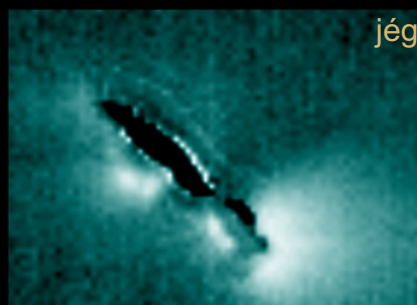
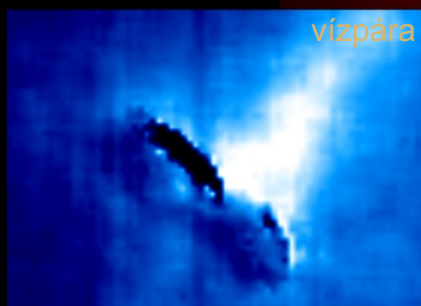
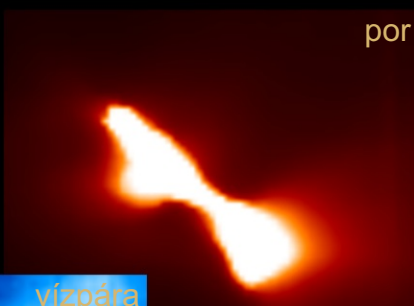


# fizikai szemle



2010/12



Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat  
havonta megjelenő folyóirata.  
Támogatók: A Magyar Tudományos  
Akadémia Fizikai Tudományok Osztálya,  
a Nemzeti Erőforrás Minisztérium,  
a Magyar Biofizikai Társaság,  
a Magyar Nukleáris Társaság  
és a Magyar Fizikushallgatók Egyesülete

Főszerkesztő:

Szatmáry Zoltán

Szerkesztőbizottság:

Bencze Gyula, Czitrovsky Aladár,  
Faigel Gyula, Gyulai József,  
Horváth Gábor, Horváth Dezső,  
Iglói Ferenc, Kiss Ádám, Lendvai János,  
Németh Judit, Ormos Pál, Papp Katalin,  
Simon Péter, Sükösd Csaba,  
Szabados László, Szabó Gábor,  
Trócsányi Zoltán, Turiné Frank Zsuzsa,  
Ujvári Sándor

Szerkesztő:

Füstöss László

Műszaki szerkesztő:

Kármán Tamás

A folyóirat e-mail címe:

szerkesztok@fizikaiszemle.hu

A lapba szánt írásokat erre a címre kérjük.

A folyóirat honlapja:

<http://www.fizikaiszemle.hu>

A címlapon:

**Az EPOXI szonda 700 km távolságból készített felvétele a Hartley 2-üstökös magjáról. A 2010. november 4-én készült képen meglepetésre a Nap által nem melegített oldalon is láthatók porkilövellések. A mindössze 2 km hosszú és 0,5 km vastag Hartley 2 az eddigi legkisebb üstökös, amelyet űrszondával közelről vizsgáltak. (NASA/JPL-Caltech)**

## TARTALOM

<i>Szalai Tamás:</i> Porgyártó(?) szupernóvák	399
<i>Woynarovich Ferenc:</i> Hogyan is mozog egy tömeges rugó? – I.	404
<i>Tél András, Tél Tamás:</i> Egy reménytelennek tűnő vezérlési probléma a klasszikus és modern fizika határán	409

### A FIZIKA TANÍTÁSA

<i>Wiedemann László:</i> Középiskolai demonstrációs kísérletek elemzése	416
<i>Baló Péter:</i> A fizikus kertje, avagy a mechanika tanításának egy új megközelítése	423
Az Országos Szilárd Leó Fizikaverseny meghirdetése a 2010/2011. tanévre	425

### HÍREK – ESEMÉNYEK

Somogyi Antal, 1920–2010 ( <i>Erdős Géza, Kecskeméty Károly, Király Péter</i> )	427
Toró Tibor, 1931–2010 ( <i>Dézsi István</i> )	428
<i>Németh Judit:</i> Búcsú Toró Tibortól	429

*T. Szalai:* Supernova stars as sources of cosmic dust

*F. Woynarovich:* What kind of motion will a spring of finite mass display? – I.

*A. Tél, T. Tél:* A seemingly hopeless problem of control at the border between classical and modern physics

### TEACHING PHYSICS

*L. Wiedemann:* Analysis of secondary school physics demonstration experiments

*P. Baló:* The physicist's garden – a new way of teaching mechanics

### EVENTS

Antal Somogyi, 1920–2010 (*G. Erdős, K. Kecskeméty, P. Király*)

Tibor Toró, 1931–2010 (*J. Dézsi*)

*J. Németh:* Tibor Toró

*T. Szalai:* Supernova-Sterne als Staubquellen im Weltall

*F. Woynarovich:* Wie eigentlich bewegt sich eine Feder endlicher Masse? – I.

*A. Tél, T. Tél:* Ein hoffnungslos erscheinendes Problem der Steuerung an der Grenze zwischen klassischer und moderner Physik

### PHYSIKUNTERRICHT

*L. Wiedemann:* Eine Analyse von Demonstrationsexperimenten der Mittelschulphysik

*P. Baló:* Der Garten des Physikers – eine neue Art, Mechanik zu lehren

### EREIGNISSE

Antal Somogyi, 1920–2010 (*G. Erdős, K. Kecskeméty, P. Király*)

Tibor Toró, 1931–2010 (*J. Dézsi*)

*J. Németh:* Tibor Toró

*T. Салаи:* Сверхновые звезды как источники пыли в космосе

*Ф. Войнарлович:* Движение пружины конечной массы? – I.

*A. Тэл, Т. Тэл:* Безнадёжной кажущаясь проблема управления на грани между классической и современной физик

### ОБУЧЕНИЕ ФИЗИКЕ

*Л. Видеманн:* Анализ демонстрационных экспериментов по физике в средних школах

*П. Балло:* Сад физика или же новый подход к обучению механики

### ПРОИСХОДЯЩИЕ СОБЫТИЯ

Антал Шомоди, 1920–2010 (*Г. Эрдеи, К. Кечкемети, П. Кирай*)

Тибор Торо, 1931–2010 (*И. Дежи*)

*Й. Немец:* Тибор Торо

**Fizikai Szemle**  
MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

megjelenését anyagilag támogatják:



**nka**  
Nemzeti Kulturális Alap

**mym**  
paksi atomerőmű

**NCA**  
Nemzeti Civil Alaprogram



# Fizikai Szemle

## MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A Matematikai és Természettudományi Értesítőt az Akadémia 1882-ben indította  
A Matematikai és Fizikai Lapokat Eötvös Loránd 1891-ben alapította

LX. évfolyam

12. szám

2010. december

## PORGYÁRTÓ(?) SZUPERNOVÁK

Szalai Tamás  
SZTE Optikai és Kvantumelektronikai Tanszék

*Régóta közismert, hogy a szupernóva-robbanások alapvető szerepet játszanak a kozmikus nukleoszintézisben és a csillagfejlődésben; emellett a nagyenergiájú fizikai folyamatok űrbeli „laboratóriumaiként” és a kozmikus távolságmérés alappilléreiként is nagyfokú tudományos érdeklődésre tartanak számot [1, 2]. Ennek megfelelően a csillagrobbanások napjaink asztrofizikájának kiemelt fontossággal vizsgált jelenségei közé tartoznak – ezzel együtt számos tulajdonságukat továbbra is homály fedi.*

### Bevezetés

Jelenlegi tudásunk szerint a szupernóvák két fő kategóriába sorolhatóak. Az egyik esetben (Ia típus) egy kettős rendszerben lévő – a társobjektumtól való anyagelszívás miatt a Chandrasekhar-féle kritikus tömeghatárt átlépő – fehér törpecsillag termonukleáris robbanását látjuk, míg a másik esetben egy nagy tömegű (a Napénál legalább nyolcszor nagyobb kezdeti tömegű) csillag magjának gravitációs összeomlása (kollapszusa) a végső robbanás kiváltó oka – utóbbiakat összefoglaló néven *kollapszár szupernóvák*-nak is nevezzük (színképi besorolásuk Ib, Ic vagy II, lásd [1, 2]). Bár úgy tűnik, hogy az alapvető információk a birtokunkban vannak, rengeteg még a tisztázandó részlet; például, hogy van-e átmenet az egyes kollapszár-kategóriák között, vagy hogy léteznek-e a leírtaktól eltérő módon – például fehér törpék összeolvadása révén – bekövetkező robbanások.

A fentebb vázolt kérdések mellett hosszú ideje tart a vita arról, hogy vajon a számos asztrofizikai folyamatban (a molekulaképződésben, a fény-anyag kölcsönhatásokban vagy a bolygókeletkezésben) fontos tényezőnek számító csillagközi porszemcsék kialakulásában is szerepet játszanak-e a szupernóvák, és ha igen, mekkora mértékben.

A kutatásokat az OTKA 76816 sz. pályázata támogatja.

Porból lettünk, porrá leszünk...  
De honnan lett a por?

A csillagközi térben lévő por (amelyet jellemzően néhány tízed és néhány mikrométer közötti átmérőjű, szilikátokból, amorf szénből, grafitból, illetve fémoxidokból álló szemcsék alkotnak) mennyisége az interstelláris anyagnak nem elhanyagolható része (mintegy 1 százalék), kialakulása azonban külső hatás nélkül nem megy végbe. A szűkebb kozmikus környezetünkben végzett megfigyelések alapján a csillagközi porszemcsék elsődleges forrásai a Napunkhoz hasonló, kis tömegű csillagok késői fejlődési szakaszában, a Hertzsprung–Russell-diagramon az *aszimptotikus óriáságnak* (asymptotic giant branch, AGB) megfelelő állapotban lévő égitestek. Ezekben a csillagokban rendkívül intenzívek a konvekciós folyamatok, amelyek révén a fúziós reakciók során kialakult szén- és oxigénatomok egy része a csillaglégkörbe, onnan pedig – az atmoszféra nagy kiterjedése miatt fellépő, folyamatos anyagkiáramlás révén – a csillag körüli térbe kerül, ahol a megfelelően alacsony (legfeljebb 2500 K) hőmérsékleten megtörténhet a szemcséképződés. Egyedüli, jelentős porforrásokként betöltött szerepük mindazonáltal erősen kérdéses. Számos megfigyelés utal arra, hogy már a fiatal, néhány százmillió éves galaxisok portartalma is jelentős, ami viszont nehezen kapcsolható az AGB-csillagokhoz; ezen állapot eléréséhez ugyanis a kis tömegű csillagoknak legalább egymilliárd évre van szükségük.

Eszerint tehát további forrásoknak is létezniük kell, amelyek közül jelenleg a kollapszár szupernóvák tűnnek a legígéretesebb jelölteknek. A csillagrobbanások és a porképződés lehetséges kapcsolata – a szupernóvák sugárzásában kimutatott infravörös sugárzási többlet magyarázataként – már évtizedekkel ezelőtt felvetődött. A korai hipotéziseket később saját rendszerünkön belüli bizonyítékokkal sikerült alátá-

masztani: egyes meteoritokban talált anomális izotóp-arányok arra engedtek következtetni, hogy a bolygóközi tér porszemcséinek egy része jóval Naprendszerünk keletkezése előtt, szupernóva-robbanások környezetében jött létre. A kollapszár szupernóvaként felrobbanó, nagy tömegű csillagok átlagos élettartama jóval rövidebb (1–100 millió év), mint kisebb tömegű társaiké, így ezek a csillagrobbanások jelentős szerepet tölthettek be a korai Univerzum (és talán a későbbi időszakok) porképződési folyamataiban. Vannak ugyan más lehetőségek is a távoli galaxisok meglepően nagy portartalmának magyarázatára (például az úgynevezett aktív galaxismagok centrumaiban lévő, több milliárd naptömegű fekete lyukak környezetéből kiáramló anyagban bekövetkező szemcséképződés), de több esetben egyedül a szupernóvák feltételezett portermelési rátája tűnik elegendőnek a megfigyelésekből interpretált pormennyiség magyarázatára.

## Szupernóvák és porképződés

A legnagyobb probléma ugyanakkor éppen a szupernóvák környezetében becsült, illetve kimutatott pormennyiségével kapcsolatos. A különböző elméleti tanulmányok egységesen 0,1–1 naptömegnyi, frissen keletkező port jósolnak, ami – figyelembe véve az egyes galaxisokban felrobbanó szupernóvák becsült számát – nagyjából fedezi a távoli galaxisok feltételezett pormennyiségét. Az újabb modellek esetében azt is figyelembe vették, hogy a kondenzálódó porszemcsék mekkora része marad meg, illetve szublimálódik a robbanást követően terjedő lökéshullámfrontok és a csillag körüli anyag kölcsönhatásai következtében.

A robbanás utáni porképződés első megfigyelési bizonyítékai a Nagy Magellán-felhőben felfényllett, híres SN 1987A szupernóvához köthetőek:

- az optikai színképvonalak fluxusának csökkenése a robbanást követő 500. nap környékén;
- a közép infravörös tartományban mért fluxusértékek ezzel egyidejűleg bekövetkező növekedése;
- az optikai emissziós vonalak növekvő kékeltoadása, illetve aszimmetrikussá válása (a színképvonalak vörös oldali, a maradványtól távolodó részéből származó komponense az újonnan képződő porszemcsék általi abszorpciója, illetve szórása következtében gyengül).

Az utóbbi effektust később két másik szupernóva esetében is megfigyelték, de a valódi előrelépést a Spitzer-űrtávcső 2003-as felbocsátása hozta meg. Az infravörösben észlelt első, viszonylag jó felbontású és nagy érzékenységgel üreszköz segítségével több szupernóva környezetében sikerült többletsugárzást detektálni a közép infravörös tartományban, ami legegyszerűbben porszemcsék hőmérsékleti sugárzásával magyarázható. A meglepetést az okozta, hogy – akár csak az SN 1987A esetében – a mért fluxusokból számolható portömegek több nagyságrenddel alacsonyabbnak ( $\sim 10^{-4}$ – $10^{-5}$  naptömeg) adódtak az elméletileg vártnál.

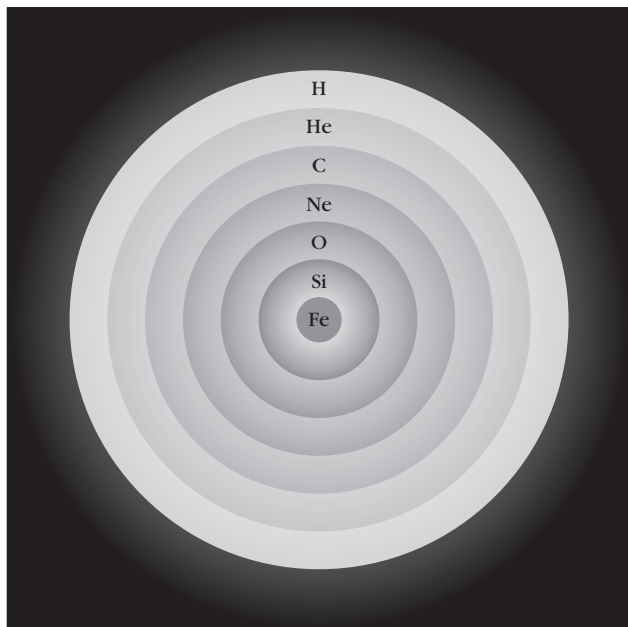


1. ábra. Az NGC 2403 jelű spirálgalaxisban feltűnt SN 2004dj szupernóva a Hubble-űrtávcső felvételén.

A friss portömeg becsülésénél további bizonytalansági tényező, hogy a felrobbanó csillagok környezetében elvileg nem csak a közvetlenül a robbanás következményeként keletkező port lehet megfigyelni. Egy másik lehetőség, hogy a robbanás előtt, a szülőcsillag tömegvesztési folyamatai révén a csillag körüli térbe kerülő anyag a szupernóva erős sugárzása miatt felfűtődik, a benne lévő porszemcsék pedig az elnyelt plusz energiát infravörös tartományban sugározzák ki. A jelenséget a szakirodalomban *infravörös visszfénynek* (*IR echo*) is nevezik, amelyet néhány szupernóva esetében a detektált közép infravörös excesszus – egyedüli vagy részbeni – okaként jelöltek meg. Az utóbbi elmélet elfogadása azt a képet erősíti, miszerint nem maguk a szupernóva-robbanások, hanem azok szülőcsillagai tölthetnek be fontos szerepet a Világegyetem portermelésében.

A kérdést – egyelőre – az idősebb szupernóva-maradványok vizsgálata sem segít tisztázni. Ezekben a több száz, vagy akár több ezer éves, hatalmas, kihűlt gázfelhőkben a porszemcsék hőmérséklete már jóval alacsonyabb, mint a robbanást követő időszakban, ezért termális sugárzásuk detektálására távoli infravörös, illetve szubmilliméteres tartományban van esély. Az eddigi eredmények meglehetősen ellentmondásosak, a becsült pormennyiségek 0,001 és 3 naptömeg között változnak. A feladatot nehezíti, hogy az idős szupernóva-maradványok nagy mérete és inhomogén sűrűségeloszlása miatt bonyolult elválasztani egymástól a bennük, valamint a közöttük húzódó csillagközi térben lévő porszemcsék hozzájárulását az észlelt sugárzáshoz.

Az elméleti munkák és a megfigyelések között feszülő ellentétek feloldására többféle elképzelés létezik. A modellek egy részében a szupernóvák környezetében lévő port nem homogén, hanem inhomogén („csomós”) térbeli eloszlással kezelik – ez pedig legalább egy nagyságrenddel megnövelheti a korábbi tömegbecslések eredményeit (ugyanakkor ezen modellek megalkotása meglehetősen bizonytalan). Fel-



2. ábra. Egy kollapszár szupernóva szülőcsillagának robbanás előtti állapota. A különböző fejlődési szakaszokban kialakult elemek hagymahéjszerű rétegekben helyezkednek el – a robbanás lefolyása nagymértékben függ attól, hogy a hidrogén- és héliumréteg mekkora részét veszti el a csillag még a robbanás előtt (forrás: en.wikipedia.org).

vetődött az is, hogy a fiatal Univerzumban a becsültnél több nagy tömegű csillag lehetett, s így több szupernóva robbanhatott fel. Az utóbbi időkben ugyanakkor megjelentek olyan cikkek is, amelyek rávilágítanak a távoli, halvány galaxisok – általában meglehetősen alacsony jel/zaj arányú – megfigyelési adatainak bizonytalanságaira, egyúttal megkérdőjelezik a fiatal galaxisokban becsült portartalom magas értékét is.

A fentiekből kiderült, hogy a szupernóvához köthető porkeletkezés izgalmas, ugyanakkor kérdőjelekkel teli kutatási terület. Ebben nagy szerepet játszik a részletes analízisek alacsony száma, ezért minden egyes objektum egyedi vizsgálata fontos információkhoz juttathatja a kutatói közösséget. Csoportunk az arra ösztönözte, hogy részletesen vizsgálja az általunk a kezdetektől fogva tanulmányozott, SN 2004dj jelű szupernóva környezetében zajló porképződési folyamatokat [3].

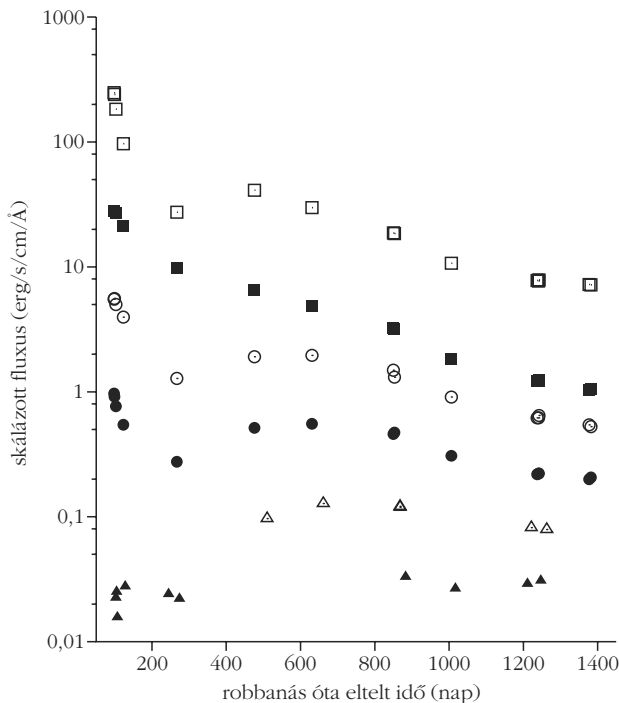
## Egy „állatorvosi ló”: az SN 2004dj

Az utóbbi 17 év legfényesebb, legközelebbi ismert szupernóvját, az SN 2004dj-t egy japán amatőr csillagász, *Koichi Itagaki* fedezte fel 2004 júliusában (1. ábra). Hamarosan kiderült, hogy a mintegy 11,4 millió fényév távolságban lévő, NGC 2403 jelű galaxisban feltűnt szupernóva szülőcsillaga egy korábban azonosított kompakt csillaghalmaz, a Sandage-96 egyik tagja. A halmaz és a 12 és 20 naptömeg közé eső szuperóriás szülőcsillag fontosabb paramétereit a Szegedi Tudományegyetem szupernóva-kutató csoportjának vezetésével sikerült meghatározni [4, 5].

