interjúk hangzottak el pécsi fizikusokkal, lehetőség nyílt Einstein nagyméretű fényképe előtti fényképezkedésre, fizika témájú vetélkedők zajlottak az erre a célra felállított sátorban, továbbá lehetőség volt különböző formák, főleg fizikai összefüggések gravíroztatására is.

Ez a rendezvény igazán a fizikát népszerűsítette, ez a nap Pécsen valóban a fizika, a fény napjává vált.

*Kotek László, Pécs*

Dunaújvárosban a Bánki Donát Szakközépiskola tanulói és tanárai építettek ki háztetőkön megfigyelő és közvetítőbázist, innen figyelték a Soltról fellőtt rakétát. A fényt Perkártára adták tovább, ahol a helyi általános iskola diákjai és szüleik alkottak láncot, és továbbították a fényt Szabadegyházára, ahol szintén az általános iskolások adták

tovább Seregélyesre a Műszaki Szakközépiskola diákjainak. Ők a többemeletes kollégium adta lehetőséget kihasználva adták tovább a fényt a székesfehérvári Árpád Szakközépiskola diákjainak.

Innen tűzijáték-rakéta segítségével jutott tovább a fény. A Lánczos Gimnázium diákjai lámpáról-lámpára adva a fényt juttatták el azt a gimnázium udvarára. Itt már körülbelül egy órája tartott a program. Kísérleti bemutatót tartott az iskola fizikatanára, ezen körülbelül 200 diák vett részt. A bemutatón követ törtek a diákok hasán, Van de Graaff generátorral töltötték fel az önként jelentkezőket, lézerrésszel közvetítettek zenét, porszívóval hajtott légpárnás kiskocsin lehetett utazni. Az előadás után a nézők, a fény közvetítői elfoglalták helyüket a városban, és mindenki várta a továbbítandó jelet.

Amikor a fény az iskola udvarába érkezett, aki ott volt, mindenki rávilágított egy fényérzékelőre (Einstein képe alatt), s ez beindított egy He–Ne lézert, amelyet a szemközi tízemeletes ház tetején lévő másik fényérzékelőre irányítottak. Ez utóbbi bekapcsolt egy villogó-forgó sárga lámpát, amely elég messze világított.

A fényt innen átvették a Jáky József Szakközépiskola és Munkácsy Mihály Általános Iskola diákjai, akik száznál is többen alkottak láncot a város széli magasházig. A magasház tetejéről egy diszkósztróboszkóppal adták tovább a jelet Csőrra.

Csőron a Mátyás Király Általános Iskola diákjai éjszakai, zseblámpás akadályverseny keretében várták a fényt, és egy rakétával továbbították Várpalotára, a szomszéd megye első állomására.

A fénystaféta végül is igen jól sikerült. Mintegy 1500–2000 diák, szülő, érdeklődő vett részt, foglalkozott egy ideig a fizikával. Hírek, beszámolók jelentek meg a helyi televízióban, beszámolt a fehérvári eseményekről az RTL Klub *Fókusz* című műsora és a helyi újság.

*Ujvári Sándor, Székesfehérvár*

Úgy tűnik, Várpalotán végül nem látták a csőri jelet, de a vészidőpontban fellöttek egy rakétát. Ott a Thuri Gimnázium diákjai vettek részt a stafétán. A Légierő Parancsnokságtól kértem 3 jelzőrakétát. Nagyon készségesek voltak. Várpalotára a gimnáziumhoz és Herendre két hegyre küldtek katonákat a rakétákkal. Még szint is lehetett választani. A várpalotai rakétát a Veszprémtől délre levő Látó-hegyen a Lovassy László Gimnázium diákjai látták. Az igazgató odaszervezett egy tűzoltókocsit. Annak a reflektorát tisztán láttuk a másik lovassys csapatnál a Csátár-hegyi kilátóból. Ezt erdő veszi körül, így a sötét környezetben jól látták a herendiek a fényképezőgépet vakuját. Itt készítettek csoportképet is.

A herendi egyik hegyről a másikat látták, és a másik hegy rakétáját nagyon jól látták Kőröshegyen a pápai Református Kollégium Gimnáziumának a diákjai, akik állítólag még ugráltak is örömeikben. Az ő jelüket (valószínűleg reflektort) a másik csapatuk látta a pápai katonai reptéren. Ők meg továbbadták Vas megye felé. A helyi sajtó is támogatott a szervezésben: a veszprémi *Napló*ban előtte, utána cikket közöltek, a Séd TV, a Veszprémi TV és Jam Rádió buzdított a jelentkezésre, részvételre.

*Palágyi Gábor, Veszprém*



Ha köd és eső állja útját a fénynek, segít a mobiltelefon

Szombathelyen a főiskolásokon kívül egyetlen általános iskola egy tanárnője mozgósította a gyerekeket, fénylánc volt a C épületünk tetejétől, a Csillagvizsgálótól a főbejáratig, ahol az Einstein-kép is volt. Nagykanizsáról kaptuk a jelet, s továbbítottuk az Írottkőre, ahol nem látták ugyan az esőt s a köd miatt, de telefonon többször beszéltünk, s még egy visszavillantásukat láttuk is. Szépen írt az eseményről a *Vas Népe* napilap, tudósított a szombathelyi kincstári és a kereskedelmi rádió valamint a szombathelyi városi televízió. Éljen a Fizika, no meg az érdeklődő diákok, s tanárok!