Az SN 2004dj a IIP (*plató*s) szupernóvák közé tartozik, amelyeknél – jelenlegi ismereteink szerint – a legintenzívebb porképződés várható. Ezek a csillagok a robbanás előtti időszakban nagyrészt megőrizték a külső hidrogén- és héliumrétegüket, így spektrumukban erősek a hidrogénvonalak. Felfényesedésüket több hétig tartó, közel konstans fényesség – a fénygörbén plató – követi, amely a robbanáskor ionizálódó hidrogénatomok folyamatos rekombinációjának következménye (ekkor gyakorlatilag egy, a maradvány belseje felé mozgó frontot – *rekombinációs hullám* – látunk; ennek közel állandó hőmérséklete miatt észlelünk állandó intenzitású sugárzást az adott időszakban). A IIP típusú szupernóváknál a szemcsképződésben részt vevő atomok (C, O, Si) mélyebben lévő rétegekből származnak (2. ábra); mivel a szupernóva-maradványok homológ módon tágnak (azaz a rétegek sebessége a középponttól való távolság arányában nő), az említett elemek kidobódási sebessége relatíve alacsony, ami nagy arányú kondenzációt tesz lehetővé. Az elméleti modellek alapján a IIP-szupernóvák környezetében nem csak a kondenzációs hatások, hanem – a szülőcsillagok kismértékű tömegvesztése miatti, az átlagosnál ritkább csillag körüli anyagnak köszönhetően – a szemcsék „túlélési rátája” is magas.

Az SN 2004dj közép-infravörös tartományba eső sugárzásának időbeli fejlődését a Spitzer több mérési program során is nyomon követte; az első körülbelül 150 nap adatainak elemzését publikálták is [6]. Csoportunk a porképződés szempontjából fontosabbnak vélt későbbi (jelen esetben egészen a robbanást követő 1381. napig terjedő) időszak adatait is elemezte. Ehhez a Spitzer mindhárom detektorának (*IRAC* – InfraRed Array Camera; *MIPS* – Multiband Imaging Photometer for Spitzer; *IRS* – InfraRed Spectrograph) adatait felhasználtuk, amelyeket az infravörös-űrtávcső publikus adatbázisából [7] töltöttünk le. A Spitzer munkacsoport által fejlesztett, valamint egyéb, konvencionális csillagászati szoftverekkel történt kiértékelés révén csaknem négy éven átívelő fotometriai (öt keskeny és egy széles sávú csatorna, 3,6–24  $\mu\text{m}$ ) és spektroszkópiai (5–14  $\mu\text{m}$ ,  $\lambda/\Delta\lambda \sim 100$ ) adatsorokat kaptunk, amelyek több szempontból is alátámasztják az SN 2004dj körüli porképződést.

Az IRAC 3,6, 5,8 és 8,0  $\mu\text{m}$ -es csatornáin felvett fénygörbéken a 400. nap környékén egyértelmű „púpok” jelennek meg (3. ábra). Az ilyen jellegű, késői időszakban megfigyelhető közép-infravörös többletsugárzás a por jelenlétének igen erős bizonyítéka. A többletet jelző csúcsok időben eltolódva jelennek meg a rövidebbtől a hosszabb hullámhosszak felé haladva, ami jól leírható a maradványban frissen képződő, folyamatosan hűlő porszemcsék hőmérsékleti sugárzásával. Sajnos a MIPS-adatok között nem szerepel az ebben a kritikus időszakban történt mérés, bár a 24  $\mu\text{m}$ -en, a 800. nap után mért fluxusoknál is megfigyelhető egy csekély többlet a 100–300. nap között mért értékekhez képest. Ugyanakkor a 4,5  $\mu\text{m}$ -es csatornáin felvett fénygörbe nem mutat semmilyen ki-

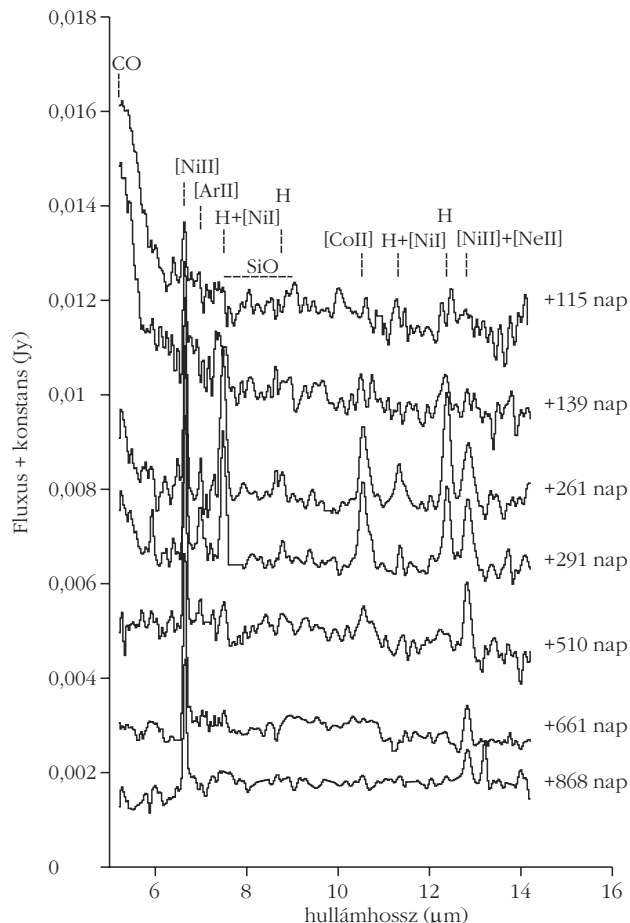


3. ábra. Az SN 2004dj fénygörbéi: IRAC (3,6  $\mu\text{m}$  – üres négyzetek, 4,5  $\mu\text{m}$  – telt négyzetek, 5,8  $\mu\text{m}$  – üres körök, 8,0  $\mu\text{m}$  – telt körök), IRS Peak-up Imaging 13–18,5  $\mu\text{m}$  (üres háromszögek) és MIPS 24,0  $\mu\text{m}$  (telt háromszögek).

emelkedést. Ennek legvalószínűbb magyarázata a korai IRS-spektrumokon (4. ábra) jól látszó CO 1-0 vibrációs átmenet (4,65  $\mu\text{m}$ ), ami jelentős hozzájárulást ad a 4,5  $\mu\text{m}$ -en mért fluxushoz. Körülbelül 500 nap után a CO emissziós vonala eltűnik, és a 4,5 mikronos fénygörbe alakja is hasonlóvá válik a többi IRAC-csatornán felvett görbééhez.

A középínfravörös színképek teljesen megfelelnek a tipikus IIP-szupernóvák úgynevezett *nebuláris fázis*-ára jellemző színképeinek: a lapos kontinuum, az emisszióban lévő hidrogénvonalak és tiltott vonalak ([Ni I], [Ni II], [Co II], [Ar II]) jelenléte hasonlít a planetáris ködök színképére, azaz egyre ritkuló, táguló gázfelhőben jönnek létre (innen a nebuláris elnevezés). Az SN 1987A-hoz hasonlóan, a  $\sim 300$ . nap után az emissziós vonalak nagy része kezd eltűnni, ami szintén magyarázható a friss porképződéssel (egészen pontosan az optikai átlátszóság emiatt bekövetkező csökkenésével). Érdekesség, hogy a korábbiakban vizsgált, hasonló szupernóvákkal ellentétes módon az SN 2004dj spektrumában nyoma sincs a 8–10  $\mu\text{m}$  környékén várt, erős SiO-sávnak; ez a hiány pedig fontos lépésként szolgált a porösszetétel meghatározására végzett későbbi munkában.

Azokra az időszakokra, amelyeken belül mind az IRAC, mind a MIPS detektorral készült mérés, előállítottuk az SN 2004dj középínfravörös sugárzásának spektrális energiaeloszlásait (SED); az értékeket mind az interstelláris anyag okozta fénygyengülés hatásaira, mind a szülőhalmaz járulékanak levonásával korrigáltuk. Hogy meg tudjuk becsülni a por fizikai paramétereit és össz tömegét, analitikus és numerikus modellekből származó, elméleti görbéket illesz-



4. ábra. Az SN 2004dj nebuláris fázisából származó színképek a Spitzer/IRS detektor mérései alapján.

tettünk a mérésekből származó SED-ekre. Az analitikus modellben [8, 9] a porkeletkezési területet egy homogén, konstans sűrűségű gömbként kezeltük, amelynek luminozitása a következő formulával adható meg:

$$I_{\nu} = 2\pi^2 R^2 B_{\nu}(T) \frac{2\tau_{\nu}^2 - 1 + (2\tau_{\nu} + 1)\exp(-2\tau_{\nu})}{\tau_{\nu}^2},$$

ahol  $R$  a porkeletkezés helyét jelző gömb sugara egy adott időpontban,  $B_{\nu}(T)$  a Planck-függvény  $T$  átlagos porhőmérsékleten véve,  $\tau_{\nu}$  pedig az optikai mélység értéke  $\nu$  frekvencián. A porszemcsék méreteloszlására  $dn = k a^{-m} da$  hatványfüggvény alakú eloszlást [10] alkalmaztunk, ahol  $dn$  az  $a$  és  $a+da$  közötti sugarú szemcsék számsűrűsége,  $k$  pedig konstans. Modelljeinkben a port – a már említett szilikáthiány okán – a szintén gyakori összetevőként ismert amorf szén-szemcsék halmazának, míg a porképződési zónát egyenletesen, homológ módon táguló gömbnek tekintettük (ennek a különböző időpontokra vett sugarát a táguló maradvány nebuláris fázisban mért maximális sebességéből – körülbelül 3250 km/s – számoltuk ki).

A 849–883. nap közötti időszakra vonatkozó, legjobb SED-illesztés az 5. ábrán szerepel. Jól látható, hogy az egy komponensű Planck-görbe nem illeszke-

1. táblázat

**Az SN 2004dj spektrális energiaeloszlásaira legjobban illeszkedő  
analitikus modellek paramétereit**

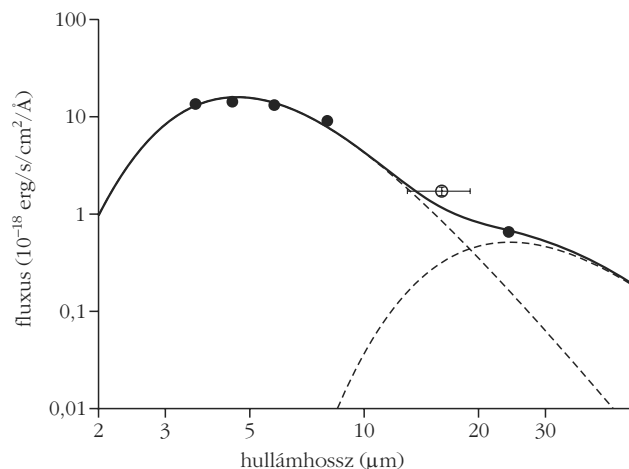
Epocha (nap)	$T_{meleg}$ (K)	$R_{meleg}$ ( $10^{16}$ cm)	$T_{hideg}$ (K)	$R_{hideg}$ ( $10^{16}$ cm)	Portömeg ( $10^{-5} M_{Nap}$ )
267–275	710	0,75	186	1,5	0,31
849–883	530	2,48	120	4,3	1,11
1006–1016	462	2,85	110	4,6	1,32
1236–1246	424	3,88	103	6,2	1,39

A szimulációk során többféle szemcsesugarat ( $0,005\text{--}0,1\ \mu\text{m}$ ) és sűrűségeloszlást alkalmaztunk; az eredményül kapott portömegek  $10^{-5}\text{--}8\cdot 10^{-4}$  nap-tömeg tartományba estek. A legjobb illeszkedéseket – összhangban az elméleti jóslatokkal – akkor kaptuk, amikor a nagyobb ( $0,05\text{--}0,1\ \mu\text{m}$  sugárú) porsemcsék jelenléte dominált.

dik jól a megfigyelt adatokra, mivel a  $24\ \mu\text{m}$ -es pontoknál szisztematikus alábecslést kapunk. Ezért egy hidegebb, nagyobb sebességgel táguló térrészben lévő komponens is belevettünk az illesztésekbe, amelyek így már jó eredményeket szolgáltattak. A legjobban illeszkedő modellgörbék paramétereit és a kiszámolt portömegeket az 1. táblázatban gyűjtöttük össze. A frissen keletkező, meleg port tartalmazó zóna átlagos hőmérséklete folyamatos csökkenést, a por tömege pedig – a vizsgált időszak vége felé lassuló ütemű – növekedést mutat, ami jól összeegyeztethető a fénygörbék alakjából feltételezett, a  $400\text{--}500$ . nap környékén kezdődő intenzív porképződéssel, illetve a szemcsék termális sugárzásának elméletileg várt időbeli változásával.

Mivel az analitikus modellből származó portömegek (az optikailag vékony közeget feltételező közelítés miatt) alsó tömeghatárnak tekinthetők, a por mennyiségét numerikus módszerekkel is megbecsültük. Számításainkhoz egy háromdimenziós radiatív transzfer kódot, a MOCASSIN-t (*MONte CARlo SimulationS of Ionized Nebulae*) használtuk [11]. A kód egy adott pontforrásból származó fotonok terjedését modellezi egy gömb alakú, ismert összetételű zónán keresztül, a megadott koordináta-rendszer pontjai mentén figyelembe véve a lehetséges fény-anyag kölcsönhatásokat (abszorpció, szóródás, újra kisugárzás).

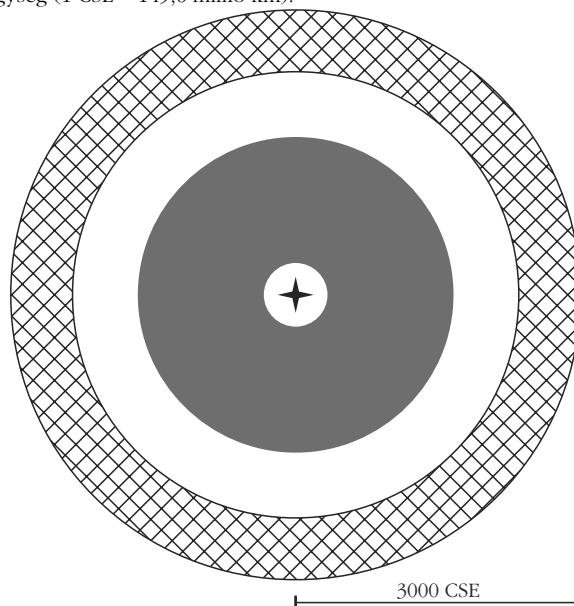
5. ábra. Az adatokra legjobban illeszkedő, kétkomponensű analitikus pormodell a robbanást követő 849–883. nap közötti időszakra számolva. A pontok hibái (körülbelül 10%) a körök méretén belül vannak. Az üres körrel jelölt, széles sávú fotometriai érték (IRS PUI) a nagy bizonytalanság miatt az illesztésekben nem szerepelt.



A táguló maradványban kondenzálódó szemcsék-nél távolabb elhelyezkedő, hidegebb komponens eredetének legvalószínűbb magyarázata a *hideg, sűrű héjban* (cool dense shell, CDS) végbemenő szemcsenkondenzáció. Korábbi tanulmányok feltételezték, hogy ebben, a robbanás következtében nagy sebességgel terjedő lökeshullámfrontok közötti, vékony térrészben a lökeshullámok és a csillag körüli anyag kölcsönhatásai szintén előidézhetik a kondenzációt. Jelen esetben a feltevést megerősíti, hogy korábbi, spektroszkópiai vizsgálatok [12] alapján a CDS-tartomány tágulási sebessége igen jól összeegyeztethető a mi modelljeink hideg porkomponensének méretével (1. táblázat).

Modellezéseink eredményei tehát megerősítik, hogy az SN 2004dj középinfravörös SED-jei megfelelően magyarázhatóak a szupernóva környezetében zajló, robbanás utáni porképződési folyamatokkal. A kapott portömegek hasonlóak a más kollapszár szupernóvák esetében megállapított alacsony értékekhez. A kép teljességéhez ugyanakkor hozzátartozik, hogy – a modellek bonyolultsága miatt – egyelőre nem végeztünk a porfelhők már említett, csomós eloszlását is figyelembe vevő számításokat; de a koráb-

6. ábra. Az SN 2004dj geometriai modellje a 850. nap környékén: a belső, szürke tartomány a meleg, a külső, négyzetácsos tartomány a hideg porkomponens elhelyezkedését jelöli; a CSE a csillagászati egység ( $1\ \text{CSE} = 149,6$  millió km).



bi eredmények alapján ezzel együtt is legfeljebb néhány ezred naptömeget kapnánk a por mennyiségére, ami továbbra is jóval kisebb az elméleti tanulmányokban prognosztizált tömegeknél.



Tanulmányunk összességében azt sugallja, hogy a szupernóva-robbanások – bár elméletileg a legmegalozottabb jelöltjei a kozmikus portermelésnek –, a megfigyelések alapján nem a várt mértékben járulnak hozzá az Univerzum portartalmának gyarapításához. Az előttünk álló években mind a szupernóvák vizsgálatában, mind a precíziós infravörös csillagászat területén ugrásszerű fejlődés bekövetkezését várjuk, ami segíthet végleg eldönteni a kérdést: vajon tényleg nem keletkezik sok por a szupernóvák környezetében, vagy csak eddig nem voltunk rá képesek, hogy mindet megtaláljuk.

## Irodalom

1. Vinkó J., Kiss L. L., Sárnecky K., Fűrész G., Csák B., Szatmáry K.: Szupernóvák. *Meteor Csillagászati Évkönyv 2001*, 218. <http://astro.u-szeged.hu/ismeret/szuperno/szuperno.html>
2. Vinkó J.: Távolagszmérés szupernóvával: tények és talányok. *Fizikai Szemle 56/7* (2006) 221. <http://www.kfki.hu/fszemle/archivum/fsz0607/vinko0607.html>
3. Szalai T., Vinkó J., Balog Z., Gáspár A., Block, M., Kiss L. L. *A&A* (2010) közlésre beküldve
4. Vinkó J. és mtsai, *MNRAS* 369 (2006) 1780.
5. Vinkó J. és mtsai, *ApJ*, 695 (2009) 619.
6. Kotak, R. és mtsai, *ApJ* 628 (2005) L123.
7. <http://irsa.ipac.caltech.edu/applications/Spitzer/SHA/>
8. Lucy, L. B., Danziger, I. J., Gouffes, C., Bouchet, P., in *Structure and Dynamics of the Interstellar Medium*. (ed. G. Tenorio-Tagle et al.) Springer, Berlin, 1989, 164.
9. Meikle, W. P. S. és mtsai, *ApJ* 665 (2007) 608.
10. Mathis, J. S., Rumpl, W., Nordsieck, K. H., *ApJ* 217 (1977) 425.
11. <http://mocassin.world-traveller.org/>
12. Chugai, N. N., Chevalier, R. A., Utrobin, V. P., *ApJ* 662 (2007) 1136.

# HOGYAN IS MOZOG EGY TÖMEGES RUGÓ? – I.

Woynarovich Ferenc  
MTA SZFKI

A villanyvasutat gyerekjátéknak találták ki, mégis sokan felnőtt fejjel is szívesen játszanak vele. Valahogy így vagyok én a tömeges rugó problémájával, ami egy tipikus tankönyvpélda lehetne, amennyiben a megoldásához szükséges megfontolások és módszerek részei a standard mechanika- és analíziskurzusoknak, mégis „felnőtt fizikusként” is örömmel foglalkozom a problémával. Először 1976-ban játszottam vele: kidolgoztam magamnak a normál módusokra alapozott megoldást. Ez annyira megtetszett, hogy Ortway-példát is gyártottam hozzá (amire egyébként nem jött teljes megoldás). Ezzel a dolog el is lett volna intézve, ha tán két éve egy KöMaL-példa kapcsán újra elő nem kerül. Többekkel beszélgettünk róla, aminek eredménye – jórészt *Groma István* (ELTE, TTK, Anyagfizikai Tanszék) ötlete alapján – egy újabb, a mozgó hullámfrontokat leíró megoldás lett. Mondanom sem kell, ehhez is született egy Ortway-példa (2009-ben, amire sajnos megint nem érkezett teljes megoldás). A jelen kézirat összeállítása közben tudtam meg, hogy a történet itt nem állt meg, a feladat többnek bizonyult mint egy nívós rejtvény: egyes elemei beépültek a fizikusok kontinuummechanika kurzusának anyagába. Nem tudom, hogy az érintett hallgatók mennyire szeretik, de remélem, meglátják szépségét, mint ahogy azok a kollégák is, akik elolvassák ezt a munkát.

## Bevezetés

Az évtizedek óta tartó tananyagcsökkentésnek szerencsére (még) nem esett áldozatul a harmonikus rezgőmozgás oktatása. E mozgás iskolapéldája az egyik

végénél rögzített, elhanyagolható tömegű rugó által mozgatott, véges tömegű test rezgése. Elvárás, hogy a tanulók tudják, ha a test tömege  $M$ , a rugóállandó pedig  $D$ , akkor a rezgésidő:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{D}}$$

A jobb diákok azt is tudják, hogy ha a rugónak is van mondjuk  $m$  tömege (ami azért jóval kisebb mint  $M$ ), azt úgy lehet figyelembe venni, hogy a rendszer effektív tömegének  $M_{\text{eff}} = M + m/3$ -at veszünk. A magyarázat nagyon szemléletes: feltételezve, hogy a rugó megnyúlása a mozgás során végig egyenletes, a rugó mentén a sebesség lineárisan nő, így ha az  $M$  tömeg sebessége  $v$ , a rugó kinetikus energiája  $mv^2/6$ , ami olyan, mintha  $M$  helyén  $M + m/3$  tömeg mozogna. Ugyanakkor az is nyilvánvaló, hogy megfontolásunk alapfeltevése, azaz a rugó egyenletes megnyúlása csak közelítés lehet: az egyenletesen megnyújtott vagy összenyomott rugó bármely darabjára mindkét irányban ugyanakkora erő hat, így az, mivel véges tömegű, nem gyorsulhatna. Az ellentmondás feloldása természetesen az, hogy a tömeges rugó megnyúlása a mozgás során nem egyenletes, és a rendszer mozgása általában annál összetettebb, mint hogy egy paraméterrel (az  $M$  kitérésével) jellemezhető legyen. Valójában a pontos leíráshoz a rugót mint egy egy-dimenziós, végtelen sok szabadsági fokú rugalmas közeget kell kezelnünk. Jelen cikk célja ennek bemutatása. Látni fogjuk, hogy a rendszer saját rezgései (normál módusai) állóhullámok, amelyek közül a legelső tényleg tág határok között jól közelíthető a fenti effektív



tömeges leírással, de ez a közelítés az egész mozgásra csak akkor elfogadható, ha a magasabb módusok csak kis súllyal gerjednek. Ez azonban a kezdeti feltételektől elég erősen függ, ahogy azt két egyszerű példán részletesebben is bemutatjuk. A rendszer hullámegyenlettel történő leírása lehetővé teszi a „tranziensek” vizsgálatát is, nevezetesen annak nyomom követését, hogy egy adott kezdeti feltételből időben hogyan fejlődik a mozgás. A vizsgált példák egyikét ebből a szempontból is elemezzük.