*Kovács László, Szombathely*

A szervezés során kiderült, hogy a szülők hatalmas segítséget jelenthetnek. Rajtuk keresztül vezetett az út a tűzoltó-parancsnokságra, ahol egy tűzoltóautót biztosítottak

számunkra a kérdéses időpontban. (Egy kicsit aggódtam, mi lesz majd, ha történetesen éppen akkor lobban fel valami hatalmas tűz a környéken...) Ennek erős reflektorával tudtunk jelzéseket leadni a fertőrákosi kikötőből Nezsider irányába. Egy másik szülő révén a GySEV-től kaptunk kölcsön ugyancsak nagyteljesítményű reflektorokat és aggregátort a működtetésükhöz. Az egyiket a Szent Mihály templom tornyába cipelte fel egy szülő, míg a másikat a fertőrákosi kőfejtő tetejére telepítettük. Ezzel a nagy léptékű lánc kialakult: a templomtoronyban figyelik a Fertődrről érkező jelet, villantanak, azt észlelik a kőfejtőnél és továbbítják a kikötő felé, ahol a tűzoltóautó áll készenlétben. (Mint megtudtuk, Nezsiderben is a tűzoltóságot vonták be, ott egy 30 méter magas daru tetején állt egy tűzoltó őrsem, és figyelt Fertőrákos irányába.) Most már csak azt kellett elintézni, hogy Sopronig eljusson a jel. Szerencsére a megyében több kolléganőben/kollégában él még a virtus, így velük összefogva sikerült a Győr–Csorna–Kapuvár–Fertőd útvonalon biztosítani a fény továbbhaladását. Csornán *Kovács Ilona* és *Szilágyiné Polgár Éva* vállalták el a szervezés nem túl hálás feladatát, Kapuváron *Schiffer Gyula*, míg Fertődön *Pápai Gyuláné* voltak társaim az akcióban. Ezeken a helyeken is a templomtoronyok jutottak főszerephez: innen figyelték távcsővel az előző láncszemet, és jeleztek reflektorral. Mind-egyik helyen csatasorba állították a diákokat is a város egyik végétől a másikig, Fertődön például a templomtól a diszkóig; itt ugyanis a diszkó üzemeltetőjét sikerült megnyernünk az ügynek.

*Lang Ágota, Sopron*

## VÉLEMÉNYEK

# MEGJEGYZÉS EGY RELATIVITÁSELMÉLET-ÉRTELMEZÉSHEZ

A relativitáselmélet logikai-filozófiai irodalma azonkívül hogy terjedelmes, nem tartozik éppen a könnyű olvasmányok közé, de én is azok közé tartozom akik újra és újra próbálják megérteni, és nagyon hálás vagyok, ha egy fizikus vagy matematikus, aki a terület szakértője, megpróbál ebből elmagyarázni annyit, amennyit lehet. Viszont zavarban vagyok akkor, amikor jön egy másik szakértő, és azt mondja nekem, hogy amit a többiek mondanak tévedés. Kinek higgyek, merjek-e ellentmondani, mikor könnyen lehet, hogy meg sem értem vagy félreértem amit mond? Pedig nem kell az elméleti fizika rejtelseibe bonyolódjunk, hogy ne értsük egymást. A minap helyettem feleségem vitte vissza a kollégiumba lányomat, és ezért elmagyaráztam neki az utat autós szemmel. „Fordulj az Irinyi József útról jobbra az Október 23. útra, majd onnan az áruház előtt egy másodszori jobbra fordulással a Bercsényi utcába.” Miután hazaért, összeháztam, hogy miért mondtam, hogy kétszer kell jobbra

fordulni, amikor valójában csak egyszer kellett? Hüledezve hallgattam, és próbáltam meggyőzni, hogy bizonyára először kis ívben fordult jobbra a Budafoki út után, majd másodszor is jobbra a kollégium utcájába. „Nem-nem” – volt a válasz – „rosszul emlékszel, csak egyszer kell jobbra fordulni, mert a kollégium utcájáig egyenes az út”. Jövő héten mérgemben én vittem vissza a lányomat, feleségemet pedig magam mellé ültettem az autóba. Mikor éppen elhagytam a Budafoki utat, és először kezdtem jobbra kanyarodni, megkérdeztem, látja-e, hogy a kormányt folyamatosan jobbra tekerem. „Az nem számít” – volt a válasz – „mert nem indexelsz”. Ekkor megértettem, hogy közöttünk *szemantikai diszkrepancia* van (húsz évi házasság után), mást ért egyenesen, illetve jobbra forduláson, mint én. Szerencsére ebben az esetben a „jobbra fordulni” referenciája azért kifürkészhetőnek tűnt, ő a KRESZ szerint értelmezte a jobbra fordulást, míg én geometriai értelemben. Ez jutott eszembe,

amikor elolvastam az E. Szabó Lászlóval készült beszélgetést, melynek címe önmagáért beszél: *Semmiben nem nyújt új vagy más leírást a térről és az időről* a speciális relativitáselmélet, mert arról van szó.<sup>1</sup> Megismétlem, azt állítja: semmiben. Ha semmiben, akkor az érthetőségben sincs különbség, de akkor miért értik meg az előbbit sokkal könnyebben az emberek, mint az utóbbit? Miért vitatkozunk mi itt erről és nem a régi fizikáról? Biztos tökéletesen mást ért „újdomság” alatt, ha szerinte a speciális relativitáselmélet semmi újat nem tartalmaz a klasszikus fizikához képest. Nyilván éppen olyan jól tudja, mint én, hogy a klasszikus fizika és a speciális relativitáselmélet más-más modellt használ. *Einstein* ezt egy mára klasszikussá vált vonatós példával világosan elmagyarázza. A klasszikus fizika így számol, míg a relativitás úgy, a kettő nyilvánvalóan nem azonos. Mondhatjuk-e ezek után mégis, hogy ennek ellenére a két modell, melynek folyamánya a két eltérő formula, valójában azonos? Mit jelent itt ez a „valójában”? Csodálkozásom csak fokozódott, amikor ezek után a cikket olvasva a következők részhez értem: „Tehát a lényeg, és ez az, aminek a meg nem értéséből az a sok »bizsergés« fakad, hogy Einstein a relativitáselméletben *más* fizikai mennyiséget nevez »távolságnak« és »időnek«, mint a klasszikus fizika.” De ha ez így van, akkor miért mondja, hogy semmi új nincs ebben az elméletben, hisz legalábbis az alapvető terminusok „idő, távolság” jelentése eltér? Mondhatja, hogy neki ellenszenves ez a felfogás, sőt azt is, hogy jogosulatlan, mert ezek jelentése már rögzített a köznapi nyelvben, aztán mondhatja, hogy célszerűtlen, túl bonyolult, vagy túl egyszerű, vagy akár azt is, hogy elfogadhatatlan metafizikai előfeltevéseket implikál. Egyetlenegy dologot nem mondhat: egy létezőről nem állíthatja, hogy nem létezik mikor az létezik; azaz, ha van itt valami új, akkor nem mondhatja, hogy nincs. Ez azonban nyilvánvaló ellentmondás volna, amit feltehetőleg ő is átlát, ezért biztos, nem így gondolja, amit gondol, és én értem félre. Azért gondolom, hogy a most fölvezetett értelmezésemben hibának kell lennie, mert különben önellentmondást tartalmazna E. Szabó gondolatmenete. Mivel ez nem valószínű, tehát el kell vetnem a saját értelmezésemet, amely ide vezetett. De akkor mire gondolhat? Szerencsére elmagyarázza, legalábbis megpróbálja. Azt javasolja, ne fogadjuk el Einstein terminus-használatát, nevezük másképp azt, amit Einstein időn és távolságon ért, és akkor rá fogunk döbbseni, hogy nincs itt semmi új a régi mechanikához képest. Szerinte ugyanis a relativitáselmélet időfogalma más, mint a klasszikus fizikáé, amiben igaza van. Meggyőződése szerint talált olyan leképezést a klasszikus és a relativitáson alapuló tér-idő modell között, hogy az összefüggések izomorfok lesznek. (Két szerkezet *izomorf*, ha a benne lévő elemek és kapcsolataik kölcsönösen egyértelmű viszonyba hozhatók.) De mit jelent pontosabban ez az izomorfia? Mit jelent jobbra kanyarodni?

Még ennél is sokkal többet állít E. Szabó. Azt állítja, hogy a speciális relativitáselmélet önellentmondásos. Ezt írja: „...mit is jelent magyarul az, hogy az órák lelassulása és a méterrudak megrövidülése »kimagyarázza« a Michelson–Morley-kísérlet eredményét? Ez azt jelenti, hogy ha a méterrudak megrövidülése stb. fennáll, akkor a Michelson–Morley-kísérlet eredményéből az következik, hogy a fény sebessége *nem* ugyanaz minden inerciarendszerben (hanem  $c+v$ ,  $c-v$ , ahogyan azt a klasszikus fizika gondolja). Mármost a relativitáselmélet két alapelve közül az egyik az a tézis, hogy a fény terjedési sebessége minden inerciarendszerben azonos. Mint bármelyik standard tankönyvben elolvasható, e két alapelvből rövid úton következik, hogy a méterrudak megrövidülnek stb., amiből viszont következik – a Michelson–Morley-kísérletben tapasztaltak alapján –, hogy a fény terjedési sebessége nem azonos minden inerciarendszerben. Ez logikai ellentmondás, amely indirekt módon azt bizonyítja, hogy a relativitáselmélet két alapelve közül az egyik nem lehet igaz.” Szellemes érvelés, de érvényes-e? Vizsgáljuk meg alaposabban. Ez a következtetés azon alapul, hogy E. Szabó szerint a relativitáselméletben némelyik esetben a merev testek lerövidülnek: „...nem pontosan ezt mondja az Einstein-féle, vagyis a ma általánosan elfogadott relativitáselmélet, hogy a mozgó méterrúd megrövidül, éppen az említett mértékben, és a mozgó óra lelassul, éppen úgy, ahogyan azt Fitzgerald és Lorentz feltételezték?” Nem, Einstein nem ezt mondja. A relativitáselmélet arról beszél, hogy a méterrudak hossza mindig adott vonatkoztatási rendszerben értendő. (A „vonatkoztatási rendszer” és „koordináta-rendszer” kifejezéseket egymás szinonimáinak tekintem.) A merev test önmagához rögzített koordináta-rendszerében nem változik a rúd hossza, de egy hozzá képest mozgó másik inerciarendszerben már igen, onnan mérve más a test hossza. Nem igaz, amit E. Szabó állít, hogy a mozgó rúd megrövidül csak úgy általában véve, valójában a mozgó rúd hossza egy másik, hozzá képest mozgó rendszerben mérve rövidül meg. Így, mivel ez az állítása hamis, az egész érvelése összeomlik. Érdekes, hogy nem merül föl E. Szabó Lászlóban, mint bennem az ő szövege értelmezése során, hogy talán nem jól értem, amit olvasok, azért látok ellentmondást.

Vegyük elő ismét az egyik klasszikus szöveget, amelyre E. Szabó is hivatkozik, és elfogulatlanul, ráhagyatkozással olvassuk újra. Higgyük el, akar nekünk mondani valamit, valamit, ami nem egyszerű, nem könnyen érthető, de mégis minket kézen fogva, lépésről lépésre vezetve fölvisz olyan magasságba, ameddig mi szerény matematikai ismeretekkel fölverteve követni tudjuk. Ezt írja Einstein: „Nincs tehát »önmagában vett« pályagörbe (olyan görbe, amelyen a test mozog), hanem csakis meghatározott testhez viszonyított pályagörbéről lehet beszélni.”<sup>2</sup> *Novobátzky Károly* megjegyzése ehhez: „Ezt a tényt így szokás kifejezni: a pályagörbe nem abszolút, hanem relatív fogalom. Két különböző koordináta-rendszerben a

<sup>1</sup> E. Szabó Lászlóval a relativitáselmületről beszélgetett Balázs László Kristóf, *Beszélő*, 2004. január, 76. o. <http://beszelo.c3.hu/04/01/10leszabo.htm>. E. Szabó koncepcióját Hráskó Péter bírálja fizikus szemmel: <http://www.hrascko.com/peter>