A kétféle leírás, azaz a normál módusok megadása, illetve a mozgás időfejlődésének követése, technikailag nagymértékben különbözik egymástól, ez természetes módon kínálja az anyag – terjedelme által amúgy is indokolt – két részre bontását.

## A mozgásegyenletek

Tegyük fel, hogy a  $D$  direkciós erejű,  $m$  tömegű és  $l$  hosszúságú rugó sima, vízszintes talajon fekszik, egyik vége egy falhoz van rögzítve, és a másik végén lévő  $M$  tömegű test a rugó tengelye irányában a rugóval együtt súrlódásmentesen mozoghat. Paraméterezzük a rugó egyes pontjait a rögzített végtől mérhető  $x$  egyensúlyi távolsággal, és jelöljük az egyes pontok (longitudinális) elmozdulását a  $t$  időpillanatban  $s(x, t)$ -vel! A rugó egészére jellemző  $m$  és  $D$  helyett az ezeknek megfelelő lokális mennyiségeket, azaz az egy dimenzióban értelmezett  $\rho = m/l$  sűrűséget, és a Young-modulus egydimenziós analogonjának megfelelő  $\varepsilon = Dl$  mennyiséget kell használnunk. Ez utóbbi jelentése: ha az  $x$  pontban a rugó relatív megnyúlása  $\partial s/\partial x$ , akkor abban a pontban a rugóban  $F(x) = \varepsilon \partial s/\partial x$  erő hat, azaz a rugónak az  $x$ -ben található két darabja ekkora erővel húzza egymást (lásd például *Widemann László* cikkét ebben a lapszámban). Ennek segítségével már felírható a rugó  $x$  és  $x+\Delta x$  közötti szakaszára vonatkozó Newton-egyenlet:

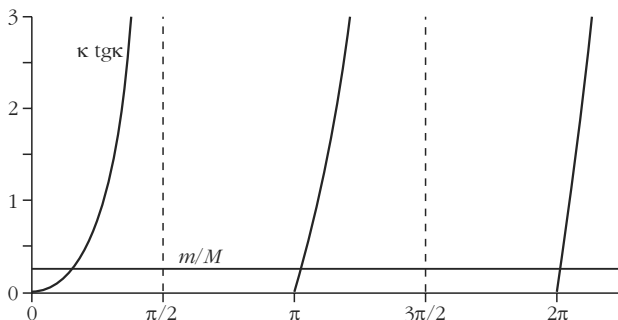
$$F(x+\Delta x) - F(x) = \rho \Delta x \ddot{s}(x, t),$$

ami végülis a

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

hullámegyenletet adja.

1. ábra. A (8) egyenlet grafikus reprezentációja.



Ebben a hangsebesség

$$c = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}} = \sqrt{\frac{Dl^2}{m}}. \quad (2)$$

A peremfeltételek az elrendezésből adódnak: egyrészt az  $x = 0$  vég rögzített, azaz

$$s(x=0, t) = 0, \quad (3)$$

másrészt az  $M$  tömeg mozgása követi Newton II. törvényét, tehát

$$-\varepsilon \frac{\partial s(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = M \frac{\partial^2 s(l, t)}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Ez utóbbi az (1) hullámegyenlet miatt ekvivalens a

$$-\frac{\rho}{M} \frac{\partial s(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l} \quad (5)$$

egyenlettel.

## A normál módusok

A megoldásokat

$$s(x, t) = \sin(kx) \sin(\omega t + \phi) \quad (6)$$

állóhullámalakban keressük. Ez kielégíti az (1) hullámegyenletet, ha

$$\omega^2 = c^2 k^2 \quad (7)$$

megfelel a rögzített végre vonatkozó (3) peremfeltételnek, és az  $M$ -re vonatkozó (4) Newton-egyenlet is teljesül, ha

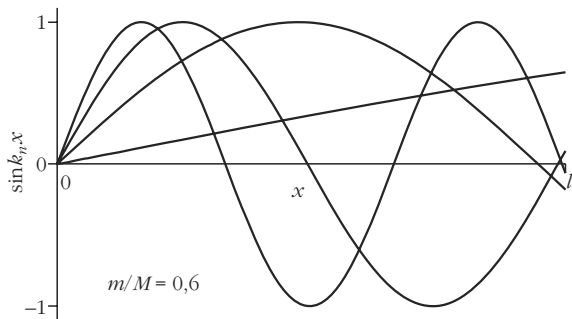
$$\kappa \operatorname{tg} \kappa = \frac{m}{M}, \text{ ahol } \kappa = kl. \quad (8)$$

Ez a két egyenlet – (7) és (8) – határozza meg a saját-frekvenciákat.

Ahogy az az 1. ábrán látható, a megoldások az  $M \rightarrow 0$  limeszben megfelelnek az egyik végén szabad rugalmas rúd longitudinális rezgéseinek ( $\kappa_n = [n+1/2]\pi$ ), az  $M \rightarrow \infty$  határeset pedig olyan, mintha mindkét vég rögzített lenne ( $\kappa_n = n\pi$ ). Nyilván a közbülső esetek az érdekesek, amikor  $0 < \xi_n = \kappa_n - n\pi < \pi/2$ . Ezekben a megoldások akár numerikusan,<sup>1</sup> akár  $m/M$  szerinti hatványsorok formájában megadhatók.<sup>2</sup> Különösen jól kezelhető az  $m \ll M$  eset, amikor is elég ezen hatványsorok első néhány tagját meghatározni.

<sup>1</sup> A  $\xi_n(i+1) = \arctg\left(\frac{m/M}{n\pi + \xi_n(i)}\right)$  rekurzió igen jól konvergál.

<sup>2</sup> Ha a  $\xi_n$ -t  $m/M$  szerinti hatványsor alakjában keressük, (8)  $\xi_n$  szerinti hatványsora segítségével az együtthatók tagról tagra tetszőleges rendig meghatározhatók.



2. ábra. A rugó (longitudinális) deformációjának alakja az első néhány normál módusban  $m/M = 0,6$  esetén.

Ekkor

$$\kappa_0^2 = \frac{m}{M} - \frac{1}{3} \left( \frac{m}{M} \right)^2 + \frac{4}{45} \left( \frac{m}{M} \right)^3 \dots, \quad (9)$$

$$\kappa_n = n\pi + \frac{1}{n\pi} \frac{m}{M} - \frac{1}{(n\pi)^3} \left( \frac{m}{M} \right)^2 \dots \quad (10)$$

$(n = 1, 2, \dots).$

A nulladik módus  $A_0$  „amplitúdóval”:

$$s_0(x, t) = A_0 \sin k_0 x \sin(\omega_0 t + \phi_0). \quad (11)$$

Itt (2), (7) és (9) alapján

$$\omega_0^2 = \frac{D}{m} \kappa_0^2 = \frac{D}{M + m/3} \left\{ 1 + O \left[ \left( \frac{m}{M} \right)^2 \right] \right\} \quad (12)$$

és

$$\sin k_0 x = \frac{x}{l} \sin \kappa_0 \left[ 1 + O \left( \frac{m}{M} \right) \right], \quad (13)$$

tehát

$$s_0(x, t) \approx \mathcal{A}_0 \frac{x}{l} \sin(\omega_0 t + \phi), \quad (14)$$

$$\text{ahol } \mathcal{A}_0 = A_0 \sin \kappa_0.$$

Ez valóban olyan, mint egy  $M + m/3$  tömeg  $\mathcal{A}_0$  amplitúdójú rezgése egy  $D$  direkciós erejű ideális rugón, tehát a *nulladik módus* közelíthető az effektív tömeges leírással (mégpedig annál pontosabban minél kisebb az  $m/M$  tömegarány).

A többi ( $n \geq 1$ ) módus alakja

$$s_n(x, t) = A_n \sin k_n x \sin(\omega_n t + \phi_n), \quad (15)$$

ahol

$$k_n = \frac{n\pi}{l} + \frac{1}{n\pi l} \frac{m}{M} + O \left[ \left( \frac{m}{M} \right)^2 \right] \quad \text{és} \quad \omega_n = c k_n. \quad (16)$$

Ezek olyan állóhullámok, amelyekben rendre  $n$  cso-

mópont van, de a rugó  $x = l$  vége sem nem csomópont, sem nem duzzadási hely (2. ábra). Ezért a sin hullám amplitúdója nem azonos az  $M$  mozgásának amplitúdójával: ha az előbbi  $\mathcal{A}_n$ , az utóbbi  $A_n = A_n \sin \kappa_n$ . Megjegyzendő, hogy minél kisebb az  $m/M$  hányados, ezek a módusok annál jobban hasonlítanak a mindkét végén rögzített rugón lehetséges állóhullámokra.

Bár használni fogom ezt a kifejezést, tisztázni kell, hogy az egyes módusok a szokásos értelemben nem felharmonikusai egyik alacsonyabbnak sem, hiszen a frekvenciák hányadosa (esetleges véletlenekektől eltekintve) irracionális szám. Ebből következően több módus gerjesztése esetén a rugó mozgása csak *közeli-tőleg lehet periodikus*.

## A kezdeti feltételek illesztése

A normál módusok teljes rendszert alkotnak, tehát a rendszer minden mozgása leírható ezek szuperpozíciójaként:

$$s(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin k_n x \sin(\omega_n t + \phi_n). \quad (17)$$

Az  $A_n$ -eket és a  $\phi_n$ -eket úgy kell meghatározni, hogy az

$$\begin{aligned} s(x, t=0) &= s_0(x), \\ \frac{\partial s(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= v_0(x) \end{aligned} \quad (18)$$

kezdeti feltételek teljesüljenek, azaz

$$s_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \phi_n \sin k_n x, \quad (19)$$

$$v_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \omega_n \cos \phi_n \sin k_n x. \quad (20)$$

A  $\sin k_n x$  függvények az adott  $k_n$ -ek mellett az  $0 < x \leq l$  szakaszon önmagukban nem, de a tömegekkel súlyozva ortogonálisok. Ez esetünkben azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} \rho \int_0^l \sin k_n x \sin k_m x dx + M \sin k_n l \sin k_m l &= \\ &= \delta_{nm} \frac{1}{2} (m + M \sin^2 \kappa_n). \end{aligned} \quad (21)$$

Fontos megjegyezni, hogy ugyanakkor a rugóban lévő feszültségeket leíró deriváltak a tömeggel való súlyozás nélkül ortogonálisok lényegében ugyanazzal a normával:

$$\int_0^l \cos k_n x \cos k_m x dx = \delta_{nm} \frac{l}{2} \left( 1 + \frac{M}{m} \sin^2 \kappa_n \right) \quad (22)$$

A (21) ortogonalitást kihasználva (19) és (20) az

$$A_n \sin \phi_n = \frac{\rho \int_0^l s_0(x) \sin k_n x dx + M s_0(l) \sin \kappa_n}{\frac{1}{2} (m + M \sin^2 \kappa_n)} \quad (23)$$

és

$$A_n \omega_n \cos \phi_n = \frac{\rho \int_0^l v_0(x) \sin k_n x dx + M v_0(l) \sin \kappa_n}{\frac{1}{2} (m + M \sin^2 \kappa_n)} \quad (24)$$

egyenleteket adja.

*Megjegyzések:*

- Az  $s_0(x)$  olyan *folytonos* függvény, amelyre teljesül, hogy

$$x + s_0(x) > y + s_0(y), \text{ ha } x > y,$$

hiszen a rugó nem szakadt el, és az egyes részei nem is előzhetik meg egymást.

- $v_0(x)$ -nek nem kell folytonosnak lennie, de minden  $x$ -re teljesülnie kell, hogy

$$|v_0(x)| < c,$$

különben lökéshullámok alakulnak ki, amelyekre nem jó a hullámegyenlet.

Ezen feltételek teljesülése ugyan szükséges, de nem elegendő ahhoz, hogy a mozgás során ne forduljon elő valamilyen „katasztrófa”: ha például  $Mv^2/2 > Dl^2/2$ , akkor biztos, hogy a rugó úgy deformálódik, hogy arra a jelen leírás nem lehet érvényes (a rugó deformációja biztos nem írható le a lineáris erő-törvénnyel, hisz azt feltételezve még nulla hosszúságúra összenyomva sem képes az  $M$  tömeg energiáját elnyelni).

## A módusok energiája

A teljes energia

$$E = \int_0^l \left[ \frac{\epsilon}{2} \left( \frac{\partial s(x,t)}{\partial x} \right)^2 + \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial s(x,t)}{\partial t} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} M \left( \frac{\partial s(l,t)}{\partial t} \right)^2 \quad (25)$$

Behelyettesítve, és a (21–22) ortogonalitásokat kihasználva megkapjuk, hogy ez az egyes módusok energiájának az összege:

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \omega_n^2 \left( \frac{m}{2} + \frac{M}{2} \sin^2 \kappa_n \right) A_n^2 \quad (26)$$

Speciálisan a nulladik módusra (kis  $m/M$  esetén) igaz:

$$\frac{m}{2} + \frac{M}{2} \sin^2 \kappa_0 \approx \left( \frac{m}{3} + M \right) \sin^2 \kappa_0, \quad (27)$$

így annak az energiája

$$E_0 \approx \frac{1}{2} \omega_0^2 \left( \frac{m}{3} + M \right) A_0^2 \approx \frac{1}{2} D A_0^2. \quad (28)$$

Fontos megjegyezni, hogy (12–14) és (28) egyenletek csak a nulladik módusra vonatkoznak, és azt jelentik, hogy *ez a módus* jó közelítéssel (a különböző mennyiségek esetében  $O(m/M)$ , illetve  $O((m/M)^2)$  relatív hibával) úgy írható le, mint egy  $M + m/3$  tömeg  $A_0$  amplitúdójú rezgése egy  $D$  direkciós erejű ideális rugón. Viszont az, hogy a mozgás egésze mennyire jó közelítéssel helyettesíthető az alpmódussal, az attól függ, hogy az adott *kezdeti feltételek* mellett milyen súlyl vannak jelen a magasabb felharmonikusok.

## Két példa

A kezdeti feltételek jelentőségének a bemutatására két esetet részletesen is elemezzünk:

a) az  $M$  tömegnél fogva a rugót  $A$ -val kihúzzuk, majd magára hagyjuk, illetve,

b) az  $M$  tömegnek hirtelen (például ütközéssel) a rugó irányába eső  $v$  sebességet adunk.

*Megoldás az a) kezdeti feltétel mellett.*

Ebben az esetben

$$s_0(x) = A \frac{x}{l}, \quad (29)$$

$$v_0(x) = 0.$$

Ennek megfelelően (23) és (24) szerint minden  $\phi_n = \pi/2$ , és

$$A_n = \frac{2 m \sin \kappa_n}{m + M \sin^2 \kappa_n} \frac{1}{\kappa_n} A. \quad (30)$$

Minden módushoz megadható az  $M$  tömeg rezgésének az adott módushoz tartozó amplitúdója

$$A_n = A_n \sin \kappa_n = \frac{2 m \sin^2 \kappa_n}{m + M \sin^2 \kappa_n} \frac{1}{\kappa_n} A. \quad (31)$$

Tekintettel arra, hogy a  $t = 0$ -ban ezek összege az  $M$  tömeg aktuális, azaz  $A$  kitérése,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 m \sin^2 \kappa_n}{m + M \sin^2 \kappa_n} \frac{1}{\kappa_n} = 1 \quad (32)$$

kell, hogy legyen. Speciálisan kis  $m/M$  esetén (egy elég fáradságos, éppen ezért itt nem részletezett sorfejtés szerint)

$$\mathcal{A}_0 \approx \left[ 1 - \frac{1}{45} \left( \frac{m}{M} \right)^2 \right] A, \quad (33)$$

illetve

$$\mathcal{A}_n \approx 2 \left( \frac{m}{M} \right)^2 \frac{1}{(n\pi)^4} A, \text{ ha } n \geq 1. \quad (34)$$

Érdeemes megnézni az egyes módusokban tárolt energiát! Ha az  $A_n$ -eket behelyettesítjük az energiaképletbe

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \omega_n^2 \frac{2 m^2 \sin^2 \kappa_n}{m + M \sin^2 \kappa_n} \frac{1}{\kappa_n^4} A^2 \quad (35)$$

adódik. Ebből, felhasználva, hogy

$$\frac{\omega_n^2 m}{\kappa_n^2} = D, \quad (36)$$

az

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 m \sin^2 \kappa_n}{m + M \sin^2 \kappa_n} \frac{1}{\kappa_n^2} \frac{1}{2} D A^2 \quad (37)$$

összefüggést kapjuk, tehát az egyes módusokra eső energiahányad

$$\frac{E_n}{E} = \frac{2 m \sin^2 \kappa_n}{m + M \sin^2 \kappa_n} \frac{1}{\kappa_n^2}. \quad (38)$$

Figyelemre méltó, hogy

$$\frac{E_n}{E} = \frac{\mathcal{A}_n}{A}. \quad (39)$$

(Fontos, hogy az  $E_n$ -ekben nem csak a rezgő  $M$ , hanem a rugón kialakuló állóhullámok energiája is benne van, ezért lehetséges, hogy az  $\mathcal{A}_n$ -ek aránya azonos az  $E_n$ -ekével. Ilyen típusú azonosság csak speciális kezdeti feltételek mellett várható.)

*Megoldás a b) kezdeti feltétel mellett.*

Ez a kezdeti feltétel

$$s_0(x) \equiv 0, \quad v_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < l, \\ -v, & \text{ha } x = l. \end{cases} \quad (40)$$

Ennek megfelelően  $\phi = 0$ , és

$$A_n = - \frac{1}{\omega_n} \frac{2 M \sin \kappa_n}{m + M \sin^2 \kappa_n} v. \quad (41)$$

Minden módushoz rendelhető egy sebesség, ami az  $M$  tömeg rezgésének az adott módushoz tartozó sebességamplitúdója:

$$V_n = |A_n| \omega_n \sin \kappa_n = \frac{2 M \sin^2 \kappa_n}{m + M \sin^2 \kappa_n} v. \quad (42)$$

Mivel a  $t = 0$ -ban ezek összege az  $M$  tömeg aktuális  $v$  sebessége, most a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 M \sin^2 \kappa_n}{m + M \sin^2 \kappa_n} = 1 \quad (43)$$

összefüggésnek kell teljesülnie. Speciálisan kis  $m/M$  esetén

$$V_0 \approx \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{m}{M} \right) v, \quad (44)$$

és

$$V_n \approx \frac{2 m}{M} \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{n^2} v, \text{ ha } n > 0. \quad (45)$$

Ha az  $A_n$ -eket behelyettesítjük az energiaképletbe,

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 M \sin^2 \kappa_n}{m + M \sin^2 \kappa_n} \frac{1}{2} M v^2 \quad (46)$$

adódik, tehát a teljes energia az egyes módusokon

$$\frac{E_n}{E} = \frac{2 M \sin^2 \kappa_n}{m + M \sin^2 \kappa_n} \quad (47)$$

arányban oszlik el. Ebben az esetben

$$\frac{E_n}{E} = \frac{V_n}{v}. \quad (48)$$

A két eset összehasonlítására az 1. táblázatban foglaltuk össze néhány mennyiség értékét különböző tömegarányok mellett. A második sorban a  $\kappa_0$  értéke csak a teljesség kedvéért szerepel. A harmadik sorban  $T_0$  az alaplómódus rezgésideje, míg  $T_{\text{eff}}$  az  $M_{\text{eff}} = M + m/3$  effektív tömeggel számolt érték.  $[(E - E_0)/E]_a$  és  $[(E - E_0)/E]_b$  a rezgés teljes energiájából a felharmonikusokra eső rész relatív súlya az a), illetve b) kezdeti feltétel mellett. (A relatív eltéréseket, illetve súlyokat százalékban adtuk meg.) Szembetűnő, hogy a nulladik módus rezgésidejének  $T_{\text{eff}}$ -fel való közelítése egész nagy tömegarányig igen jó, még  $m = M$  mellett is kisebb mint 1% relatív hibát okoz. Hasonló módon tág határokig jó közelítésnek látszik az a) esetben a

1. táblázat				
Néhány adat a tömegarány függvényében				
$m/M$	0,1	0,3	0,6	1,0
$\kappa_0$	0,3111	0,5218	0,7051	0,8603
$(T_0 - T_{\text{eff}})/T_0$	0,01%	0,08%	0,29%	0,66%
$[(E - E_0)/E]_a$	0,02%	0,17%	0,60%	1,39%
$[(E - E_0)/E]_b$	3,26%	9,40%	17,6%	27,0%

teljes mozgás helyett csak a nulladik módussal számolni: még azonos tömegek esetén is több mint 98% súllyal a nulladik módus gerjed. Nem ez a helyzet a b) kezdeti feltételnél, amikor már  $m \sim 0,1M$  mellett is több mint 3%,  $m \leq 0,3M$  esetén pedig már közel 10% a felharmonikusok súlya. Annak, hogy egy adott tömegarány mellett a b) esetben nagyobb súllyal gerjednek a felharmonikusok, mint az a)-ban, igen szemléletes oka van: az a) kezdeti feltétel „hasonlít” a nulladik módusra, míg a b) nem. A nulladik módushoz tartozó elmozdulás közelít az egyenletesen növekvőhöz, így az a) esetben a magasabb módusoknak csak azért kell megjelenüniük, hogy a kettő közötti kis eltérést kompenzálják. Ugyanakkor az alaplómódushoz egy közel egyenletesen növekvő sebességeloszlás tartozik, így a b) esetben a felharmonikusoknak olyan súllyal kell gerjedniük, hogy az alaplómódus sebességét a végpont kivételével mindenütt nullára egészítsék ki. Ha itt is lenne egy  $vx/l$  sebességeloszlás a rugó mentén, az a) esethez hasonlóan nagy súllyal gerjedne a nulladik módus.

## Összefoglalandó az eddigieket

Elmondhatjuk: az egyik végén rögzített, tökéletesen rugalmas, de véges tömegű rugóból és egy hozzá erősített testből álló rendszer mozgását egy egy-dimenziós rugalmas közeg problémájaként tárgyaltuk. A rugót modellező rugalmas közeg mozgását egy szokásos hullámegyenlet írja le, amelyhez az egyik vég rögzítése, illetve a másik véghez csatlakozó test mozgását leíró Newton egyenlet peremfeltételként jelenik meg. Meghatároztuk a rendszer normál módusait és azt a szabályt, amellyel ezek a kezdeti feltételekhez illeszthetők. Két egyszerű, de lényegesen különböző kezdeti feltelt jelentő feladatban az alapharmonikus és a felharmonikusok viszonyát részletesen elemeztük. A mozgások leírása azzal lett volna teljes, ha a normál módusokat felösszegezzük. Ez az összegzés numerikusan bármikor, de analitikusan, zárt alakban csak extrém kis rugótömeg határesetben végezhető el. Szerencsére a rugó és a test mozgásának részletei más módon is felderíthetők. Ez lesz munkánk második részének tárgya.

# EGY REMÉNYTELENNEK TŰNŐ VEZÉRLÉSI PROBLÉMA A KLASSZIKUS ÉS MODERN FIZIKA HATÁRÁN

Tél András, BME, Mechatronika alapszak, III. évfolyam  
Tél Tamás, ELTE, Elméleti Fizikai Tanszék

A modern műszaki problémákban, így például a robotok tervezésekor gyakran lépnek fel irányítási, vezérlési feladatok. Ezek közül különösen érdekesek azok, amelyek során egy eredendően instabil állapotba kell eljuttatni a rendszert. Az alábbiakban bemutatunk egy első látásra reménytelennek tűnő mechanikai feladatot, amelynek megoldásához a modern fizika mára már klasszikussá vált eredményei adnak segítséget.

## A vezérlési feladat

Tekintsünk egy egyenes mentén harmonikus rezgőmozgást végző  $m$  tömegű testet, amelynek rugóállandója egy *előírt*  $D(t)$  függvény szerint változik időben. Az  $x(t)$  kitérés-idő függvényt meghatározó mozgásegyenlet [1]

$$m \ddot{x}(t) = -D(t) x(t), \quad (1)$$

ahol a pont az idő szerinti deriválást jelöli. Az ennek az egyenletnek eleget tevő rendszer manapság érzékelők (szenzorok) és beavatkozó egységek (aktuátorok) segítségével könnyen megépíthető, bármilyen is a  $D(t)$  függvény. A rugóra ható erő most tehát nem

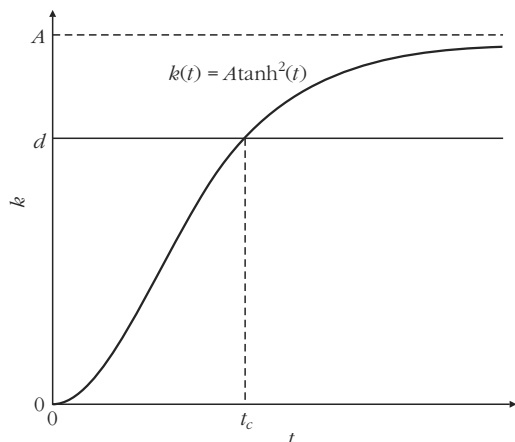
csak a kitéréstől függ, hanem az időfüggő rugóállandó pillanatnyi értékétől is.<sup>1</sup> Az (1) egyenlet jobb oldala expliciten is függ az időtől, a differenciálegyenlet *nem autonóm*, vagyis a mozgás folytatását nem csak a test pillanatnyi helyzete és sebessége határozza meg, hanem egy külső hatás is. Az egyenlet olyan típusú, mint a gerjesztett rezgéseket leíró egyenletek [1], csak az időfüggés nem egy külső erőben, hanem a rugóállandóban jelenik meg. A mechanikai összenergia a súrlódás hiányában sem állandó, hiszen a rugóállandó időbeli változása miatt a rendszer energiát nyerhet vagy veszíthet.

Tegyük föl ráadásul, hogy a rugóállandó időben monoton módon csökken, egy idő után *előjelet vált*, s attól kezdve végig negatív marad. Az egyszerűség kedvéért egységnyi tömeget tekintve, s alkalmasan megválasztott időegységet használva, ezt kifejezhetjük úgy is, hogy a mozgásegyenletet az

$$\ddot{x}(t) = -[d - k(t)]x(t) \quad (2)$$

alakba írjuk. Itt  $d > 0$  a nulla pillanathoz tartozó kezdeti rugóállandó, és  $k(t)$  az időbeli változást leíró

<sup>1</sup> A rugóállandó szóhasználat annyiban jogos, hogy  $D(t)$  továbbra is független a kitéréstől.



1. ábra. A konkrét példaként választott  $k(t)$  rugófüggvény alakja. A kritikus  $t_c = \tanh^{-1}(d/A)^{1/2}$  értéknél a rugófüggvény értéke megegyezik a kezdeti rugóállandóval, az eredő rugóállandó itt zérus, ennél nagyobb időkre negatív. A rugó tehát  $t > t_c$ -re taszítóvá válik.

rugófüggvény, amely nulláról indul és monoton módon tart a  $d$ -nél nagyobb  $A$  értékhez. Konkrétan válasszuk a  $k(t)$  rugófüggvényt

$$k(t) = A \tanh^2 t = A \frac{\sinh^2 t}{\cosh^2 t} \quad (3)$$

alakúnak, amely egy egyszerű, folytonos átváltást ír le 0 és  $A > d$  között. A rugófüggvény alakját és a  $d$  kezdeti értékhez való viszonyát az 1. ábra mutatja.

A (2) egyenlethez tartozó vezérlési probléma<sup>2</sup> a következő: *véges kezdeti kitéréssel indítva, adott  $A$  mellett, elérhető-e  $d$  alkalmas megválasztásával, hogy a test hosszu idő után megálljon?*

Mivel a kezdeti rugóállandó az  $A$  nagyságú intervallumban változhat, ezt az intervallumot az operációs tartománynak nevezzük. Egy vezérlési feladat során az  $A$  értéket rögzítjük. A megoldás azért tűnik első ránézésre reménytelennek, mert az eredő rugóállandó egy idő után ( $t > t_c$ -re) negatív, a rugó taszító, s a taszító rugók általános tulajdonsága, hogy egyre távolabbra juttatják a testet, amely formálisan tehát kifut a végtelenbe. A vezérlés lehetőségében azonban mégis reménykedhetünk, ha egy *speciális* feltétel teljesül. Ha a  $t_c$  pillanatban a test nem távolodik az origótól, hanem *közeledik* hozzá, méghozzá elegendően nagy sebességgel, akkor előfordulhat, hogy tehetetlensége miatt ezt a közeledést megtartja, s ámbár az eredő rugóállandó abszolútértéke nő, az eredő erő nagysága,

$$|k(t) - d| |x(t)|$$

csökkenhet, ha  $|x(t)|$  elegendően kicsi és megfelelő ütemben csökken. Így tehát egészen kivételes esetekben, bizonyos  $d$  értékek mellett, lehetséges az, hogy a test hosszu idő után az origóhoz tartson, megálljon.

<sup>2</sup> A vezérlés olyan beavatkozási forma, amelyben a betáplált adat után a rendszernek – szemben a szabályozással – nincs visszahatása önmagára.

## Numerikus eredmények

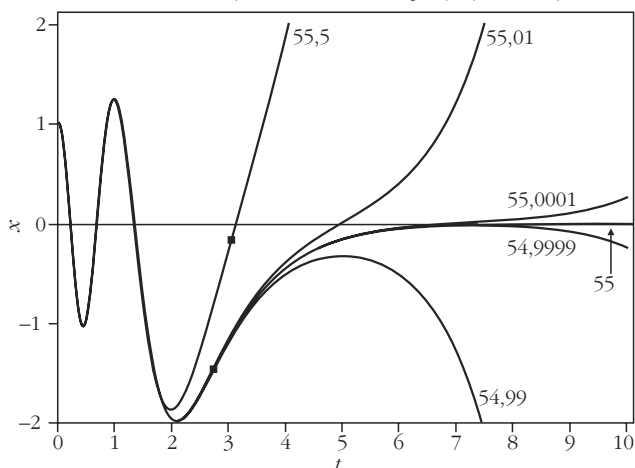
A speciális  $d$  értékek megtalálásához általában csak numerikus módszerekkel juthatunk. Rögzítettük ezért először a kezdőfeltételt oly módon, hogy a mozgás mindig egységnyi kitéréssel indul, kezdősebesség nélkül:

$$\begin{aligned} x(0) &= 1, \\ \dot{x}(0) &= v(0) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Az, hogy a kezdeti kitérés egységnyi, nem jelent megszorítást, mert a hosszegység szabadon választható (más szóval, azt a távolságot tekintjük hosszegységnek, amelyből a test indul). A vezérlés ezek után egyetlen mennyiség, a  $d$  kezdeti rugóállandó megválasztásával végezhető el. A mozgás numerikus integrálásához a Newton-egyenlet szimulálására jól bevált negyedrendű Runge–Kutta-módszert [2] választottuk, rögzített  $h$  lépésközzel. A negyedrendű jelző arra utal, hogy egy iterációs lépés  $h^4$  értékig pontos (a hiba nagyságrendje  $h^5$ ). Ez elegendő pontosságot biztosít, viszonylag rövid futási idővel, a  $h = 0,01$  választással. Mivel nagyobb  $d$  értékek mellett a kritikus  $t_c$  idő nagyobb, a test hosszabb ideig rezeg, érdemes az  $A$ -hoz közeli  $d$  értékek vizsgálatával kezdeni.

Az  $A = 56$ ,  $55 < d < 56$  választás mellett a kritikus pillanathoz körülbelül másfél rezgés után érünk el (a frekvencia közben lassan csökken, hiszen a  $[d - k(t)]$  rugóállandó is csökken). Ekkor  $d < 55,5$ -re, a kitérés negatív, a sebesség pozitív, de annyira nagy, hogy a test a negatív rugóerő ellenére jelentős sebességgel halad át az origón, s attól kezdve gyorsulva fut a végtelenbe (2. ábra). A  $d = 55$  érték felé közeledve ez a kifutás egyre lassul.  $d = 55,0001$  mellett az  $x(t)$  függvény már közelít a  $t$ -tengelyhez, de kis szög alatt átmetszi. A  $d = 55$  értékre a görbe numerikus pontossággal belesimul a  $t$ -tengelybe, amint a 2. ábrán is láthatjuk. Ekkor tehát sikeres a vezérlés! Az, hogy az

2. ábra. A numerikusan meghatározott kitérés-idő függvény különböző  $d$  kezdeti rugóállandókkal. Az egyes görbék mellett a hozzájuk tartozó  $d$  értéket tüntettük fel. A  $d = 55$  értéknél megvalósul a vezérlés: a test megáll az origóban. A kis fekete négyzetek a  $t_c$  pillanatokat jelölik, amelyek egyben az  $x(t)$  görbe inflexiós pontjai, hiszen itt  $\ddot{x} = 0$ . A  $d = 55,5$  és  $55$  értékekre  $t_c = 3,05$ , illetve  $2,70$ .



ilyen  $d$  értékek mennyire kivételesek, jól látszik abból is, hogy  $d = 54,9999$  és  $d = 54,99$ -ra a kitérés a negatív végtelenbe tart. A  $t_c$  értéknél fellépő sebesség ekkor már nem elég ahhoz, hogy a test a negatív irányból eljusson az origóig, s miután azt megközelítve visszafordul, a taszító rugó egyre messzebbre távolítja.

### Az instabil állapot vizsgálata, a fázistér

Ez a tapasztalat jól mutatja, hogy az origó erősen *instabil állapot*. Vizsgálatára érdemes használni a *dinamikai rendszerek* módszertanából ismert eszközöket [3]. Tekintsük először is a (2) mozgásegyenlet hosszú idő elteltével érvényes alakját. Mivel  $t \rightarrow \infty$ -re  $k(t)$  az  $A$  konstans értékhez tart, az egyenlet jobb oldalán  $(A-d)x$  áll. Mivel  $A > d$ , a zárójel pozitív, érdemes ezt  $s^2$ -ként jelölni:

$$s = \sqrt{A-d}. \quad (5)$$

Az  $s$  mennyiség a taszítási paraméter. A mozgásegyenlet ezzel a rövidített jelöléssel

$$\ddot{x} = s^2 x \quad (6)$$

alakú, és egy időben konstans állandójú taszító rugó hatását írja le. Hosszú idő elteltével a kitérés általában nagy. A sikeres vezérléshez közeli esetekben azonban a (6) egyenlet érvényes  $|x| \ll 1$  esetén is. Tegyük fel, hogy ilyen esettel van dolgunk, s indítsuk újra az időszámítást akkor, amikor a test már egy kis  $x_0$  koordinátájú és kis  $v_0$  sebességű állapotba került. Célunk ezzel annak megértése, hogy milyen a mozgás az origó környékén.

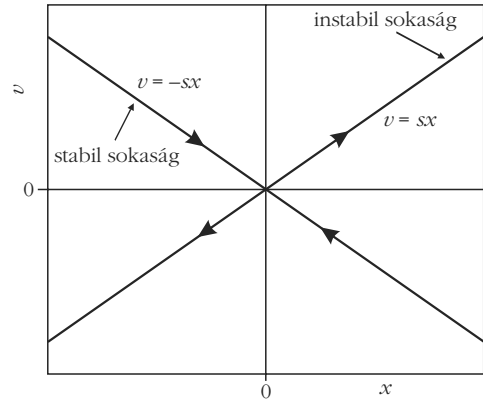
Vegyük észre, hogy a (6) egyenlet autonóm, ráadásul (éppen ezért) megoldható analitikusan. Mint minden lineáris, állandó együtthatós, homogén differenciálegyenletnek, megoldása kereshető exponenciális alakban. Az  $x = \exp(\lambda t)$  feltevéssel a  $\lambda = \pm s$  megszorításra jutunk, vagyis a  $\lambda$  kitevő csak a taszítási paraméter,  $s$ , vagy annak ellentettje,  $-s$  lehet. Az általános megoldás ezen alapg megoldások lineáris kombinációja. Könnyen ellenőrizhető, hogy a (6) egyenlet  $x(0) = x_0$ ,  $v(0) = v_0$  kezdőfeltételt kielégítő megoldása

$$x(t) = \frac{s x_0 + v_0}{2s} e^{st} + \frac{s x_0 - v_0}{2s} e^{-st} \quad (7)$$

alakú. A megoldás tehát két exponenciális összege, amelyek közül egy idő után a pozitív kitevőjű,  $\exp(st)$  tag válik dominánssá. Ez írja le a végtelenhez tartást. Mindez azonban csak akkor igaz, ha az  $s x_0 + v_0$  együttható nem nulla. Bizonyos kezdőfeltételekre azonban fennállhat, hogy  $s x_0 + v_0 = 0$ , s ekkor

$$x(t) = x_0 e^{-st}. \quad (8)$$

Ilyenkor tehát a test *egyre csökkenő sebességgel az origóhoz tart*. Ennek az esetnek kell tehát megvalósulnia sikeres vezérlés esetén.



3. ábra. Az origó (nyeregpont) és környezete a fázistérben, a jellegzetes keresztalakzat. A mozgás a vonalakon a nyilakkal jelölt irányba történik. Az origóba bejutni csak a stabil sokaság mentén lehet.

Az origó körüli viselkedésről áttekintő képet a *fázistérben* kaphatunk, ahol a  $v = \dot{x}$  sebességet ábrázoljuk az  $x$  kitérés függvényében. Fenti eredményünk azt mutatja, hogy a

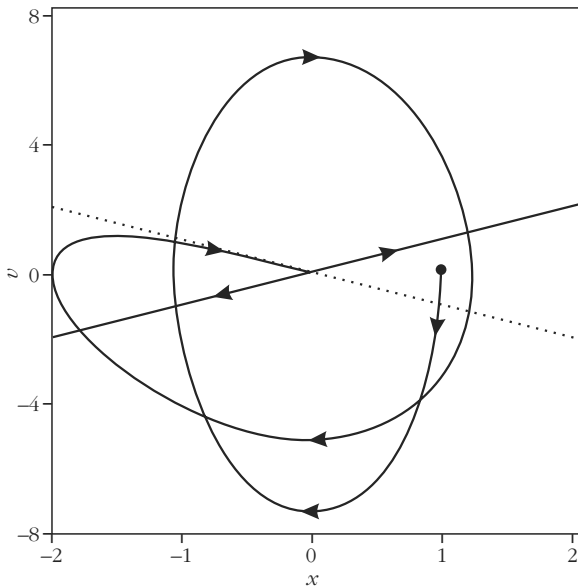
$$v = -s x \quad (9)$$

egyenes mentén elhelyezkedő pontok éppen eljutnak az origóba, ha  $|x| \ll 1$ . Vagyis, ha jól meghatározott sebességgel lökjük az instabil állapot felé a testet, akkor az megáll. A nulla sebesség elérése elvileg végtelen hosszú ideig tart, de gyakorlatilag az  $1/s$  idő néhányszorosa után a test már nagyon jó közelítéssel megközelíti a nyugalmi állapotot. Az egyenesen kívüli kezdőfeltételek mind a végtelenbe vezetnek. A  $v = s x$  egyenes mentén levő pontoknak megvan az a sajátos tulajdonsága, hogy esetükben  $s x_0 - v_0 = 0$ , és ők egyetlen exponenciálisan növekvő függvény szerint távolodnak,  $x(t) = x_0 e^{st}$ .

A fázistér  $v = -s x$  egyenese a fentiek szerint azt a speciális mozgást írja le, amely az origóba történő eljutásnak felel meg. Ezt a görbét ezért az origó stabil görbéjének, a dinamikai rendszerek szóhasználatával *stabil sokaságának* [3] hívjuk. A  $v = s x$  egyenes, amelynek mentén az eltávolodás a leggyorsabb, az origó instabil sokasága. A 3. ábrán is látható, hogy a fázissíkot a stabil és instabil sokaságok négy síknyegyedre osztják.

Általában is igaz [3], hogy a mechanikában előforduló minden autonóm rendszer instabil állapota ilyen típusú. A keresztalakzat megjelenése azt fejezi ki, hogy az instabilitás sohasem tökéletes. A fázistér egy elhanyagolhatóan csekély mértékű tartományából (a teljes sík egy vonalából) mindig el lehet jutni az instabil állapotba. (A hegyére állított ceruza állapotát instabilnak mondjuk, pedig kezdeti kitérés esetén ott is találhatunk egy megfelelő kezdősebességet, amellyel meglökve az éppen megáll a függőleges helyzetben.) Az instabil állapotok tehát mindig nyeregpontok a fázistérben, olyan pontok, amelyekhez tartozik stabil és instabil sokaság.<sup>3</sup>

<sup>3</sup> A stabil sokaságra szorítkozva az origó stabilnak mutatkozik, a teljes fázissíkon azonban instabil.



4. ábra. A  $d = 50$  és a  $d = 50 \pm 10^{-4}$  értékekhez tartozó megoldások képe a fázistérben. Ezek jó közelítéssel kirajzolják az origóba tartó stabil sokaságot, de mivel  $d = 50 + 10^{-4}$  mellett a megoldás hosszú idő után a pozitív,  $d = 50 - 10^{-4}$ -re viszont a negatív végtelenbe tart, az instabil sokaság egy darabja is jól láthatóvá válik. Pontozott vonallal berajzoltuk a  $v = \pm sx$  egyeneseket is, amelyek a sokaságok origó körül érvényes alakjait adják meg. A  $v = sx$  instabil ágától a numerikus megoldás nem különböztethető meg, hiszen hosszú idő után a (6) egyenlet nagy  $x$ -ekre is érvényes. A  $v = -sx$  görbe viszont valóban csak az origó környékén érinti a szimulálással kapott stabil sokaságot.

Számunkra a stabil sokaság bír különös jelentőséggel, hiszen a vezérlés csak ezen görbe mentén lehet sikeres. Örülhetünk annak, hogy alakját a (9) összefüggés szerint egzaktul ismerjük, de ez csak akkor igaz, ha a test már közel került az origóhoz. Mit mondhatunk az origótól távol eső pontok vezérlési esélyéről? A folytonosság miatt feltételezhetjük, hogy az origó stabil sokasága a teljes (2) egyenlet fázistérben is létezik. Ha tehát nem kötjük magunkat a  $t \gg 1$  feltételhez, az eredeti nem autonóm egyenlet fázistérben is találunk egy olyan görbét, amely hosszú idő után befut a (9) egyenesbe, s azon keresztül az origóba. Ezt a stabil sokaságot numerikusan kell megkeresni, s a kérdés az, hogy a (4) kezdőfeltétel adott  $d$  mellett ráesik-e az origó stabil sokaságára. Azon  $d$  értékek, amelyekre ez teljesül, a vezérlést biztosító  $d$  értékek. A 4. ábra mutatja, hogy  $d = 55$  esetén az (1,0) pont valóban rajta van az origóba vezető stabil sokaságon. Autonóm rendszerekben a stabil sokaság nem metszheti önmagát. Mivel azonban rendszerünk nem autonóm, több metszéspontot is megfigyelhetünk.