<sup>2</sup> Albert Einstein, *A speciális és általános relativitás elmélete*, ford. Vámos Ferenc, Gondolat, Bp. 1973, IV. kiadás. 20. o. A szöveget az eredetivel egybevetette és szakmailag ellenőrizte Károlyházi Frigyes. A könyvet Novobátzky Károly látta el magyarázó, kiegészítő jegyzetekkel.

pályagörbe más és más.”<sup>3</sup> A következő passzusban ismét figyeljünk föl arra, hogy Einstein mindenütt *viszonyokról, relációkról* beszél. Ezt mondja az időről: „Miután azonban az az idő, amelyre egy bizonyos történésnek a vonat-hoz viszonyítva szüksége van, az imént közölt meg-gondolások szerint nem lehet egyenlő ugyanennek a törté-nésnek a töltésre vonatkoztatott tartalmával, nem állíthat-juk tehát, hogy a vasúti kocsiban járkáló utas a pályatest-hez viszonyítva a *w* útdarabot olyan idő alatt teszi meg, amely – a töltésről nézve – egy másodperccel egyenlő.”<sup>4</sup> Újra csak viszonyokról beszél a relativitáselmélet megal-kotója, és nyilvánvalóan innen van az elmélet elnevezése is! Vajon hogyan gondolkozik a távolságról? Valóban úgy, ahogy E. Szabó László értelmezi? Ez fontos kérdés, mert mint említettem, több következtetése ezen az értel-mezésen alapul. Ehhez egy kis kitérőt kell tegyünk.

Fontos, hogy megkülönböztessünk egymástól egy elméletet, egy szellemi alkotást – a relativitáselméletet – és azokat a kísérleteket, megfigyeléseket melyek magya-rázata az az elmélet született. Az elmélet – jelen eset-ben a speciális relativitáselmélet – értelmezése éppúgy fölvet kérdéseket, értelmezéssel kapcsolatos vitákat, mint a kísérletek, mérések értelmezése, röviden, a valóság értelmezése, magyarázata. Einstein szövege, mint sok más szöveg, néha többértelmű, egymással ellentétes ér-telmezéseket is megenged. Ennek ellenére próbáljuk meg megérteni, mit gondolt Einstein, és ez nem azonos azzal a kérdéssel, hogy igaza volt-e, vagy nem volt igaza, avagy lehet-e másképp is magyarázni azokat a jelensége-ket, amelyeket ő magyaráz. A most forrásértékűnek te-kintett szélesebb nagyközönség számára írt könyvecské-ben Einstein többször is beszél a távolságok megrövidü-léséről, kérdés azonban, hogy pontosan hogyan érti azt? Így ír ezzel kapcsolatban egy fontos helyen: „Lorentz és Fitzgerald azzal a feltevessel mentette ki az elméletet a zavarból, hogy az éterrel szemben végzett mozgás ered-ményeképpen a test a mozgás irányában összehúzódik; ennek az összehúzódásnak kellett eltüntetnie az előbb említett időkülönbséget. A 12. fejezetben mondottakkal összehasonlítva láthatjuk, hogy ez a megoldás a relativí-táselmélet szempontjából is helyénvaló volt. A tényállás-nak a relativitás szerinti felfogása azonban összehasonlít-hatatlanul kielégítőbb. (Ezek szerint a relativitás *másképp értelmezi* a rövidülést! A.F.) Mert eszerint nincs a többiek között kitéüntetett szerepet játszó olyan koordináta-rend-szer, amely az éter fogalmának bevezetésére okot adna; és így nincs »éterszél« sem; olyan kísérlet sincs, amelyből ennek létezése következne. A mozgó testek összehúzó-dása itt minden különösebb hipotézis nélkül az elmélet két alapelvéből következik; mégpedig erre az összehúzó-dásra *nem a magában vett mozgás mérvadó*, (kiemelés tőlem) melynek nem tulajdoníthatunk értelmet, hanem mindenkor a *választott vonatkoztatási testhez viszonyít-va végzett mozgás* (kiemelés tőlem). Így tehát Michelson és Morley tükrös testje a Földdel együtt mozgó rendszer-ből nézve nem rövidül meg, de igenis megrövidül a Nap-

hoz képest nyugvó rendszerben.”<sup>5</sup> Világos beszéd, a rövi-dülés relatív és nem abszolút. Az, hogy valami relatív, azaz relációs logikai szerkezetű, nem azt jelenti, hogy szubjektív, az elmeről vagy az érzékelésről szóló kijelen-tés. A falban lévő egyik vezeték elektromos feszültsége egy adott ponthoz képest 230 V, míg egy másik ponthoz képest 400 V. Ha valaki azt kérdezné ezek után, hogy „igen, de mennyi valójában?”, ezzel azt fejezné ki, hogy nem értette meg eme tény relációs (viszony) jellegét. Fi-gyeljünk föl erre, amikor Einstein a „magában vett moz-gás” fogalmának értelmetlenségéről beszél, és helyette a „választott vonatkoztatási testhez” viszonyított mozgásról beszél a testek, a távolság megváltozásával kapcsolatban. A könyv egy korábbi helyén két axiómát fogalmaz meg, amelyek részei a klasszikus fizikának, de az új elmélet-ben nem alkalmazandók:

„Az utóbbi három fejezet megfontolásai azt mutatták, hogy a fényterjedés törvénye és a relativitás közti látszó-lagos ellentmondás a 7. fejezetben oly megfontolások-ból adódott, amely a klasszikus mechanikából két, egyál-talán nem indokolt feltevést vett át. E feltevések:

1. Két esemény időköze független a vonatkozó test mozgásállapotától.

2. A merev test két pontjának térbeli távolsága függet-len a vonatkozó test mozgásállapotától.

Ha elejtjük e feltevéseket, úgy a 7. fejezet dilemmája megszűnik, ...”<sup>6</sup>