(Azt is mondhatjuk, hogy az igazi fázistér 3 dimenziós, amelyet  $x$ ,  $v$  és a rugóállandóban megjelenő idő feszít ki, s mi az igazi, önmagát nem metsző sokaságnak az  $(x, v)$  síkra vett vetületét látjuk.)

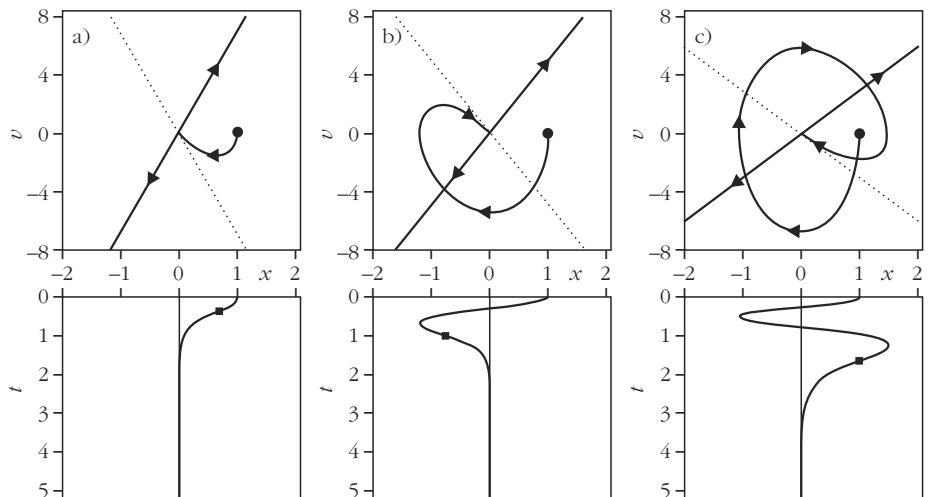
## A rugóállandó-spektrum

Vizsgáljuk ezek után, létezik-e még másik, vezérlésre alkalmas  $d$  érték  $A = 56$  mellett. Ezt numerikusan úgy tehetjük meg, hogy programot írunk, amely az összes  $d$  értéket megvizsgálja  $\Delta d = 0,01$  lépésként a  $0 < d < A$  operációs tartományban. Minden egyes  $d$ -hez numerikusan meghatározza az  $x(t)$  függvényt, s rögzíti annak értékét egy késő időpontban (például  $t = 30$ -ban). A program, amely a LabView grafikus programnyelven íródott [4], újabb és újabb  $d$  értékeket vesz mindaddig, amíg azt nem érzékeli, hogy a későbbi időpontban felvett  $x$  érték előjele különbözik az előző  $d$ -hez tartozó előjelétől. Ekkor megáll és kiírja az utolsó  $d$  értéket, amelynek környékén léteznie kell egy vezérlést megvalósító értéknek, hiszen itt simul hozzá az  $x(t)$  függvény a  $t$ -tengelyhez (vagyis ugyanaz zajlik le, mint a 2. ábrán, csak más  $d$ -re).

Ezzel a módszerrel összesen még három vezérlésre alkalmas  $d$  értéket találunk, amelyek 7, 31, és 47. A kitérés-idő függvény ezekre rendre negyed, háromnegyed és ötnegyed rezgés után tart az origóba. A fázistérbeli képen ennek megfelelően az origó elérése előtti rajzolat egyre bonyolultabb, és egyre több metszéspont figyelhető meg (5. ábra). Vegyük észre, hogy az alacsonyabb  $d$  értékekre az origó egyre instabilabb, az (5) tasztási paraméterre rendre a 7, 5 és 3 értékeket kapjuk. Ennek megfelelően a nyeregpontra jellemző keresztalakzat egyre meredekebb a fázissíkon.

Az  $A = 56$  paraméter esetén tehát összesen négy vezérlést biztosító kezdeti rugóállandó értéket találunk a (4) kezdőfeltétellel. Az ilyen típusú feladatok a

5. ábra. A  $d = 7$  (a), 31 (b) és 47 (c) vezérlést biztosító értékekhez tartozó megoldások képe a fázistérben. Alattuk a megfelelő  $x(t)$  függvény látható. A két ábrázolás közötti kapcsolat bemutatására a kitérés-idő függvényt elforgattuk, hogy a két  $x$  tengely párhuzamos legyen. A kritikus idők rendre  $t_c = 0,37, 0,96$  és  $1,56$ . Pontozott vonallal a fázistérben berajzoltuk a  $v = \pm sx$  egyeneseket is.





1. táblázat

A rugóállandó-spektrum különböző $A$ -kra			
$A$	$\lambda$	$d_n$	$n_{\max}$
12	4	3, 11	1
30	6	5, 21, 29	2
56	8	7, 31, 47, 55	3

sajátérték-problémák körébe tartoznak: megoldások csak bizonyos diszkrét  $d_n = d_0, d_1, \dots, d_{n_{\max}}$  értékek mellett találhatók.

Az  $A$  paraméter más értékei mellett is ugyanezt a jelleget látjuk. A tapasztalat az, hogy  $A$  növelésével nő a sajátértékek száma. Az 1. táblázatban összefoglaljuk néhány jellegzetes  $A$  paraméter mellett a talált  $d_n$  sajátértékeket, a rugóállandó-spektrumokat.

A táblázatból több érdekes szabályosság olvasható ki. Adott  $A$  mellett az  $(n+1)$ -edik és az  $n$ -edik sajátérték különbsége például 8 egész számú többszöröse. Egyszerű összefüggésre jutunk, ha észrevesszük, hogy a vizsgált  $A$  értékek két egymás utáni egész szám szorzataként írhatók,

$$A = \lambda(\lambda - 1), \quad (10)$$

ahol  $\lambda > 1$ . Az adott  $\lambda$ -hoz tartozó első sajátérték mindig  $\lambda - 1$ , és  $d_{n+1} - d_n = 4\lambda - 8(n+1)$ . Ezek után könnyen felismerhető az általános szabály:

$$d_n = \lambda(\lambda - 1) - (\lambda - 2n - 1)^2, \quad (11)$$

amely  $n = 0$ -tól a maximális  $n_{\max} = [(\lambda-1)/2]$  értékig érvényes, ahol a szögletes zárójel az egész részt jelöli. A  $d_n$  sajátértékhez tartozó (5) taszítási paraméter:  $s_n = \lambda - 2n - 1$ , amiből látszik, hogy minél kisebb  $n$ , annál instabilabb a probléma. Mivel minden pozitív szám írható a (10) alakban, érthető és numerikusan is ellenőrizhető, hogy a (11) rugóállandó-spektrum tetszőleges valós  $\lambda$ -ra is érvényes.

## Mi a kapcsolat a modern fizikával?

Térjünk most át egy másik kérdéskörre, a kvantummechanikai energiasajátérték-problémára (a figyelmes Olvasó bizonyára már amúgyis észrevette a két feladat hasonlóságát). Mint ismert, az egydimenziós, sima  $V(x)$  potenciálban mozgó  $m$  tömegű részecske  $E$  energiáját a

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) = [E - V(x)]\psi(x) \quad (12)$$

stacionárius Schrödinger-egyenlet határozza meg [5–7], ahol  $\hbar$  a Planck-állandó és a vessző az  $x$  helykoordináta szerinti deriválást jelöli. A  $\psi(x)$  hullámfüggvénynek folytonosan differenciálhatónak kell lennie, és kötött állapotban nagy távolságokban nullához kell tartania. Ez az egyenlet mikroszkopikus részecs-

kékre vonatkozik, és időtől független. Hogyan vehető össze a (2) makroszkopikus vezérlési problémával, amely a klasszikus fizika Newton-egyenlete?

Az ilyen távoleső problémák közötti lehetséges kapcsolat felderítésében nélkülözhetetlen segítség az egyenletek dimenziótlanítása [3]. A módszer nagyon egyszerű, és sok más esetben (például egyenletek numerikus megoldásra alkalmas alakjának megtalálásában) is hasznos. Az alapgondolat az, hogy minden problémának megvan a saját jellegzetes hosszúság- vagy időskálája. A Schrödinger-egyenlet esetén ilyen jellegzetes skála lehet a potenciál jellemző mérete, például félszélessége. Tekintsük távolságegységnek ezt az  $a$  mikroszkopikus hosszat az SI-rendszer méter (vagy nanométer) egysége helyett. Ez formálisan azt jelenti, hogy elvégezzük az  $x \rightarrow ax$  transzformációt. Az új  $x$  változó a dimenziótlan helykoordináta, amely megadja, hogy a távolság hányszorosa a  $a$  hosszegységnek. A bonyolult jelölésváltás elkerülése érdekében jelöljük  $V(x)$ ,  $\psi(x)$ -szel a potenciál- és a hullámfüggvény dimenziótlan helykoordinátával kifejezett alakját is. Ha ennek szellemében vesszövel kívánjuk jelölni a dimenziótlan  $x$  szerinti deriváltat is, akkor figyelembe kell venni, hogy minden egyes eredeti  $x$  szerinti deriválás egy  $a$ -val való osztást hoz be. Mivel kétszeres deriválásról van szó, a dimenziótlan helyváltozóban érvényes Schrödinger-egyenlet

$$\frac{\hbar^2}{2ma^2}\Psi''(x) = -[E - V(x)]\Psi(x). \quad (13)$$

Most mindkét oldal energia mértékegységű. A bal oldalon álló  $E^* = \hbar^2/(2ma^2)$  konstans tekinthető a probléma jellegzetes energiaértékének. Ha a jobb oldalon levő energiát és potenciált ebben az  $E^*$  egységben mérjük, akkor helyettük az  $e = E/E^*$ ,  $v(x) = V(x)/E^*$  dimenziótlan energia- és dimenziótlan potenciálfüggvény jelenik meg, és a

$$\Psi''(x) = -[e - v(x)]\Psi(x) \quad (14)$$

egyenletre jutunk. Az atomi méretekre jellemző  $a = 10^{-10}$  m-rel,  $m = 9 \cdot 10^{-31}$  kg elektrontömeggel és a  $\hbar = 10^{-34}$  Js Planck-állandóval számolva az energiaegység  $E^* = 5 \cdot 10^{-19}$  J  $\approx 3$  eV, ami valóban atomi kötésekre jellemző energiaérték. Az  $E$  összenergia ennek néhány-szorosa, így a dimenziótlan egyenlet már nem függ az eredeti skáláktól, nem maradt benne semmilyen mikroszkopikus paraméter.

Ezen a ponton felismerhetjük, hogy a (14) dimenziótlan Schrödinger-egyenlet a már eddig is vizsgált (2) egyenlethez hasonló, sőt alakjuk az  $x \leftrightarrow t$  csere után teljesen megegyezik!

Érdeemes megjegyezni, hogy a vezérlés dimenziós (1) egyenletét, amelyet a  $D(t) = D - K(t)$  felbontással az

$$m\ddot{x}(t) = -[D - K(t)]x(t) \quad (15)$$

alakban írhatunk, hasonló eljárással hozhatjuk a (2) alakra. A rugóállandó időbeli változásának nyilván

van egy jellegzetes ideje  $\tau$ , amely lehet például az az idő, amely alatt a rugóállandó értéke a felére csökken. Az időt  $\tau$  egységeiben mérve, a  $D^* = m/\tau^2$  rugóállandó-egységet kapjuk, amellyel (15)-ből (2)-re jutunk.<sup>4</sup>

A dimenziótlan egyenletek ekvivalenciájának felismerése után természetesen vizsgálnunk kell a kezdeti és peremfeltételeket is. A vezérlés feltételeként megkövetelt  $x(t \rightarrow \infty) = 0$  megkötés teljesen megfelel a hullámfüggvény normálhatóságával kapcsolatos  $\Psi(|x| \rightarrow \infty) = 0$  peremfeltételnek. A vezérlési probléma kezdőfeltételének kvantummechanikai megfeleltetése több figyelmet igényel. A Schrödinger-egyenlet a teljes  $V(x)$  potenciált vizsgálja, s nem szorítkozik annak csak a pozitív ( $x > 0$ ) koordinátákhoz tartozó felére. Páros potenciálfüggvények, azaz  $V(x) = V(-x)$  esetén, a szimmetria miatt tudjuk, hogy létezniük kell páros hullámfüggvényeknek, s ezek a függvények az origóban vízszintes érintőjűek. Ők, az  $x \leftrightarrow t$  csere értelmében pontosan megfelelnek a (4) mechanikai kezdőfeltételnek. A páros sajátfüggvényekhez a teljes  $e_n$  energiaspektrum páros  $n$  indexű értékei rendelhető. A páratlan indexű energiaértékek az origóban eltűnő pontszimmetrikus hullámfüggvényekhez tartoznak.<sup>5</sup> A két probléma közötti megfeleltetés tehát az, hogy ha azonos alakú a dimenziótlan  $k(t)$  és  $v(x)$  függvény, azaz, ha  $k(t) = v(x=t)$  és ha  $v(x)$  páros, akkor a dimenziótlan spektrumok megfelelnek egymásnak; a (4) kezdőfeltételhez tartozó vezérlési probléma dimenziótlan spektruma a

$$d_n = e_{2n} \quad (16)$$

szabály szerint kapható meg az  $e_n$  dimenziótlan kvantummechanikai spektrumból. A példaként használt (3) függvénycsalád a kvantummechanikában a

$$v(x) = \lambda(\lambda - 1) \left( 1 - \frac{1}{\cosh^2 x} \right)$$

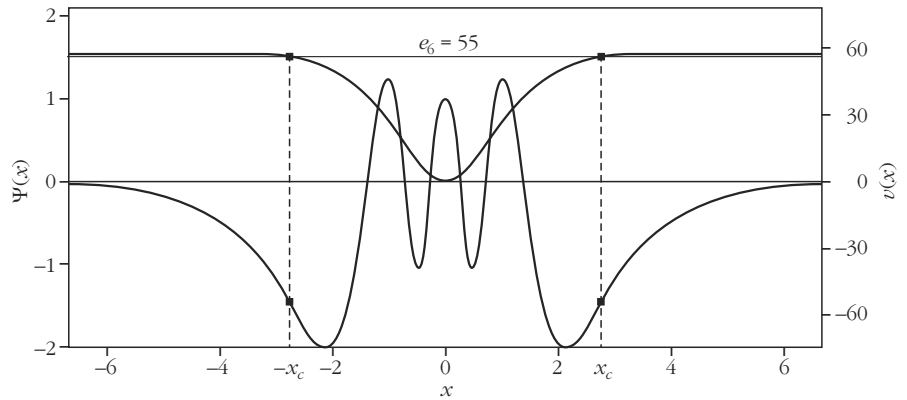
dimenziótlan potenciálnak felel meg, az úgynevezett Rosen–Morse-potenciálnak [7, 8].<sup>6</sup>

Még egyszerűbb példát kapunk a parabolikus  $k(t) = t^2$  rugófüggvény,  $v(x) = x^2$  dimenziótlan potenciál esetén, amely a  $V(x) = 1/2 m \omega^2 x^2$  harmonikus oszcillátor problémájának felel meg az  $E^* = \hbar \omega / 2$ ,  $a^2 = \hbar / (m \omega)$  egységválasztással. A rugóállandó-spektrum

<sup>4</sup> Makroszkopikus  $m = 1$  kg,  $\tau = 1$  s adatokkal  $D^* = 1$  kg/s<sup>2</sup> = 1 N/m.

<sup>5</sup> Ezeket az  $x(0) = 0$ ,  $v(0) = 1$  kezdőfeltétellel kaphatnánk meg a vezérlési problémában, de ezzel a kezdőfeltétel-családdal a terjedelmi korlátok miatt nem foglalkozunk.

<sup>6</sup> Ennek dimenziótlan energiaspektruma egzaktul ismert az  $e_n = \lambda(\lambda-1) - (\lambda-n-1)^2$  alakban,  $0 \leq n \leq (\lambda-1)$ .



6. ábra. A 2. ábra  $d = 55$  értékhez tartozó  $x(t)$  függvénye páros kiterjesztésével kapott  $\Psi(x)$  függvény. Ez a  $v(x) = 56 \tanh^2 x$  potenciálhoz (felső görbe) tartozó Schrödinger-egyenlet hetedik sajátfüggvénye ( $n = 6$ ), amely az  $e_6 = d_3 = 55$  sajátértékhez tartozik. Az  $x_c = t_c$  kritikus távolságot is feltüntettük. Ez a klasszikus fordulópont, amelyen túl a hullámfüggvény már sohasem hullámzik.

2. táblázat

A vezérlési és a kvantummechanikai feladat megfeleltetése

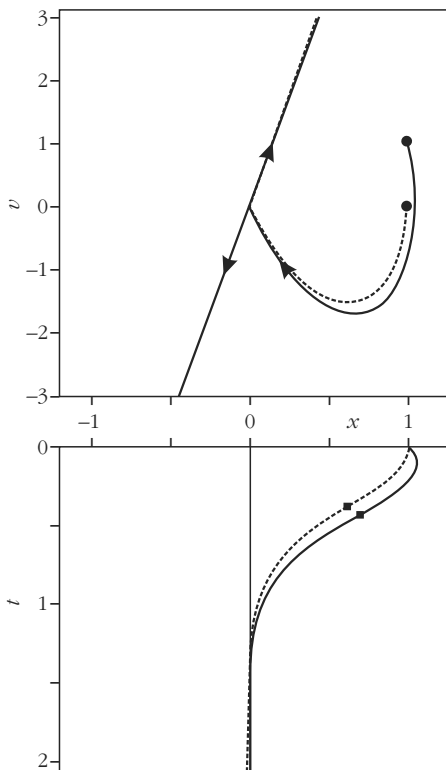
Newton-egyenlet	Schrödinger-egyenlet
karakterisztikus idő $\tau$	karakterisztikus távolság $a$
kitérés függvény $x(t)$	hullámfüggvény $\Psi(x)$
rugófüggvény $K(t)$	potenciálfüggvény $V(x)$
dimenziótlan idő $t$	dimenziótlan távolság $x$
rugóállandó egység $D^*$	energiaegység $E^*$
az operációs intervallum hossza $A$	a $v(x)$ potenciálgödör mélysége $A$
rugóállandó-spektrum $d_n = D_n/D^*$	energiaspektrum $e_n = E_n/E^*$
sikerés vezérlés	sajátállapot megtalálása

az ismert [5, 6] lineáris  $E_n = \hbar \omega(n+1/2)$ ,  $e_n = 2n+1$  spektrumból következően  $d_n = 4n+1$  alakú.<sup>7</sup>

Sajnos, az egzaktul megoldható kvantummechanikai problémák száma csekély [6, 7], ezért csak nagyon ritkán számíthatunk arra, hogy a  $d_n$  spektrum kifejezhető egyszerű képlettel. A vázolt numerikus eljárás azonban mindig célhoz vezet.

Feltehető az a kérdés is, hogy milyen kvantummechanikai feladatot oldunk meg a  $k(t)$  függvény megválasztásával. Mivel az idő pozitív, a potenciálnak pedig negatív  $x$  koordinátákra is értelmezettnek kell lennie, azt mondhatjuk, hogy  $v(x) = k(t=x)$ , negatív  $x$ -ekre pedig  $v(x) = v(-x)$ . Vagyis, a (4) kezdőfeltételnek eleget tevő vezérlési feladat a  $k(t)$ -nak megfelelő potenciál páros kiterjesztését tartalmazó energiasajátérték-problémájának felel meg, és abban is a páros sajátértékeket adja meg  $d_n$ . Így a  $d_n$ -hez tartozó vezérelt  $x(t)$  kitérés-idő függvény páros kiterjesztése a  $t \rightarrow x$  helyettesítés után a  $v(x)$  potenciál  $2n$ -edik sajátállapotához tartozó hullámfüggvényt adja meg (6. ábra).

<sup>7</sup> Ha  $k(t) = \lambda^2 t^2$ ,  $v(x) = \lambda^2 x^2$ , ahol  $\lambda > 0$  tetszőleges szám, akkor az  $E^* = \hbar \omega / (2\lambda)$ ,  $a^2 = \hbar \lambda / (m \omega)$  választással az  $e_n = (2n+1)\lambda$  dimenziótlan spektrumra jutunk, amelyből  $d_n = (4n+1)\lambda$ . Ugyanez következik (11)-ből is a nagy  $\lambda$  határesetben, véges  $n$ -ekre. Ennek oka az, hogy a (3) rugófüggvény parabolikusan indul:  $k(t) = \lambda(\lambda-1)t^2$ , és nagy  $\lambda$ -ra  $\lambda(\lambda-1) \approx \lambda^2$ .



7. ábra. Sikeres vezérlés  $v_0 = 1$  kezdőfeltétel mellett a  $d_0 = 9,526$  paraméterrel. A fázistérbeli kép alatt a kitérés-idő függvény látható. Szaggatott vonallal a  $v_0 = 0$ ,  $d_0 = 7$  eset görbéit is berajzoltuk az összehasonlíthatóság érdekében, s kisebb tartományban, mint az 5.a ábrán.

A  $t_c$  kritikus idő megfelelője az  $x_c$  kritikus távolság. Ez az a helykoordináta, ahol az összenergia megegyezik a potenciális energiával, vagyis, ahol a klasszikus fizika törvényeinek eleget tevő részecske visszafordulna. Az, hogy a kvantummechanikai feladatban a részecske véges valószínűséggel lehet az  $x_c$ -nél nagyobb távolságban is, az *alagút effektus* jelensége. Éppen ez az a tartomány, ahol a vezérlési feladatban a rugóállandó negatív! A vezérlési és a kvantummechanikai probléma megfeleltetésének legfontosabb gondolatait foglalja össze a 2. táblázat.

## A vezérlési feladat általánosabb, mint a kvantummechanikai feladat

Vizsgáljuk most meg, hogyan alakul a vezérlési feladat, ha az  $x(0) = 1$  helyzetből nullától eltérő  $v_0 \neq 0$  kezdősebességgel indítjuk a testet. A  $v_0 = 1$  értékkel  $A = 56$ -ra a numerikus megoldást követve azt tapasztaljuk, hogy  $d = 7$  körül nem sikeres a vezérlés, de  $d = 9,526$ -ra sikeressé válik. Ez szemléletesen is érthető, hiszen, ha a test kezdetben határozottan távolodik az origótól, akkor a kritikus idő (amely független  $v_0$ -tól) eltelte után még viszonylag messze van az origótól, így a taszító erő  $d = 7$  körül még kivetí a pozitív végtelenbe. Az origó pozitív irányból való lassú elérése csak valamelyik nagyobb  $d$  értéknél válik lehetővé. A 7. ábrán a kitérés-idő függvényen kívül a fázistérbeli rajzolatot is láthatjuk, amely topológiailag azonos a  $d = 7$ ,  $v_0 = 0$

3. táblázat

**Kezdősebesség-függő rugóállandó sajátértékek**  
 **$A = 56$ -ra ( $\lambda = 8$ )**

$v_0$	$d_n(v_0)$
2	11,389; 33,063; 48,035; 55,305
1	9,526; 32,087; 47,539; 55,163
0	7,000; 31,000; 47,000; 55,000
-1	3,575; 29,851; 46,438; 54,823
-2	-, 28,708; 45,877; 54,637

értékhez tartozóval (5.a ábra). Az  $(1, v_0)$  kezdőpont természetesen rajta van az origó stabil sokaságán, ha  $d = 9,526$ .

Ez a megfigyelés azt sugallja, hogy minden egyes  $v_0$  dimenziótlan sebességhez tartozhat egy  $d_n(v_0)$  rugóállandó-spektrum. A numerikus tapasztalat ezt alátámasztja, amint azt a 3. táblázat néhány esetre bemutatja.

Az a szabály olvasható le, hogy pozitív kezdősebességek az eredeti sajátértékeket növelik, a negatívak csökkentik. Különösen érdekes a  $v_0 = -2$  eset, amikor nem találunk sajátértéket a  $0 < d < 7$  tartományban. A kezdősebesség ekkor olyan nagy negatív szám már, hogy a pozitív értékek felől oszcillálás nélkül az origóba tartó megoldás már nem is létezhet. Nagyobb  $n$ -ekre a kezdősebesség hatása egyre kisebb, a függvények egyre később csengenek le, és rájuk a kezdeti meredekség-változás kisebb hatással van.

A vezérlési és a kvantummechanikai probléma fenti összehasonlítása alapján felmerül a kérdés: mondhatjuk ezek után, hogy a  $v_0 \neq 0$  esetekkel a  $v(x) = k(t=x)$  potenciál újabb kvantummechanikai sajátértékeket fedeztünk fel? Semmiképpen sem! A vezérlés véges meredekséggel induló  $x(t)$  függvényének  $x$  tengelyre vett tükrözésével kapott páros kiterjesztése ugyanis *megettórik* az origóban. Ez *nem* feleltethető meg kvantummechanikai hullámfüggvények, hiszen  $\psi$ -nek differenciálhatónak kell lennie (különben például nem lenne egyértelműen értelmezhető rá az impulzusoperátor: a deriválási operátor hatása). A levonható konklúzió az, hogy a vezérlési probléma bővebb, mint a kvantummechanikai,<sup>8</sup> mert több megoldása létezik, mint a kvantummechanikainak, hiszen minden  $v_0$  értékhez (nem csak  $v_0 = 0$ -hoz) tartozhat egy rugóállandó-spektrum. Ennek oka, hogy a klasszikus  $x(t)$  függvényre kevesebb megszorítás létezik, mint a hullámfüggvényre. Ugyanakkor azonban a vezérlési probléma minden egyes  $v_0$ -nál ugyanolyan (akár analitikus) módszerekkel oldandó meg, mint a Schrödinger-egyenlet.

Annak más oldalról történő megvilágítására, hogy a kvantummechanikai probléma megoldása bonyolultabb, több megkötésnek tesz eleget, mint a mechanikai, érdemes röviden kitérni az általános, azaz nem

<sup>8</sup> Hacsak nem tételezzük fel az origóban még egy  $v_0$ -val arányos Dirac-delta potenciált is. Az azonban, hogy az amúgyis mikroszkopikus eredeti problémában egy még sokkal kisebb hatótávolságú kölcsönhatást is beépítsünk, nehezen motiválható.

páros, egyetlen minimumú  $v(x)$  potenciál esetére. Válasszuk az origót a potenciál minimumának. A pozitív és a negatív  $x$  értékekhez tartozó potenciálból pozitív időkre két különböző rugófüggvény definiálható  $k_1(t) = v(t=x>0)$  és  $k_2(t) = v(t=-x>0)$ . Mivel a hullámfüggvénynek mind a pozitív, mind a negatív végtelenben el kell tűnnie, a megfelelő vezérlési feladatban két különböző differenciálegyenletet kell megoldanunk, mindkettőt pozitív időkre, s ugyanazzal a  $d$ -vel:

$$\ddot{x}_i(t) = -[d - k_i(t)]x_i(t), \quad i = 1, 2. \quad (17)$$

A kezdőfeltétel az, hogy az 1-es esetben  $x_1(0) = 1$ ,  $v_1(0) = v_0$ , a másik esetben viszont  $x_2(0) = 1$ ,  $v_2(0) = -v_0$ , ugyanis az  $x_2$  megoldás  $x$ -tengelyre való tükrözésével kapott teljes megoldás:  $\psi(x>0) = x_1(t=x)$ ,  $\psi(x<0) = x_2(t=-x)$  csak így lehet folytonosan deriválható az origóban. Az energiaspektrum megtalálása azt jelenti, hogy minden egyes véges  $v_0$  és  $d$  mellett végig kell próbálnunk, hogy vezérelhető-e *mindkét feladat egyszerre*.

## Összefoglalás

Megmutattuk, hogy létezik egy időfüggő vezérlési feladat, amely szoros hasonlóságot mutat az egydimenziós kvantummechanikai energiasajátérték-problémával, amennyiben a helykoordinátában páros potenciálokat vizsgálunk. Még ekkor is, a vezérlési feladatnak jóval több diszkrét megoldása létezik, mint a

kvantummechanikainak, mert a vezérelt részecskének lehet kezdősebessége is. A sikeres vezérlés mindig egy instabil pont (az origó) elérését jelenti, ami csakis a stabil sokaság mentén lehetséges. A vezérlés feltétele tehát úgy fogalmazható meg, hogy a kezdőfeltétel essen rá az origó stabil sokaságára. A dinamikai rendszerek szemlélete új megvilágításba helyezi a klasszikus kvantummechanikai energiasajátérték-problémát is.

## Köszönetnyilvánítás

Köszönjük *Varga Balázs* tanár úrnak (Eötvös József Gimnázium, Budapest), hogy olyan modern fizikai órákat tartott, amelyek alapján a 11-edikes diákban felmerült a kérdés: mi lehet a Schrödinger-egyenlet időbeli megfelelője. Ez vezetett el a bemutatott gondolatmenethez.

## Irodalom

1. Nagy Károly: *Elméleti Mechanika*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
2. W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling: *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2002.
3. Tél Tamás, Gruiz Márton: *Kaotikus Dinamika*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
4. <http://ni.com/labview>
5. Marx György: *Kvantummechanika*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971.
6. F. Constantinescu, E. Magyari: *Kvantummechanika Feladatok*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.
7. L. D. Landau, E. M. Lifšic: *Kvantummechanika*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
8. N. Rosen, P. M. Morse, *Phys. Rev.* 15 (1932) 210.

## A FIZIKA TANÍTÁSA

# KÖZÉPISKOLAI DEMONSTRÁCIÓS KÍSÉRLETEK ELEMZÉSE

Wiedemann László

Budapest

A görög filozófiai felfogás szerint az axiomatikus gondolkodás és annak eredményei bírnak csupán igazságtartalommal. Az empiriával szemben arisztokratikus módon elzárkóztak, szinte lenézték azt.

A megismerés folyamata az újkorban épül tovább, és kellő filozófiai súlyt kap *Bacon* és *Hume* munkássága által, amikor az empiria is a megismerés hiteles módszerévé, hiteles eszközzé válik. Az empiria anyaga adja az axiomatikus gondolkodás tartópilléreit és frissíti az axiómákat, ahogy ezt manapság elképzeljük. *Galileinél* tetőzik ez a kettősség a módszeresen végigvitt kísérletezésben és elméletalkotásban. Ezáltal bővülnek a természettudományban az igazságkritériumok. Megfigyelés és kísérlet az egyik oldalon, elméletalkotás a másik oldalon.

Fizikátörténeti előadásában *Simonyi Károly* professzor mindig nyomatékkal emelte ki a kísérletezés

fontosságát; úgy mondta gyakran, hogy „Galilei vett egy lejtőt”, vagyis nemcsak elképzelte, vagy az ideáját tekintette, hanem kézbevette és méréseket végzett vele.

A sorra kerülő kísérletek nem kutatás célúak, hanem igazoló, illetve a törvény érvényességét alátámasztó kísérletek. A tanításban főleg ilyenek szerepelnek, de előfordulnak fizikai mérések, mérő-kísérletek is. Itt sohasem felfedezésről van szó, hanem vezetésről. Naivitás felfedezésként aposztrofálni az iskolai fizikai méréseket. Inkább utánérzésről van szó, jelentős kutatók eljárásait ismételjük meg célirányos módszertani egyszerűsítésben.

Empíria és kísérlet előzetes, vonatkozó elméleti ismeretek nélkül semmit sem ér. A dolog értelméhez kell eljutni. Ezt nem nyerhetjük a látványosság szépségével vagy egyszerű manipulációval. A látottak mö-

gé kell nézni, távolabbi szintetizálás, vagyis valamilyen szemléletalkotás érdekében. A kísérleti eredményeket kell beilleszteni már ismert elméleti rendszerbe. Amikor ez nem megy, ott állunk a nagy felfedezések küszöbén.

A kísérletek ilyen értelmezése sorrendet jelöl ki. Az előbbiek szerint elsőként a kísérlet mélyebb értelmezése, ezután viszont visszatérés az alapszituációra, de más oldalról való közelítéssel. Ezáltal megvalósul a tapasztalat és elmélet erősebb összekapcsolása. Mindent a matematika fokozott bevonásával tesszük. A kísérlet és elmélet egységében egy új igazságkritérium jelenik meg. Sok esetben az elemzések differenciálegyenletek alkalmazását is szükségessé teszik. Ilyenkor mindig tanári szintre kell gondolni, de kellő módszertani tudással vissza lehet térni egyszerűbb magyarázatra is.

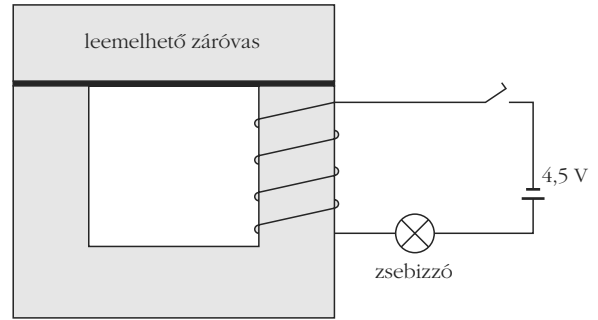
Ellenpontként itt belép egy ismert didaktikai aggály. Vannak, akik az egyszerűség bővületében élnek, e vélemény a naivitásig mehet. Mondják, a természet olyan egyszerű és világos, csak követni kell. A kísérletek és a magyarázatok is legyenek egyszerűek, minden más túlbonyolítás. Úgy gondolják, ha a látvány szórakoztató, már érthető is a kísérlet. Lebilincselni ajánlatos, de nem elegendő. Hasonló ez a feleletválasztós kérdések attrakcióihoz; felszínességet hordoz a konstrukciójuk, ezt preferálják, holott valójában a kérdések jók és tartalmasak.

Tehát vigyázzunk a túlzott analízálással, de a túlzott egyszerűsítéssel is. *Härtlein Károly* barátom (BME Fizikai Intézet) gyakorta szokta emlegetni beszélgetéseinkben *Einstein* egyik ominózus kitételét, amely szerint „egyszerűsítsük le a tudományos magyarázatokat, amennyire lehet, de annál jobban semmiképpen”.

Lássunk néhány példát a problémakezelés egymásra épülő szintjeire.

## Vasmag leemelése-leszakítása áramjárta tekercsről

Az iskolai demonstrációs transzformátorkészletből veszünk egy tekercset (1200 menetes), ezt ráhúzzuk a vasmagra és zárt vasmagot hozunk létre. Ezután egyszerű egyenáramú áramkört létesítünk 4,5 voltos teleppel a tekercs és egy zsebizzó sorba kötésével (1. ábra). A kísérlet most annyi, hogy a vasmag felső részét (elég nagy erővel) leszakítjuk az alsóról. Eközben azt látjuk, hogy az izzó erőteljesen felvillan, majd ismét visszanyeri eredeti fényerejét. De még ki is éghet. Ha a vasmag leszakított részét, a felső leemelt részt ráejtjük az alsó részre – így ismét zárt vasmagunk lesz –, a ráesés rövid időtartamára az izzó fénye teljesen elhalványodik, majd rövidesen ismét visszanyeri eredeti fényerejét. A kísérlet látványos, a magyarázat az elektromágneses indukció nem szokványos megjelenésére utal, amikor egy mágneses kör mágneses ellenállása változik. Az értelmezés, egyre mélyebben, három lépcsőben lehetséges.



1. ábra. Kísérleti összeállítás a vasmag leemelése-leszakításához.

Kvalitatív magyarázat. A leszakítás ideje alatt az izzón átfolyó áram megnő, mivel fényereje nagyobb lett. Ez csak úgy lehetséges, hogy fellépett egy beiktatott ellenfeszültség. Ez éppen a körben keletkezett indukált feszültség, ami fluxusváltozás eredménye. Úgy vehetjük, hogy leemeléskor zárt vasmag helyett légréssel bíró vasmagos tekercsünk lesz. Minthogy a  $B$ -tér forrásmentes ( $\text{div} B = 0$ ), és a  $B$ -vonalak merőlegesek a vas-levegő elválasztó felületre, a légréssel bíró mágneses körben mindenhol ugyanannyi és könnyen kiszámítható  $B$ -vonal halad. Ezen  $B$ -vonalak száma a légrés miatt most jóval kevesebb, mint zárt vasmag esetén, tehát a  $(BA)$  fluxus csökkent, így a vasmagot körbefogó tekercsben indukált feszültség keletkezik a leemelés ideje alatt, amely az áramkörben a telepfeszültséghez előjelesen hozzáadódik. A Lenz-törvény következtében viszont az indukált feszültség a fluxus csökkenését akarja akadályozni, az eredeti fluxust akarja fenntartani, tehát a kör összes feszültségét növeli, ezáltal növeli a kör áramát, hogy az eredeti fluxus kevésbé csökkenjen. Ezért az indukált feszültség növeli a kör összes feszültségét.

A vasmag ráejtésekor éppen a fordított zajlik; itt az indukált feszültség a már kisebb fluxust akarja fenntartani, így most a telepfeszültséggel ellentétes, aminek következtében kevesebb áram folyik a körben, mint az eredeti teljes fluxus esetén.

A kísérleti elrendezést egy  $x$  vastagságú légréssel ellátott toroid tekercsrel modellezhetjük. Írjuk fel a gerjesztési törvényt a körre, amikor figyelembe vesszük, hogy  $B = \mu H$ , ahol  $\mu = \mu_0 \mu_r$ . Ezzel egyúttal kijelöltük az egyszerűsítés egy körét, amennyiben a hiszterézisgörbe helyett  $B$  és  $H$  között lineáris kapcsolatot tételezünk fel.

Kihasználjuk, hogy a mágneses körben  $B$  mindenhol ugyanaz, mivel a  $B$ -tér forrásmentes, továbbá  $B$ -nek normál komponense a vas-levegő elválasztó felületen maga a teljes  $B$ -érték. A számítás vonalintegrál helyett most szorzatösszegre redukálódik:

$$\frac{B}{\mu_1} (l - x) + \frac{B}{\mu_2} x = n I,$$

ahol az első tagban a vas permeabilitása szerepel, a második tagban a levegőé, továbbá  $l$  a toroid középvonalának hossza,  $n$  a tekercs menetszáma,  $I$  a kör áramerőssége. Mivel a vas relatív permeabilitása ~

5000, a levegőé viszont 1, ezért jó közelítéssel az  $A$  keresztmetszetű vasmag fluxusa

$$\Phi = \mu_2 \frac{nIA}{x}.$$

A légrés növelésével a fluxus láthatóan csökken. Ennél a közelítésnél a hiszterézisgörbét kiiktattuk, mivel ezáltal a jelenséget meghatározó hatás a légrésre koncentrálódik.

Az előbbi leírás ugyan már kvantitatív, de csak közelítő jellegű, ugyanis  $x$  növelésével maga a gerjesztő  $I$  áram is változik, így  $I$  magának  $x$ -nek is függvénye. A további számoláshoz  $x$  változását elő kell írunk, például állandó sebességgel emeljük le a vasmagot. Ez a legegyszerűbb eset:  $x = vt$ ,  $v$  a leemelési sebessége,  $t$  az idő. Ha most így az  $x(t)$  függvényt ismerjük, akkor a körre felírt huroktörvény segítségével ez a bonyolult folyamat differenciálegyenlettel leírható:

$$IR + \frac{d\Phi}{dt} = U_e,$$

ahol  $R$  a kör teljes ohmos ellenállása, a jobb oldal a telep feszültség és  $\Phi$  deriváltját az első képletből kell előállítani oly módon, hogy az áramot is az idő függvényének tekintjük. Tehát ezt a deriváltat törtfüggvény deriváltjaként kell előállítani. Ezáltal  $I(t)$ -re differenciálegyenletet kapunk. A részletek megtalálhatók a szerző egyik cikkében: *Fizikai Szemle* 1970/3. szám. Ezúttal tájékozódásképpen egyszerűbb közelítést veszünk. Mivel a légrés vastagsága kicsi, és állandó sebességgel mozgatjuk a vasmagot, azért vegyük most  $x$  átlagát, ami egy állandó érték és ezt a törtfüggvény idő szerinti deriválásakor a végén vesszük figyelembe:

$$\frac{d\left(\frac{I}{x}\right)}{dt} = \frac{I'k - Iv}{k^2},$$

ahol  $k$  jelenti  $x$  átlagát, vagyis a résszélesség felét és  $v$  a már mondott mozgatási sebesség. Ezt a fenti huroktörvénybe helyettesítve kapunk egy elsőrendű, inhomogén differenciálegyenletet az  $I(t)$  függvényre:  $aI' + bI = U_e$ , ahol  $a$  és  $b$  állandók.  $b = R - \lambda v$ ,  $\lambda$  szintén állandó. Az áramerősségre a partikuláris megoldás

$$I_p = \frac{U_e}{R - \lambda v}.$$

Ha az eredeti, légrés nélküli állapotban számolnánk az áramerősséget, Ohm törvénye alapján

$$I = \frac{U_e}{R}$$

értéket kapnánk. Világosan látszik, hogy az előbbi áram – mikor a vasmagot leszakítjuk – nagyobb mint a stacionárius áram, és pedig nagyobb szakítási sebesség esetén nagyobb lesz.

## Felfüggesztett rugó anyageloszlása

Nagy átmérőjű (~ 10 cm), sűrű menetű, laza spirálrugót (slimky) egyik végénél fogva felemelünk és nyugodtan tartjuk. Függetlenül lóg, a másik vége szabad. Az egyes menetek távolsága mérvadó a helyi anyageloszlásra (2. *ábra*). Azt tapasztaljuk, hogy a menetek egymás közti távolsága a felfüggesztés közepében a legnagyobb. Úgy mondhatnánk, hogy ez a spirálrugó-alakzat a felfüggesztés körül a legritkább. Nem a rugó anyagának a sűrűségéről van szó! Határozzuk meg számolással és méréssel ebben az állapotban anyageloszlását. Hasznos lehet a vonalsűrűség fogalmának bevezetése. A  $\rho$  vonalsűrűsége az egysegnyi hosszúságra eső tömeget értjük.