Itt most a második kijelentés elvetése az érdekes szá-munkra. Azt mondja, hogy a térbeli test két pontjának távolsága a vonatkozó test mozgásállapotától függ. Csakhogy több vonatkozó test is lehetséges, és ezért az egyik esetben a távolság ennek, a másik esetben pedig annak adódhat. Ez azért nem ellentmondás, mert a kü-lönböző számok különböző vonatkozásokban értendők. Éppen ebben van a távolság fogalmának relációs jellege a relativitáselméletben. Nézzünk további szöveghelyeket. Nevezetes 1905-ös cikkében írja: „Az olyan merev test tehát, amely nyugalmi állapotban gömb alakú, mozgó állapotban – a nyugvó rendszerből szemlélve – forgási ellipszoid alakú ...”<sup>7</sup> Ismét csak azt mondja, a rövidülés relatív és nem abszolút. Van olyan hely is, ahol Einstein valóban a rúd megrövidüléséről beszél:

„K-hoz képest a méterrúd azonban *v* sebességgel moz-gog. Tehát egy hosszirányban *v* sebességgel mozgó merev méterrúd hossza csak  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  méter. Azaz a mozgó merev rúd annál rövidebb, minél gyorsabban moz-gog.”<sup>8</sup> Novobátszky Károly azonban felhívja a figyelmün-ket a szerinte helyes értelmezésre. „A rúd rövidülésével kapcsolatban felmerül az az érdekes kérdés, történt-e a rúddal valamilyen *belső objektív* változás? Felelet: a rúddal nem történt semmi. A bizonyítás nagyon egyszerű. Feküdjék a rúd nyugalomban a töltésen. Hossza ott le-mérve legyen 1 méter. Most vonat halad el mellette *v* sebességgel. A vonatról mérve a hossza  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Ha

<sup>5</sup> i.m. 58. o.

<sup>6</sup> i.m. 37. o.

<sup>7</sup> Albert Einstein, *Válogatott tanulmányok*, Gondolat, Bp. 1971, 69.o.

<sup>8</sup> i.m. 42. o.

<sup>3</sup> i.m. 20. o.

<sup>4</sup> i.m. 35. o.



egy párhuzamos vágányon ugyanakkor egy másik vonat halad el mellette nagyobb  $V$  sebességgel, onnan mérve a hossza  $\sqrt{1 - V^2/c^2}$  adódik, vagyis kisebbnek. Ha tehát a rúd megrövidülése objektív valóság volna, egyszerre két különböző hosszúsággal kellene rendelkeznie, ami képtelenség. A helyes értelmezés a következő: a rúddal ténylegesen nem történik semmi, de hosszának mérőszáma különbözőnek adódik aszerint, hogy a (vonaton levő) mérőszalag más-más sebességgel mozog hozzá képest. Feltétlenül el kell vetnünk azt a tévedést, mintha a rúd nyugalmi hossza az igazi hosszúság volna. A vonaton levő megfigyelő számára a rúd hossza az általa megállapított mérőszám.<sup>9</sup> (Ez utóbbi mondatot vitathatónak tartom. Miért ne lehetne kitüntetett szerepe egy merev test önmagához rögzített koordináta-rendszerben mért jellemzőinek? Ez szerintem definíció kérdése.) Ellentétben E. Szabó Lászlóval, úgy vélem Novobátzky Einstein szellemében fűzte ezt a megjegyzést az eredeti szöveghez. (A könyvet *Károlyházi Frigyes* lektorálta szakmailag. Így aki Novobátzkyt leszólja, Károlyházit is megszólja.) Az az értelmezés tehát, hogy egy tárgy alakja önmagában megváltozik a mozgás következtében, és nem csak a gyorsítás alatt, hanem utána is, amikor már állandó sebességgel halad, bár különös, de talán lehetséges értelmezése a kísérleteknek, viszont nem annak, amit Einstein ír.

Melyek a speciális relativitáselmélet alapelvei? Alapelve-e a fénysebesség állandósága minden inerciarendszerben? E. Szabó itt is meglep bennünket: „Ez a tézis nem azonos azzal, amit hallani szeretnél volna, hogy a fény sebessége azonos minden inerciarendszerben. Mert az nem igaz. És azt a relativitáselmélet sem mondja. (Nem gondolom, hogy ennek jelentősége van, csak érdekességképpen jegyzem meg, hogy ez az állítás nem is szerepel Einstein 1905-ös cikkében.)” – írja. Nézzük, mit írt Einstein 1905-ben *A mozgó testek elektrodinamikájáról* című cikkében: „Az alábbi fejtegetések a relativitáselven és a fénysebesség állandóságának elvén alapulnak. A két elvet az alábbiak szerint definiáljuk:...”<sup>10</sup> Majd a nagyközönségnek írt munkájában így fogalmazza meg az új teória feladatát: „Hogyan kapjuk meg egy eseménynek a vonathoz viszonyított helyét és idejét, ha ismerjük ugyanakkor az eseménynek a vasúti töltésre vonatkoztatott helyét és idejét? Megfelelhetünk-e erre a kérdésre úgy, hogy a vákuumbeli fényterjedés törvénye ne ellenkezzék a relativitás elvével?”<sup>11</sup> Mint ha ez a két idézet cáfolná E. Szabó állítását. Ami a fénysebesség, illetve általában egy felső határsebesség létét illeti, attól is függ, hogy folytonos szerkezetűnek, avagy diszkrét mennyiségnek feltételezzük a teret és az időt. Az utóbbi esetben meg fogom mutatni, hogy a felső határsebesség létezése mellett logikai érvek is szólnak.