A középiskolai gyakorlatban, ha a Hooke-törvény előfordul, akkor azt többnyire a szál végére írjuk fel. E problémában általánosítva felhasználjuk, hogy a Hooke-törvény a rugalmas szál belső pontjaira is érvényes, egyben differenciális formában is. A spirálrugó-alakzatot egészében rugalmas szálnak tekintjük. A differenciális Hooke-törvény alkalmazásakor határátmenettel a vonalsűrűség helyfüggése meghatározható:  $\rho = \rho(x)$ , ahol  $x$  a megnyúlt szál mellett képzelni nyújtatlan szálon – az úgynevezett referenciaszálon – a befogástól számított távolság. A 2. *ábra* alapján okoskodunk, de először általánosságban, vagyis a szálat nem feltétlenül gravitációs erő terheli. Hason  $F$  erő a szál végére a szál egyenesében! Vizsgáljuk a belső pontok elmozdulásait a referenciaszállhoz képest! Legyen  $P_1$  pont  $x_1$  távolságra a befogástól,  $P_2$  legyen  $x_2$ -re a referenciaszálon mérve! Az  $F$  erő hatására  $P_1$  eltolódik és az  $x_1$  szakasz megnyúlása  $y_1$ , az  $x_2$  szakaszé  $y_2$ , így a  $\Delta x$  szakasz átmege  $\Delta x'$ -be. Mennyi ez?

$$\Delta x' = (x_2 + y_2) - (x_1 + y_1) = \Delta x + \Delta y.$$

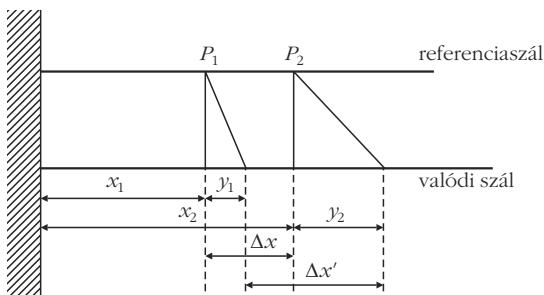
Az  $y$  érték a helyi megnyúlás,  $\Delta y$  a  $\Delta x$  hosszúságú szakasz megnyúlása, ahogy a referenciaszálon előre haladunk. Mi a kapcsolat  $\rho$  és  $y$  között? Ez abból az észrevételből adódik, hogy bárhol is tekintünk egy  $\Delta x$  darabot a referenciaszálon, a benne foglalt tömeg ugyanaz, mint a valódi, vagyis a megnyúlt szálon található  $\Delta x'$ -ben. Ezért az  $m = \rho l$  definíciós képlettel,  $\rho \Delta x' = \rho_0 \Delta x$ , ahol  $\rho_0$  a nyújtatlan szál vonalsűrűsége,  $\rho$  a nyújtott szálé.  $\Delta x'$  értékét helyettesítve,  $\rho$ -ra kapjuk, hogy

$$\rho = \rho_0 \frac{\Delta x}{\Delta x + \Delta y} = \rho_0 \frac{1}{1 + \frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Végül határátmenettel azt kapjuk, hogy

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \frac{dy}{dx}}.$$

Ez eddig általánosságban igaz. Ha tehát ismerjük az  $y$  helyi megnyúlás  $x$ -függését, a megnyúlt szál  $\rho(x)$  anyag-



2. ábra. A rugó és a referenciaszál megnyúlása.

eloszlása meghatározható. A jelen esetben  $y(x)$  meghatározása most már azon alapul, hogy a Hooke-törvényt a szál belső pontjaira írjuk fel. A Hooke-törvényben  $F(x)$  a szál egyik belső pontjában fellépő erőt jelenti. Alkalmazzuk  $\rho(x)$  képletét a felfüggesztett szálra! A referenciaszál  $P$  pontjában a húzóerő a Palatti szálrész súlya. Tekintsük ezután a  $\Delta x$  hosszúságú,  $A$  keresztmetszetű szakasz megnyúlását! Erre írjuk fel a Hooke-törvényt:

$$\Delta y = \frac{1}{E} \frac{\Delta x [(L-x) \rho_0 g]}{A}.$$

Ezután képezzük a  $\Delta y/\Delta x$  hányadost, majd határértékre térünk és ezzel az  $y$  helyi megnyúlásra kapunk egy differenciális formulát:

$$y' = \frac{\rho_0 g}{EA} (L-x).$$

Az egész szálra vonatkozó Hooke-törvényből számolható, hogy  $EA = DL$ , ahol  $D$  az egész szál direkciós ereje,  $L$  a referenciaszál hossza. Így

$$y' = \frac{\rho_0 g}{DL} (L-x).$$

Ha ezt behelyettesítjük  $\rho$  fenti általános képletébe, megkapjuk a megnyúlt szál keresett anyageloszlását:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\rho_0 g}{DL} (L-x)}.$$

Látható, ha  $x = 0$ , vagyis a felfüggesztésnél  $\rho$  a legkisebb, míg  $x = L$ -nél  $\rho$  a legnagyobb, éppen  $\rho_0$ . Így  $\rho(x)$  megadja a rugalmas szál anyageloszlását.

Meghatározhatjuk a szál teljes megnyúlását is. Mivel  $dy$  a  $dx$  szakasz megnyúlása, azért a szál teljes megnyúlása

$$\Delta = \int_0^L dy = \frac{\rho_0 g}{DL} \left[ \left( Lx - \frac{x^2}{2} \right) \right]_0^L = \frac{\rho_0 g L}{2D},$$

vagy

$$\Delta = \frac{1}{2} \frac{mg}{D},$$

ahol  $m$  a szál tömege. A képletnek szemléletes jelentése van: mintha  $D$  direkciós erejű súlytalan rugalmas

szálra  $m$  tömegű testet függesztenénk, ekkor  $\Delta$  jelenti az itteni megnyúlás felét.

A mérést itt úgy végezzük, hogy a nyújtott szálon egyenlő szakaszokat tekintve, feljegyezzük, hogy hány menet esik egy-egy szakaszra. A menetek száma közelítően követi a sűrűsége adott anyageloszlást.

## Léggömb felfúvódása evakuált térben

Kis lufit veszünk – ne fújuk fel –, jól lekötjük, és helyezzük el lazán az iskolai demonstrációs légszivattyú üvegharangja alá. Ezután kezdjük a leszívást. A lufi kigömbölyödik, dagad, nagyra nő, akár szét is pukkanhat (3. ábra). Vizsgáljuk a lufi sugarát az evakuált tér nyomásának függvényében, és igyekezzünk feltételel találni arra, hogy még éppen ne pukkanjon szét.

A jelenséget lényegében a lufi anyagának  $E$  rugalmassági modulusza és a nyomáskülönbség határozza meg. Mint érdekesség említhető, hogy leszívás közben az evakuált tér  $p_k$  nyomásának csökkenésével a lufi belsejének  $p_b$  nyomása is csökken, holott első pillanatra azt várnánk, hogy nagyobb nyomás feszíti.

Két formulát használunk fel: a műszaki mechanikából ismert úgynevezett kazánformulát és a differenciális Hooke-törvényt. Az első esetben, ha a kazán terében  $p_b$  nyomás uralkodik, a kazán falában  $\sigma$  feszültség ébred. Hengeres vagy gömb alakú kazánnál egy kettes faktortól eltekintve a képletek azonosak. A kazánformula:

$$\sigma = \frac{Rp}{2v},$$

ahol  $R$  a gömb (lufi) sugara,  $v$  a falvastagság, amit ezúttal állandónak veszünk – egyébként még a Poisson-számot is figyelembe kellene vennünk. Végül  $p$  a gömbbelső – értelemszerűen a  $p_k$ -hoz viszonyított – nyomást, vagyis a relatív nyomást jelenti:  $p_b - p_k$ . Jogos még azt feltételezni, hogy a lufiban lévő levegő izotermikusán tágul. Mindezekből adódik egy egyenletrendszer:

$$p_k + \frac{2\sigma v}{R} = p_b,$$

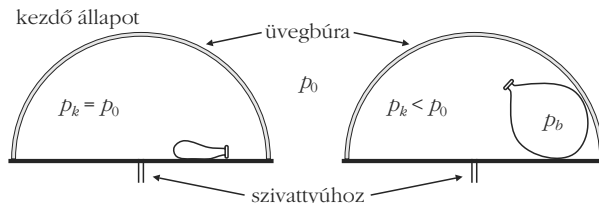
$$p_b = \frac{p_0 V_0}{V}, \quad (1)$$

$$V = 4R^3 \pi \frac{1}{3},$$

$$\sigma = \epsilon E,$$

$$\text{differenciálisan: } d\sigma = E \frac{dR}{R}. \quad (2)$$

3. ábra. Kísérleti összeállítás a léggömb vákuumos felfújásához. Kezdő állapot



Az utolsó képlethez részletesebb megjegyzés kívánkozik.

Tekintsünk egy analóg helyzetet. Rugalmas szálat nyújt a végén ható  $F$  erő. Tetszőleges  $x$  helyen az  $y$  megnyúlás

$$y = \frac{1}{EA} Fx,$$

ha  $F$  minden  $x$  helyen ugyanaz. Ekkor  $\varepsilon = y/x$ , tehát a relatív megnyúlás is mindenhol ugyanaz. Ha viszont az  $F$  erő  $x$ -nek függvénye, például ha az egyik végénél fogva felakasztjuk a szálat, akkor  $y$  már integrállal számítandó, mint az előző fejezetben. Az  $y/x$  hányados így sem adja a helyi relatív megnyúlást, mert  $y$  a teljes  $x$  szakasz megnyúlásának függvénye, függ  $x$ -től. Ugyanígy, ha jelenleg a gömbre

$$\varepsilon = \frac{R - R_0}{R_0}$$

képletet vennénk ( $R_0$  a kezdő sugár), nem a helyi  $\varepsilon$ -értéket kapnánk. Tehát mindig az aktuális  $R$  helyen kell a relatív megnyúlást számítani:

$$\varepsilon = \frac{\Delta R}{R}$$

a helyes. Hasonlóan az előbbieken is adott  $\Delta x$  szakasznak vettük a  $\Delta y$  megnyúlását és így ott

$$\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ valamint } \varepsilon = \frac{F}{EA}.$$

Ha  $F$  állandó,  $\varepsilon$  független a helytől, de  $x$ -től függő  $F$  esetén

$$\varepsilon = \frac{F(x)}{EA}$$

lesz. Valójában a differencia- és a differenciáhányados fizikailag értelmezett különbségéről van szó. Visszatérve az (1) alapegyenletre, amikor a jelenségben a  $\sigma$  feszültséget a Hooke-törvényből vesszük:  $\sigma = \varepsilon E$ , az úgy lesz helyes, ha  $\varepsilon$ -ra való tekintettel infinitezimálisan írjuk fel tetszőleges  $R$  helyen és  $\varepsilon$ -ban  $R$ -hez viszonyítunk. Tehát

$$\Delta p_k + \frac{2 \nu \sigma}{R} = \Delta p_b \text{ és } \sigma = E \frac{\Delta R}{R}.$$

Határátmenetben, felhasználva egy függvény differenciáljának felírását, a megoldandó egyenlet végül a következő lesz:

$$p'_k + \frac{2 \nu E}{R^2} = p'_b, \quad (3)$$

ahol a vessző  $R$  szerinti deriváltat jelent. A jobb oldali derivált  $p_b$  képletéből nyerhető. A már mondottak szerint

$$p_b = \frac{3 p_0 V_0}{4 \pi R^3} \frac{1}{R^3}, \text{ azaz } p_b = \frac{K}{R^3}.$$

(3)-ból a  $p_k(R)$  függvény egyszerűen kiintegrálható:

$$p_k = \frac{K}{R^3} + \frac{\nu E}{R} + C,$$

ahol a  $C$  állandó a kezdeti feltételekből határozható meg;  $R = R_0$ ,  $p_k = p_0 = p_b$ . A keresett  $p_k$  függvény, ami a probléma megoldása, így szól:

$$p_k = p_0 - K \left( \frac{1}{R_0^3} - \frac{1}{R^3} \right) - \nu E \left( \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R} \right).$$

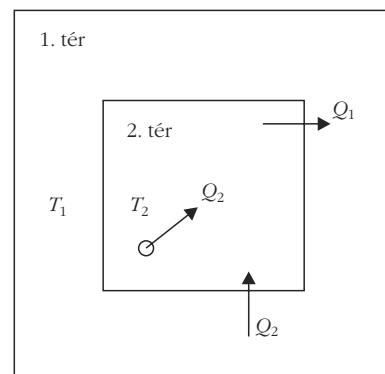
$R_0$  a sugár kezdő értéke és  $R > R_0$ ,  $R$  növekedtével  $p_k$  egyértelműen csökken. Fizikailag az inverz függvény bír szemléletes jelentéssel: a leszívással, vagyis  $p_k$  csökkentésével a luftballon sugara növekszik.

## A háztartási hűtőszekrény energiaviszonyai

A hűtőszekrény működését kell szemügyre venni és a stacionárius állapotot. A hűtő működését a szakirodalom szerint a fordított, reverzibilis Carnot-körfolyamattal modellezzük. Ennek lényege, hogy energiaközlés árán az alacsonyabb hőmérsékletű hőtartályból hőt juttathatunk a magasabb hőmérsékletű hőtartályba. Spontán ez lehetetlen, tiltja a hőtan második főtétele.

Tekintsük a hűtő belső, hűtendő terét. A hűtőszekrényben lévő szerkezet ciklusonként  $Q_2$  hőt vesz ki a hűtött térből és  $W$  munka árán  $Q_1 > Q_2$  hőt ad le a környezetnek. A mechanikai szerkezet, amely a Carnot-ciklust fenntartja, például egy villanymotor által működtetett kompresszor, amely zárt térben cseppfolyósít és elpárologtat valamilyen freont helyettesítő gázt. Így a Carnot-ciklust végző anyag a gáz, a befektetett  $W$  munka a motor által végzett munka. A környezet most az a helyiség, ahol a hűtő áll. (Ne vegyük számításba, hogy a helyiség – például konyha – a falán keresztül termikus kapcsolatban van a  $T_k$  állandó hőmérsékletű külső környezettel.) Továbbá vegyük figyelembe, hogy a hűtő hőcserélő bordái annak hátsó falán vannak felszerelve, vagyis a  $Q_1$  hő – a 4. ábra szerint az 1-es jelű térnek – a helyiségnek adódik le. Az ismert termodinamikai számítások szerint a ciklusonként végzendő mechanikai munka:  $W = Q_1 - Q_2$ , a hűtés jóságai tényezője

4. ábra. A hűtőszekrény és környezete.





$\eta = Q_2/W$ . Előírhatjuk a hűtés két jellemző hőmérsékletét. Legyen az egyes tér állandó hőmérséklete  $T_1$ , a kettes téré az állandó  $T_2$ . Ez utóbbit akarjuk fenntartani, a stacionárius állapotot itt kell majd kifejezésre juttatni. Szintén a számítások szerint  $\eta$  kifejezhető az előbbi jellegzetes hőmérsékletekkel:

$$\eta = \frac{T_2}{T_1 - T_2}. \quad (1)$$

A hűtő fala nem tökéletesen hőszigetelt, így az egyes térből, valamelyes hő a Carnot-ciklustól függetlenül a hűtött térbe visszaáramlik. Stacionárius állapot akkor uralkodik a kettes, vagyis a hűtött térben, amikor ciklusonként az abból kivett  $Q_2$  hő a hűtő falán át az egyes térből oda visszaáramlik, miközben az egyes tér  $Q_1$  hőt kap. Mindebből az is látszik, hogy  $Q_1 - Q_2$  hő fűti az egyes teret, vagyis éppen a befektetett  $W$  mechanikai munka. Ha  $Q_2$  nem áramolna vissza ciklusonként, akkor a hűtött tér hőmérséklete állandóan csökkenne. Ez a visszaáramló hő Newton hőátadási törvényéből számolható:

$$Q_2 = \alpha A (T_1 - T_2) \Delta t, \quad (2)$$

ahol  $\alpha$  a hűtő falának hőátbocsátási tényezője,  $A$  a hőátadó összes felület,  $\Delta t$  egy ciklus ideje.  $T_1$  és  $T_2$  állandóságát biztosítani kell.

A továbbiak kedvéért fontos megjegyzést kell tennünk. Hangsúlyoztuk, hogy a  $T_1$  hőmérsékletet elő kell írni. De ez azt jelenti, hogy fenn kell tartani. Például télen a helyiséget külön fűtjük, így állítva elő az egyes tér állandó hőmérsékletét. Ezt Newton lehűlési törvénye alapján kiszámolhatjuk. Legyen a fűtőtest, vagy kályha teljesítménye  $P$  és a külső környezet állandó hőmérséklete  $T_k$ , akkor stacionárius állapotban a helyiség által felvett és leadott teljesítmény egyenlő, amiből  $T_1$  meghatározható:  $P = \alpha A (T_1 - T_k)$ . Ha például  $\alpha = 2 \text{ J m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1}$ , akkor egy 5 méter élű, kocka alakú helyiség 6 kW-os kályhával  $0 \text{ }^\circ\text{C}$  hőmérsékletű környezetben  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ -ra fűthető fel. Továbbá fontos kiemelni, hogy a számolás alapját képező reverzibilis fordított Carnot-ciklus jó tájékozódásra szolgál csupán, mivel a valóságos körfolyamat irreverzibilis. Ezért a reverzibilis tárgyalás közelítő eredményt szolgáltat.

Fontos továbbá, hogy a falak  $\alpha$  hőátbocsátási tényezője valójában nem állandó, csak kis hőmérsékleti tartományban vehető állandónak. Hő- és áramlási hasonlósági kritériumok segítségével különféle fizikai szituációkban meghatározható  $\alpha$  hőmérsékletfüggése. A jelen helyzetben  $\alpha$  a hőmérséklet-különbség negyedik gyökével arányos. Ennek meghatározására a Grashoff-, Nusselt- és a Prandtl-féle hasonlósági kritériumokat kell felhasználni. Mivel  $\alpha$  értékét számításainkban állandónak vesszük, az eredmények e tekintetben is közelítő érvényűek.

Ezt a modellt tekintve mekkora hűtést lehet elérni?  $T_2$ -nek van alsó limitje. Egyik tényező  $\alpha$  hőmérsékletfüggése. Ha ugyanis  $T_1 - T_2$  nagy, úgy  $\alpha$  is egyre nagyobb, tehát romlik a hőszigetelés a környezet (a he-

lyiség) és a hűtött tér között. Egészen más technika, amikor megközelítik az abszolút zérus fokot.

E kitérő után határozzuk meg stacionárius állapotban a hűtőgép által befektetendő  $P$  mechanikai teljesítményt. Mivel az egy ciklus alatt végzett munka  $W = P \Delta t$ , továbbá felhasználva a jóság tényező formuláját és  $Q_2$  előbbi képletét,

$$\eta = \frac{Q_2}{W} = \frac{\alpha A (T_1 - T_2) \Delta t}{P \Delta t},$$

másrészt;

$$\eta = \frac{T_2}{T_1 - T_2}.$$

Végül

$$P = \frac{\alpha A (T_1 - T_2)^2}{T_2}.$$

Jól látható, hogy nagyobb hűtés eléréséhez négyzetesen növekvő mechanikai teljesítmény szükséges.

Példaként határozzuk meg a szükséges relatív teljesítménytöbbletet a nyári és téli üzem között, ha a hűtött térben ugyanazt a hőmérsékletet kívánjuk fenntartani. Legyen például  $T_2$  mindig  $-10 \text{ }^\circ\text{C}$ , vagyis  $263 \text{ K}$ , míg a helyiségben télen  $18 \text{ }^\circ\text{C}$  és nyáron  $27 \text{ }^\circ\text{C}$ . Keressük tehát a  $\delta = \Delta P/P_1$  hányadost.  $\Delta P$  előbbi képletéből kapjuk, hogy

$$\Delta P = \frac{\alpha A}{T_2} \left[ (T_{12} - T_2)^2 - (T_{11} - T_2)^2 \right],$$

ahol  $T_{12}$  és  $T_{11}$   $T_1$  értéke nyáron, illetve télen. Végül a relatív teljesítménytöbblet

$$\delta = \left( \frac{T_{12} - T_2}{T_{11} - T_2} \right)^2 - 1.$$

Numerikusan:

$$\delta = \left( \frac{300 - 263}{291 - 263} \right)^2 - 1 = 74,6\%.$$

## A klímaberendezésről

A hűtéshez tartozik egy nálunk is elterjedt eljárás helyiségek hűtésére, illetve klimatizálására. A működés elve itt is a fordított reverzibilis Carnot-ciklus. Most azonban a hőcserélőt – ahol leadódik egy-egy ciklusban az elvont hő – nem a hűtendő helyiségben helyezték el, hanem a lakáson kívül, például a külső falon. Így a gép, rendszerint elektromos energia betáplálásával működő párologtató-áramoltató berendezés a helyiségből elvont hőt a környezetnek adja át, amit állandó hőmérsékletűnek tekintünk. Például a freont helyettesítő gázzal zárt csőrendszerben végez-

tetjük a fordított Carnot-ciklust. E gépek érdekessége, hogy egy kapcsolóval fűtésre is állíthatók. A kapcsolóval ugyanis – a zárt csőrendszerben áramoltatott közeg áramlási irányának megváltoztatásával – a párolgató és az úgynevezett kondenzátor szerepe felcserélődik. Ezáltal a gép a környezettől von el hőt és azt a helyiségnek adja le. A csőrendszerben lévő halmazállapot-változások külső munka árán mennek végbe, és ennek révén jut hő az alacsonyabb hőmérsékletű környezetből a melegebb helyiségbe. De „nem magától” megy végbe e folyamat. A jósági tényező viszont más, mint amikor ugyanezt a gépet hűtésre használjuk. Minket ugyanis fűtéskor nem az elvont  $Q_2$  hő, hanem a leadott  $Q_1$  hő érdekel. A befektetett  $W$  munkát ehhez kell viszonyítani. Ezért most a jósági tényező (hatásfok):

$$\eta = \frac{Q_1}{Q_1 - Q_2},$$

átírva:

$$\eta = \frac{T_1}{T_1 - T_2}.$$

Hűtéskor viszont

$$\eta = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

volt a jósági tényező.

## Periodikus hőátadás sík falon keresztül

A probléma egyszerűsített modellen igen szemléletesen tárgyalható, a diszkusszió jól rámutat a jelenség lefolyására.

Gondoljunk egy vékony falu házra, annak egyik szobájára. A fal ugyan téglá, de gyengén tartja a meleget. Ilyen lehet például egy nyaraló. Ez esetben a környezeti hőmérséklet ingadozása a különböző napszakokat tekintve, erősen befolyásolja a szoba belterének hőmérsékletét.