A világról egy távoli szegletében távol minden csillagtól párhuzamos (egyenes) vágányok indulnak a végtelenbe egy állomásról. A szerelvényeken indulás előtt ellenőriztük a klasszikus mechanika törvényeit, és különféle, pontosan egyforma órákat helyeztünk el a vonatokon. Van

ezek között felhúzó mechanikus vekker, digitális óra, sőt még a fényóra is, amely két szembefordított tükör között oda-vissza cikázó fénysugárral méri az időt. (Ahogy *Feynman* leírja a *Mai fizika* című könyv 2. kötetében.) Az órák azonkívül, hogy azonos ritmusra járnak, azonos időt is mutattak indulás előtt. A hosszú úthoz képes rövid gyorsítás után a vonatok különféle állandó sebességet értek el, és azzal folyamatosan haladtak a végállomásig, majd onnan visszatértek a kiinduló pontba. Az egyik vonatot nem indítottuk el, az helyben maradt. Ennek óráit összehasonlítottuk a visszatért vonatok óráival, és a következőt tapasztaltuk: az órák továbbra is azonos ütemben járnak, viszont kiestek a szinkronból, annál jobban késnek, minél gyorsabban tették meg az utat. Távolságokat is mértünk a vonatokon. Megmértük a szerelvények hosszát az indulás előtt, majd a vonatokra folszállva a gyorsítás alatt és az utazási sebességen is. A középső esetet kivéve nem találtunk eltérést, és a visszaérkezett vonatok hossza is változatlan. A gyorsítás alatt mértünk eltérést, de ez nem meglepő az ismert fizikai törvények ismeretében. Viszont egy távoli bakterháznál megfigyelőt jelöltünk ki azzal a feladattal, hogy ő is mérje meg azelőtte elszárguló szerelvények hosszát. Érdekes módon ő a nyugalmi állapotnál rövidebbnek mért minden mozgó vonatot. Ezzel szemben mi a vonaton nem tapasztaltunk sem rövidülést, sem az órák deformálódását. Mondhatjuk-e ezek után E. Szabóval egyetértésben, hogy az idő egyformán telt a szárguló és álló vonatokon, csak a mérésére szolgált eszközökkel történt valami különös? Einstein nemmel válaszolt a kérdésre, mások – köztük a vitatott írás szerzője – igennel. Mondhatjuk-e, hogy azért mérte a megfigyelő rövidebbnek a vonatot, mert az attól függően, hogy milyen gyorsan haladt, megrövidült? Einstein szerint igen, a töltéshez képest, és nem, a vonaton ülve. Az ellentétes vélemény szerint a vonat miközben szárgul, megrövidül, amit rajta ülve ezért nem veszünk észre, mert a mérés alapját jelentő méterrúd is rövidebb lesz. Lehet-e választani a két felfogás között, avagy mindkettő helyes? *Wittgenstein* szerint nemhogy az etalonok rövidülésének, de még annak a kijelentésnek sincs értelme, hogy az etalon 1 m-es rúd 1 méter. Ha egy fémből készült 1 m-es rúd hossza megváltozik melegítés hatására, ennek azért tulajdoníthatunk értelmet, mert mellé tehetünk egy másik, vele egyforma rudat, amelyet nem melegítettünk föl, és láthatjuk az eltérést. Azt is megfigyelhetjük, amint a fölmelegített rúd lehül, és visszanyeri eredeti hosszát, újból létrejön a két rúd hosszának egyenlősége. Egy gyorsan haladó rendszerben viszont lehetetlen egy álló rendszerben lévő rudat a másik mellé helyezni, így a rudak saját hosszának E. Szabó által feltételezett rövidülése a megfigyelhetetlen jelenségek körébe tartozik.

Kis lépést téve a probléma tudományos megközelítése felé, miképpen írhatjuk le pontosabban az előbbi elképzelt kísérletet? A helyben maradt vonatot nevezzük  $k$ -nak, egy mozgó vonatot pedig  $k'$ -nek, de miképpen jelöljük a vonatokon mért helyet és időt? Nem biztos, hogy ez lényegtelen. Egy alkalmas jelölés segíthet a világos megértésben, míg egy alkalmatlan egyenesen félrevezethet. A kísérlet leírására milyen nyelvi keretet válasszunk? Ezek megvitatása már túlmutat az én hozzáértésemem, de bizo-

<sup>9</sup> i.m. 43. o.

<sup>10</sup> Albert Einstein, *Válogatott tanulmányok*, Gondolat, Bp. 1971, 59. o.

<sup>11</sup> i.m. 37. o.

nyos összefüggéseket látni vélek. Két fogalmat vázoklok fel. Az idő értelmezése szoros kapcsolatban áll az egyidejűség értelmezésével. Az „egyidejűség” szintaxisa a klasszikus fizikában így fest:  $x$  egyidejű  $y$ -nal, ezzel szemben Einsteinnél így:  $x$  egyidejű  $y$ -nal a  $k$  vonatkoztatási rendszerben. Mint látható, az utóbbi kifejezés argumentumszáma eggyel több, mind az előbbié. A klasszikus fizika vonatkozó feltevése megfogalmazható a második terminussal: ha van olyan  $k$ , melyre  $x$  egyidejű  $y$ -nal  $k$ -ban, akkor minden  $k_1$ -re  $x$  egyidejű  $y$ -nal  $k_1$ -ben. Ezek alapján bevezetve a klasszikus egyidejűségre a „koinc<sub>1</sub>”, az újra a „koinc<sub>2</sub>” kifejezéseket, a kettő kapcsolatának egy lehetséges megfogalmazása így festhet:  $\text{koinc}_1(x, y) = \text{van olyan } k, \text{ hogy } \text{koinc}_2(x, y; k)$ , ahol  $k$  tetszőleges inerciarendszer,  $x, y$  pedig állapotok, események. Mint látható, a relativitáselmélet „egyidejűség”-fogalma felülről lefedi a klasszikus „egyidejűség”-fogalmat, hiszen definiálható benne. Ezért a klasszikus és a relativisztikus „idő”-fogalom között sincs kibékíthetetlen ellentét, a relativisztikus időfogalom egy alesete a hagyományos időfogalom. Mint jól ismert, ez a számszerű összefüggésekből is látszik, ha a fénysebességet végtelen nagyra képzeljük.

Egy test helye már a klasszikus fizikában is relációs fogalom, de a hosszúsága nem. A relativitáselmélet egy merev test hosszúságát mindig egy koordináta-rendszerhez való viszonyában értelmezi, míg a klasszikus fizika felfogása ezt vonatkoztatási rendszertől függetlennek tekintti, más értelemben, azonosnak veszi minden koordináta-rendszerben. A logikai szerkezet (szintaxis) szempontjából ez azt jelenti, hogy amíg a klasszikus fizika az objektumok tulajdonságának tekintti egy merev test hosszát, addig a modern fizika ezt a fizikai jellemzőt viszonyként (relációként) értelmezi. Ha ebben a relációban kitüntetjük a merev testek önmagukhoz rögzített vonatkoztatási rendszerét, akkor az ezekben mért jellemzőt azonosíthatjuk a klasszikus fizika „hossz”-fogalmával. Avagy logikai megközelítésben, ha egy kétargumentumú reláció egyik argumentumát kitöltjük, akkor egyargumentumú predikátumot (tulajdonságot) kapunk. A relativisztikus gondolkodásmód itt is felülről lefedi a régi fizikát, gazdagabb nála. Ha szabad illet mondani, a klasszikus fizika fogalmai kevésbé relációs jellegűek, és így közelebb állnak a hagyományos logika és a mindennapi gondolkodás szubjektum–predikátum felfogásához, míg a modern fizika felfogása erősebben relációs jellegű. Einstein az eseményeket is relációknak tekintti: „Hogyan kapjuk meg egy eseménynek a vonathoz viszonyított helyét és idejét, ha ismerjük ugyanannak az eseménynek a vasúti töltésre vonatkoztatott helyét és idejét?”<sup>12</sup> A példából látszik, hogy más az alapvető mechanikai jellemzők logikai szintaxisa a speciális relativitáselméletben és más a klasszikus fizikában. Vizsgáljuk meg a kifejezések szemantikáját, jelentését is. A különbség itt is alapvető. A klasszikus fizika a hagyományos filozófiák gondolkodásmódjához hasonlóan intuitíve nyilvánvalónak tekintette, hogy mit jelent a távolság és az idő, nem így Einstein: „Ha minden súlyos aggály és beható magyarázat nélkül a mechanika feladatát így szögezem le: »A mechanikának

le kell írnia, miként változtatják a testek térbeli helyzetüket az időben», akkor a világosság szelleme ellen elkövetett halálos bűnnel terhelem lelkiismeretemet: fedjük fel a bűnöket. Nem világos, mit értsünk itt »hely«-en és »tér«-en.”<sup>13</sup> Einstein minden esetben a mérésre, megfigyelésre vezeti vissza a fizikai jellemzők jelentését, és elveti a spekulatív definíciók használatát. A *fizika időfogalmáról* című részben külön foglalkozik ezzel a kérdéssel: „Valamely fogalom a fizikus számára csak akkor létezik, ha megvan annak a lehetősége, hogy adott esetben megállapíthassuk, vajon helyes-e a fogalom, vagy sem. Tehát az egyidejűségnek olyan definíciója szükséges, hogy vele egyszersmind módszer birtokába jussunk, amellyel a jelen esetben kísérletileg dönthessük el, vajon a két vilámcsapás egyidejűleg történt-e, vagy sem. Mindaddig, míg ez a követelésünk nem teljesül, a fizikus (de a nem fizikus is!) csalódik, ha azt hiszi, hogy az egyidejűség állításának értelmet tulajdoníthat (mindaddig, míg ez meggyőződéseddé nem vált, kedves olvasóm, ne haladj tovább).”<sup>14</sup> Novobátczy Károly külön felhívja a figyelmet: „Einstein határozottan kiemeli, hogy egy definíció a fizikus számára értéktelen, ha nem vagyunk olyan módszer birtokában, amellyel a definícióból eredő folyományokat kísérletileg ellenőrizhetjük.” Nem azt mondja Einstein és Novobátczy Károly, hogy csak addig, vagy csak ott és akkor van egy merev test tömegközéppontjának helye és sebessége valamely koordináta-rendszerben, ha épp akkor mérjük, és ha nem méri valaki, akkor nincs, hanem hogy az igazolás vagy cáfolás módja és eredménye ad igazságkritériumot és jelentést. Nincs ez ellentétben a klasszikus fizika szemléletmódjával, de ott talán kevésbé fogalmazódott meg ilyen világosan. Hogy mennyire nem áll távol a relativitáselméletől a szemantika gondolkodásmódja, mutatja az is, hogy Einstein könyvében a szemantika egyik alapfogalmával, az igazsággal is foglalkozik, sőt azzal kezdi a nagyközönségnek szánt könyvét, mi képp értelmezhető a geometriai tételek igazsága.

Ha igaz, ahogy én látom, hogy a relativitáselméletben használt fizikai jellemzők mind a logikai szintaxis, mind a szemantika tekintetében eltérnek a klasszikus fizika fogalmaitól, akkor egy, a két elmélet lényegi azonosságát kimutató érvelés nem lehet helyes, és E. Szabó László ebben téved.

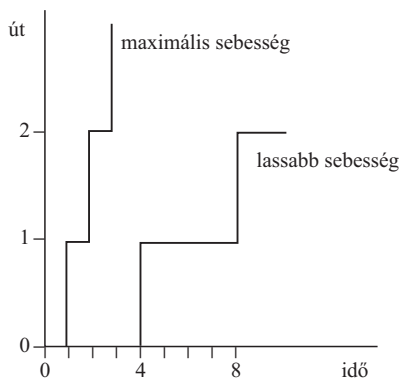
Excel-táblázatok működő modelljeiben összefoglaltam az eddigieket, amely letölthető az Internetről.<sup>15</sup> Figyeljük meg, hányféle időt használunk, érzékelünk avagy látunk, miközben tanulmányozzuk a modellt. Lehetne-e a világ olyan, ahogy a klasszikus fizika írja le? Igen, ha létezne végtelen gyors távolhatás és információátadás. Milyen szerkezetű a tér–idő, kontinuum sűrűségű, melynek leírásához a valós számokra van szükségünk, vagy atomos szerkezetű? Einstein válasza egyértelműen az előbbi. Ha mégis föl-tételezzük, hogy a tér és idő atomos szerkezetű – azaz a leírásához elegendő lenne a diszkrét matematika, és a valós számok használata csak az egyszerű tárgyalásmód kö-

<sup>13</sup> i.m. 19. o.

<sup>14</sup> i.m. 29. o.

<sup>15</sup> <http://ferenc.andrasek.hu>

<sup>12</sup> i.m. 37. o.



vetkezménye –, akkor abból érdekes dolgok következnek. Egy Zénon-aporian alapuló érveléssel kimutatható, hogy a véges felbontású tér–idő felfogásból bizonyos kiegészítő feltevessel a sebesség felső határértéke következik.

Tegyük fel, hogy  $m$  tömegpont egyenes vonal mentén  $A$  pontból  $B$  pontba halad  $t_1$  időpontban indulva és  $t_2$  időpontban megérkezve. Természetes az a föltevés, hogy eközben minden időpontban van valahol, és minden időpontban egy és csak egy helyen van. Fordítva is igaz, ha a pont valahol tartózkodik, akkor ahhoz tartozik egy időpont. A vonal pontjai melyen a pont áthalad, sorba rendezettek olyan módon, hogy bármely két különböző hely közül el tudjuk dönteni, hogy melyik van közelebb a  $B$  ponthoz. A  $P$  pont mozgása során minden helyet érint  $A$  és  $B$  között, egyet sem hagy ki vagy ugrik át. A következő feltevés azonban már vitatható. A pont folyamatosan halad előre, tehát ha  $x$  időpont későbbi, mint  $t_1$ , akkor a pont  $x$ -hez tartozó helye közelebb van  $B$ -hez, mint a korábbi időpontban lévő helye. Ebből az következik, hogy a pont miközben halad, folyamatosan mozog bármely  $t_1$  és

$t_2$  közé eső két időpontban –  $t_1$ -et és  $t_2$ -t is beleértve. Amennyiben két időpont nem azonos, akkor a pont hozzá tartozó két helye is különbözik. Ha most feltételezzük, hogy a tér és az idő is atomos szerkezetű, akkor a pont  $t_1$  és  $t_2$  közötti időtartam alatt csak véges sok időpont–hely koordinátaponton halad át. Belátható, hogy ebben az esetben csak egyetlen sebességgel haladhat a pont, és az éppen a legrövidebb hossz és időtartam által meghatározott maximális sebesség lesz. Tegyük fel ugyanis, hogy egy időatom alatt a pont kettő vagy több tératomot halad előre. Mivel feltételeztük, hogy a pont nem hagy ki helyet, és mindig van valahol, diszkrét időskála alapján nem tudhatjuk, hogy hol van a pont, ha egyszerre több tératomot halad egy időatom alatt. Valahol lennie kell, de feltételeztük, hogy egyszerre több helyen nem lehet. Ez viszont ellentmond annak, hogy egy időatom alatt több tératomot halad. Amennyiben viszont a pont lassabban halad, mint a maximális sebesség, akkor némelyik két szomszédos időponthoz egyazon hely tartozik, ami viszont a folyamatos haladás kikötését sérti meg. Ha ezt elvetjük, akkor a lassabb sebességeknek a pont szaggatott előrehaladása, majd a sebességtől függően hosszabb-rövidebb ideig való egyhelyben maradása fog megfelelni.<sup>16</sup> Ekkor a pont ilyen sajátos, szaggatott módon a maximális sebességgel, vagy annál lassabban haladhat. A helyet nem determinisztikus jellemzőként, hanem valószínűségi eloszlásfüggvényként értelmezve talán a folyamatos haladásnak is tulajdoníthatunk értelmet ebben a diszkrét világban.

András Ferenc  
ferenc@andrases.hu

<sup>16</sup> A gondolat kiinduló pontja: Ruzsa Imre, *A matematika néhány filozófiai problémájáról*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1966, 65–66 o.

## A BME KÉMIAI FIZIKA TANSZÉKÉNEK HELYZETE

A Budapesti Műszaki Gazdasági és Egyetem Kémiai Fizika Tanszék oktatói évtizedek óta oktatják a fizikát a Vegyészmérnöki Karon. Kutatási területünk a nemlineáris dinamika és termodinamika. Most a Fizika Intézet igazgatója szeretné felszámolni tanszékünket.

Az ezzel kapcsolatos részletekről, fejleményekről honlapunkon, a <http://www.fke.bme.hu> címen tájékoztatást

adunk. Ugyanott található egy *Petíció* is, amelyet eddig több mint 800-an írtak alá: <http://www.petitiononline.com/kemfizpe/petition.html>

Köszönetünket fejezzük ki azon kollégáknak, akik már aláírták a *Petíció*t. Egyúttal várjuk a további támogatásokat.

Noszticzius Zoltán tanszékvezető  
Farkas Henrik<sup>†</sup> tanszékvezető-helyettes

## KITÜNTETÉS AUGUSZTUS 20. ALKALMÁBÓL

A Magyar Tudományos Akadémia elnökének előterjesztésére augusztus 20-a, Államalapító Szent István Király ünnepe alkalmából a *Sólyom László*, Magyar Köztársaság elnöke KARDON BÉLÁ-nak, a fizikai tudomány doktorának, az MTA Titkársága Nemzetközi Tudományos Kapcsolatok Főosztálya nyugállományú főosztályvezetőjének a *Magyar Köztársasági Érdemrend lovagkeresztjét* adományozta, négy évtizedes kutatói munkássága, valamint a Magyar Tudományos Akadémia nemzetközi tudományos kapcsolatainak kialakítása és szervezése érdekében végzett tevékenysége elismeréseként. (MTA hírek)



Ide egy paksi hirdetés  
kerül majd