Modellszerűen írjuk le a jelenséget. Tudjuk, a modell akkor jó, ha a jelenség lényeges vonásait tükrözi. Emellett még az is szerencsés, hogy egyszerűbb matematikai tárgyalást tesz lehetővé. Ezért az alábbi feltételeket szabjuk: a hőátmenet a falra merőlegesen történik, akár be, akár kiáramlásról van szó. A fal átbocsátását az  $\alpha$  hőátbocsátási tényezővel vesszük figyelembe, ami egyszerre írja le a fal két oldalán a hőátadást és a véges vastagságú falban a hővezetést. Így  $\alpha$  megadásával sík, vékony falat tekinthetünk. Úgy vesszük továbbá, hogy a helyiségben bárhol a pillanatnyi hőmérséklet ugyanaz. Ezáltal a hővezetés parciális differenciálegyenlete helyett közönséges differenciálegyenletet kell megoldani. Ha pontosabb elemzést követnénk, arra jutnánk, hogy hőmérsékleti hullámok futnának végig a helyiségen lecsengő amplitúdóval. A

szemközti falról részben visszaverődve, állóhullámhoz hasonló állapot alakulna ki. Ha elég hosszú rúd hővezetését vizsgálánk, ahol visszaverődésről nincs szó, ez a számítás alapját képezné a híres Ångström-féle mérő eljárásnak. Ezzel lehet ugyanis nagy pontossággal mérni fémek hővezető-képességét. De kövesük most az egyszerűbb modellt.

Fűtsük a helyiséget  $P$  teljesítménnyel is, legyen a szobában az összes anyag tömege  $m$ , az átlagos fajhő  $c$ , a hőcserélő-felület  $A$ , a szoba pillanatnyi hőmérséklete  $T$ . Legyen továbbá  $T_0$  a környezeti alaphőmérséklet és  $R$  a környezeti hőmérséklet-ingadozás maximuma. Végül a környezet hőmérsékletét írja le az alábbi,  $\omega$  frekvenciájú periodikus időfüggvény:

$$T_k = T_0 + R \sin \omega t.$$

Az előbbieket alapján a szoba hőcseréjére felírhatunk egy energiaegyenletet Newton hőátadási törvényének figyelembe vételével:

$$c m dT = -\alpha A [T - T_k(t)] dt + P dt.$$

A szögletes zárójeles kifejezés  $t$ -től függően lehet pillanatnyilag pozitív vagy negatív. Ezért lehetséges pillanatnyi hőkiáramlás vagy -beáramlás. A megoldandó differenciálegyenlet:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{\alpha A}{c m} [T - (T_0 + R \sin \omega t)] + \frac{P}{c m}. \quad (1)$$

Abban a speciális esetben ha  $dT/dt = 0$  feltételt írjuk elő, (1)-ből adódik, hogy  $P$  már nem lehet állandó, mert akkor  $T$  időfüggetlen lenne, ami a tett feltevessel ellentézik. Ekkor tehát periodikusan kellene fűteni, hogy  $T$  állandó legyen. Ha viszont a külső hőmérséklet nem periodikusan változik, tehát  $\omega = 0$  is fennáll,  $P$  már lehet állandó és kapjuk a közvetlenül is nyerhető  $T$  egyensúlyi hőmérsékletet. Ilyenkor – elemi megfontolással – a leadott teljesítmény egyenlő a kimenővel. Ez adódik a mondott feltevessel, ami (1)-ből is következik. Tehát

$$T = T_0 + \frac{P}{\alpha A}.$$

Visszatérve (1) megoldására, átrendezés után a megoldandó differenciálegyenlet:

$$\frac{dT}{dt} + \lambda T = \gamma + \lambda R \sin \omega t,$$

$$\text{ahol } \lambda = \frac{\alpha A}{c m} \quad (2)$$

$$\text{és } \gamma = \lambda T_0 + \frac{P}{c m}.$$

Megoldás: Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásához hozzá kell adni a megfelelő homogén egyenlet általános megoldását. Ez utóbbi  $T_{hom} = K e^{-\lambda t}$ , ahol  $K$  egy állandó. A (2) egyenlet egy partikuláris megoldását próbafüggvény alakjában keressük. Legyen ez

$$T_{part} = B \sin \omega t + C \cos \omega t + D, \quad (3)$$

ahol  $B$ ,  $C$ ,  $D$  meghatározandó állandók. A (3) feltételt a (2) egyenletbe tesszük és együttható összehasonlítással határozzuk meg az előbbi állandókat. Erre nézve egyenletrendszert kapunk:

$$\begin{aligned} B \omega + C \lambda &= 0, \\ C \omega - B \lambda + R \lambda &= 0, \\ D \lambda &= \gamma. \end{aligned}$$

Ezt az egyenletrendszert megoldva, kapjuk az előbbi állandók konkrét értékeit:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\lambda^2 R}{\omega^2 + \lambda^2}, \\ C &= -\frac{\lambda \omega R}{\omega^2 + \lambda^2}, \\ D &= \frac{\gamma}{\lambda}. \end{aligned}$$

Stacionárius állapotban (jelenleg hosszú időre nézve) a homogén egyenlet megoldása lecseng és ezért (2) stacionárius megoldása:

$$T = B \sin \omega t + C \cos \omega t + T_0 + \frac{P}{\alpha A}. \quad (4)$$

A (4) megoldás diszkussziója tartalmazza a jelenség érdekességét. Ha az első két tagból kiemelünk  $(B^2 + C^2)^{1/2}$ -t, és alkalmazzuk az egyik trigonometrikus addíciós tételt, úgy ismét szinusz-függvénnyel írható le a helyiség periodizáló hőmérséklete. Ez a függvény  $B$ ,  $C$ ,  $D$  fenti képleteivel ilyen lesz:

$$T = R \frac{\lambda}{\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}} \sin(\omega t - \varphi) + T_0 + \frac{P}{\alpha A}, \quad (5)$$

lesz, ahol

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega}{\lambda}.$$

Ezek szerint a helyiségben ugyanazzal a periódussal ingadozik a hőmérséklet, de csökkent amplitúdóval, mivel (5)-ben  $R$  szorzója mindig egynél kisebb. Ami külön érdekesség, hogy a fal hatása még abban is jelentkezik, hogy  $\varphi$  fáziskésést hoz létre a hőmérséklet ingadozásában. Minél nagyobb  $\omega$ , annál nagyobb lesz  $\varphi$  és ugyanakkor annál kisebb a hőmérsékleti amplitúdó. A fal mintegy ellenáll, nem tudja követni az ingadozásokat. Úgy viselkedik, mintha tehetetlensége lenne. Viszont  $\lambda$  által, ha  $\alpha$  nagy, érthető módon a belső térben alig csökken a hőmérsékleti amplitúdó és  $\varphi$  is egyre kisebb, vagyis egyre zavartalanabban engedi át a fal a külső ingadozásokat. Végül  $\omega = 0$  esetén visszakapjuk az alapesetet, ha a környezeti hőmérséklet állandó.

Ajánlható mérés itt az lehet, hogy a nap folyamán többször mérjük a külső és belső hőmérsékletet. Ezután felvehetünk egy diagramot ezek időfüggésére, így szemléltetve a kétféle amplitúdót és a két, közelítően szinusz-görbe  $\varphi$  szögű eltolódását.

Megjegyzendő, hogy az amplitúdócsökkenés nem a falban lévő energiadisszipáció következménye, azaz nem a fal nyeli el a beáramlott energia egy részét, hanem stacionárius állapotban úgy hat a fal  $\alpha$  révén, hogy kevesebb energiát enged át. Más kérdés, hogy külön meghatározható a fal energiasűrűsége. Ugyanakkor a periodizáló hőmérséklettől függetlenül hőátmenet csak hőmérséklet-különbség esetén lehetséges, amit az (1) egyenlet ír le. Jelenleg időfüggő a hőmérsékleti gradiens.

◇

A demonstrációs kísérletek előnyösen tovább fejleszthetők fizikai mérésekké, ahogy erre történt már utalás. Ezáltal tevőlegesen belenyúlunk egy megismerési folyamatba, bár itt sem valami újnak a felfedezéséről van szó, hanem például a vonatkozó törvényekben szereplő paraméterek konkrét méréséről, mint a hőátbocsátási tényező, vagy rugalmas szál vonalsűrűsége. Ha a jelenség időbeli lefolyását vizsgáljuk, akkor a méréssel a folyamat megragadása jelent mélyebb megértést. Tág tere nyílik a különböző szintű megközelítésnek a tanulók tehetsége szerint.

## A FIZIKUS KERTJE – AVAGY A MECHANIKA TANÍTÁSÁNAK EGY ÚJ MEGKÖZELÍTÉSE

Baló Péter  
Tóth Árpád Gimnázium, Debrecen

Sok éve már, hogy az általános iskolától a középiskolán át az egyetemig ugyanolyan felépítésben tanítják a mechanikát. Kinematikával kezdődik, és ezen belül valamennyi speciális mozgást bemutatják, velük a jellemzésükhöz szükséges fogalmakat és törvényeket is. Ezután következik a dinamika. A magára hagyott test mozgása alapján eljutunk Newton I. törvényéhez. A lendület, a lendületmegmaradás törvénye vezeti be

az erő fogalmát. Megtárgyalják az egyes erők erőtvényét, majd Newton II. törvénye segítségével megkezdődik a mozgások dinamikai tárgyalása. Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás, szabadesés, hajítások, egyenletes körmozgás – megannyi speciális eset, amelyek elemzéséhez a már megtárgyalt kinematikai ismeretekre lenne szükség. Mivel a diákok régebben tanulták és túl sok a hozzájuk tartozó for-

mula, nehezen boldogulnak. Súrlódás, tapadás, közegellenállás, és újra szükség lenne a kinematikára. Normál osztályokban ez bizony nem egyszerű feladat. A dinamika zárása után kezdődik a munka-energia fejezet. A munka fogalma, a gravitációs erő és a rugóerő munkájának kiszámítása, valamint a mozgási energia bevezetése után a munkatétel megismerése lenne a következő lépés. Érdekes módon a jelenlegi követelményrendszer szerint a munkatétel emelt szintű tudás. Érthetetlen, hiszen minden ismeret, ami benne van, az a középszinthez tartozik. Ráadásul sok feladat a munkatétel segítségével oldható meg a legegyszerűbben. A munkák kiszámításához egyébként kellenek az erőtvények, amelyek megint túl régen voltak már, nehéz gyorsan felidézni azokat. Ezt követi a helyzeti energia, a rugalmas energia bevezetése és a mechanikai energiák megmaradásának törvénye. Most már elvileg mindent tudnak a gyerekek, lehetne elmélyíteni az ismereteket – de itt az év vége, erre nincs lehetőség.

A nehézségeket elsősorban az okozza, hogy szorosan összekapcsolódó fogalmakat és törvényeket időben egymástól távol tanítunk, s ráadásul a szövegekörnyezet is más. Pedig ez a szétválasztás mesterséges és erőltetett. Pontosan olyan, mintha a fizikus a kertjében lévő gyönyörű növényeket részenként mutatná meg a látogatóknak. Egyik sarokban lennének a levelek, egymás hegyén-hátán az összes fajta levél. Egy másik sarokban tartaná a szárazakat, egy harmadikban a gyökereket. A virágzatok egy negyedik helyen lennének felhalmozva. A látogató pedig, miután mind a négy sarkot megtekintette, hazamehet s megpróbálhatja magának összerakni ezek alapján az egyes növényeket. Képzeltük, hogy mekkora sikerrel!

Sokkal természetesebb lenne, ha egy kertészről vennénk példát. Tegyük a látogatók elé egy növényt s engedjük, hogy azt teljesen körbejárják és alaposan megismerjék. Ezután következhet egy újabb növény, majd még egy s még egy. Egészen addig, amíg a kertünket teljesen be nem mutattuk. Vendégünk minden növény vizsgálatánál egyre tapasztaltabb és ügyesebb lesz.

Most nézzük meg, hogyan lehet ezt megvalósítani! A most következő vázlat a középszintű mechanikai ismeretekből építkezik. Nem nehéz az olvasónak ebben a rendszerben elhelyezni az emelt szintű ismereteket sem.

#### *Magára bagyott test viselkedése*

Elsőként mutassuk meg, hogyan adhatjuk meg a testek helyét és mondjuk meg, mi a nyomkép, a pálya és az út! Majd jellemezzük a mozgás gyorsaságát az átlagsebességgel és a pillanatnyi sebességgel! Ezután foglalkozunk az egyenletes, majd az egyenes vonalú egyenletes mozgással! Eddig tiszta kinematika volt, de ez utóbbi speciális mozgás tárgyalásánál teljesen természetes a kérdés: „Mikor mozog így egy test?” és hasonlóan természetes a válasz is, azaz Newton I. törvénye.

#### *Párkölcsönhatás*

Ezután vizsgáljuk meg a testek párkölcsönhatását! Vezessük be a tömeget (mint azt a fizikai mennyiséget, amely megszabja párkölcsönhatás során a testek sebességváltozásainak arányát), ezután definiáljuk a lendületet és mondjuk ki a lendületmegmaradás törvényét! Az ütközések osztályozásához vegyük elő a mozgási energia fogalmát. Nem kell tőle most félni, hiszen általános iskolában már hallottak róla a gyerekek, ismerős lesz nekik. Az egyes testek lendületváltozása segítségével vezessük be az erő fogalmát és máris kimondhatjuk Newton III. törvényét. Az ütközés előtt, illetve ütközés után a testek egyenes vonalú egyenletes mozgást végeznek, a feladatmegoldások során gyakorolni lehet az idetartozó kinematikai ismereteket.

#### *Gravitációs kölcsönhatás*

Ezt követi a gravitációs kölcsönhatás vizsgálata, ezen belül az egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás tárgyalása és a gravitációs erőtvény megismerése. Az erő munkájának bevezetése után, mivel a mozgási energiát már az előző részben átismételték, következhet a munkatétel, még csak szigorúan a gravitációs erő munkájával. Ez utóbbi elvezet a helyzeti energia bevezetéséhez és a mechanikai energiák megmaradása egy egyszerűsített változatának kimondásához. Egy fejezeten belül egy kis kinematika és dinamika, a munkatétel és energiamegmaradás egymást támogatják. Sokféle feladat megfogalmazható már, és többségük olyan, amelyet akár kinematikailag, akár munkatétellel, illetve a mechanikai energiák megmaradási törvényének egyszerű alakjával meg tudnak oldani a tanulók.

#### *Rugalmas kölcsönhatás*

Ezután a rugalmas kölcsönhatás tárgyalása következhet. A rugóerőtvénye után már meg lehet vizsgálni az egyszerre két erő hatása alatt mozgó testek viselkedését is – azaz Newton II. törvénye, a dinamika alaptörvénye, és azon belül a mozgásegyenlet bemutatása a cél. A rugóerő munkájának kiszámítása után a munkatétel gyakorlásának újabb lehetőségei tárulnak fel. Majd a rugalmas energia bevezetése után a mechanikai energiák megmaradásának törvénye mondható ki teljesen általánosan. Ebben a fejezetben megint szorosan összekapcsolódva gyakorolhatók a kinematikai, a dinamikai és az energetikai ismeretek. A tanulók ekkora már nagyon jártasak lesznek a különböző problémák elemzésében és a mechanika törvényeinek az alkalmazásában.

#### *Súrlódás, tapadás, közegellenállás*

Most következhet a súrlódási erő, a tapadási erő és a közegellenállási erő bemutatása. Segítségükkel gazdagíthatók a már megismert esetek és újabb lehetőség nyílik a mozgásegyenlet, valamint a munkatétel gyakorlására. Akár egyenletes, akár egyenletesen gyorsuló mozgást vizsgálunk, a tanulók nagyon ügyesen alkalmazzák a megtanult összefüggéseket.

### *Körmozgás, bolygómozgás, általános tömegvonzás*

Az egyenes vonalú mozgások után tárgyalhatjuk az egyenletes körmozgást. Elég csak most bevezetni a szögsebességet, valamint a centripetális gyorsulást, és újabb lehetőségek nyílnak a dinamikai és energetikai ismeretek gyakorlására. Most érdemes foglalkozni az általános tömegvonzás törvényével, majd tágítani a kört és az ellipszis alakú bolygópályák megemlézése után bemutatni a Kepler-törvényeket.

### *Forgatónyomaték, merev test egyensúlya, egyszerű gépek*

Már csak a forgatónyomaték, a merev testek egyensúlyának kérdése és az egyszerű gépek áttekintése van hátra.

A tanulók december közepére a legfontosabb dolgokat megismerik és év végéig alaposan begyakorolhatják azokat. Heti másfél órában is kényelmesen tartható ez az ütem. Heti két óra esetén pedig még a hőtananyag első fele (hőtágulás, gázok állapota és állapotváltozása) is tárgyalható a kilencedik osztályban.

Ezt a felépítést először a korábbi évek érettségire előkészítő foglalkozásain alkalmaztam a mechanika tananyag ismételtesére, megszilárdítására. A sikeren felbuzdulva a tavalyi, 2009/2010-es tanévben két kilencedikes osztályomban már az új anyagot is eszerint tanítottam és így tanítom a jelenlegi kilencedikes osztályomban is.

A cikk elején felsorolt nehézségeket – tapasztalataim szerint – teljesen ki lehet küszöbölni. Szinte teljesen megszűnt az említett anyagrészek újratanításának szükségessége. Másrészt a tanulók jobban látják a fizikai ismeretek közötti összefüggéseket, és év végére nagy gyakorlatot szereznek az elméleti és számítási feladatok megoldásában.

A jelenleg kapható fizika tankönyvek közül egyelőre egyetlen tankönyvben található meg ez a felépítés [1]. Ez a kötet egy több szempontból is újszerű tankönyvcsalád első darabja.

### Irodalom

1. Baló Péter: *Fizika 9*. Apáczai Kiadó, 2010.

## AZ ORSZÁGOS SZILÁRD LEÓ FIZIKAVERSENY MEGHIRDETÉSE A 2010/2011. TANÉVRE

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, a Szilárd Leó Tehetséggondozó Alapítvány és a paksi Energetikai Szakközépiskola és Kollégium a 2010/2011. tanévre meghirdeti az Országos Szilárd Leó fizikaversenyt az általános és a középiskolák tanulói számára.

### A versenyre

I. kategóriában a versenykiírás tanévében a rendes érettségi vizsgát tevő évfolyam vagy az azt közvetlenül megelőző évfolyam tanulói,

II. kategóriában az általános és középiskolák 7–10. osztályos tanulói vagy a 13. évfolyammal befejeződő középiskolai képzésben a 11. évfolyamos tanulók nevezhetnek.

A versenyre a hazai és határon túli iskolák nevezését egyaránt várjuk. Nevezési díj nincs, a versenyen a részvétel ingyenes.

Az iskolák a versenyre 2011. január 15-ig jelentkezhetnek a [www.szilardverseny.hu](http://www.szilardverseny.hu) honlapon vagy levélben a Szilárd Leó Tehetséggondozó Alapítványnál (7030 Paks, Dózsa György út 95., tel.: 75-519-326) a versenyzők kategóriánkénti létszámának, valamint az iskolai kapcsolattartó fizikatanár elérhetőségeinek (név, postai cím, telefonszám, e-mail cím) megadásával.

A verseny kétfordulós. Az első forduló időpontja 2011. február 21. 14–17 óráig.

A feladatlapokat a javítókulccsal együtt a Versenybizottság küldi meg a benevező iskoláknak a jelentkezések számának megfelelően.

### A versenyen való részvétel kizáró okai

A versenyfeltételek be nem tartása a versenyből való kizárást eredményezheti. Például:

– A versenykiírásban kiírt kategóriától eltérő kategóriában való indulás.

– Nem megengedett segédeszköz használata.

### A verseny témája, ismeretanyaga, felkészüléshez felhasználható irodalom

A verseny a középiskolás tananyag modern fizikai – elsősorban magfizikai-sugárvédelmi fejezeteinek alkalmazás szintű tudását és környezetvédelmi alapismereteket kér számon. A kijelölt témakörök a következők:

Mikrorészecskék leírásának alapjai, az anyag kettős természete

Hőmérsékleti sugárzás törvényei, fotonok, fény-elektromos jelenség, Compton-jelenség.

De Broglie-összefüggés, elektronok interferenciája.

Heisenberg-féle határozatlansági összefüggés.

A hidrogénatom hullámmmodellje.

A kvantumszámok szemléletes jelentése: 's', 'p', és 'd' állapotok.

Az elemek periódusos rendszerének atomszerkezeti magyarázata.

Az atommag és szerkezete: proton, neutron. Rendszám és tömegszám. Magerők és kötési energia. Radioaktivitás: felezési idő, gamma-, béta- és alfabomlás.

Maghasadás, neutron-lánreakció. Atombomba, atomreaktor, atomerőmű. Atomenergia felhasználásának lehetőségei, szükségessége és kockázata. Sugárvédelmi alapismeretek. Magfúzió, a Nap energiatermelése.

*Hevesy György* (radioaktív nyomjelzés), *Szilárd Leó*, *Wigner Jenő* (atomreaktor) munkássága.

Részecskegyorsítók működési elvei.

Környezetvédelmi alapismeretek: például CO<sub>2</sub> és az üvegházhatás, ózonlyuk, radon-probléma, radioaktív hulladék elhelyezése.

## A felkészülésre javasolt segédanyagok

Országos Szilárd Leó Fizikaverseny feladatai és megoldásai 1998–2004.

Marx György: *Atommagközelben*. MOZAIK Oktatási Stúdió, Szeged, 1996.

Marx György: *Életrealó atomok (Atomfizika biológusoknak)*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1978.

Tóth Eszter, Holics László, Marx György: *Atomközelben*. Gondolat Kiadó, Budapest, 1981.

Radnóti Katalin (szerk.): *Így oldunk meg atomfizikai feladatokat*. MOZAIK Oktatási Stúdió, Szeged, 1995.

Radnóti Katalin (szerk.): *Modern fizika emberközelben*. Feladatok és megoldások CD-n.

A továbbjutás feltétele, a továbbjutottak értesítésének módja az egyes fordulókban

A feladatlapokat a javítókulccsal együtt a Versenybizottság küldi meg a benevező iskoláknak a jelentkezések számának megfelelően.

Az I. forduló írásbeli dolgozatainak megírására a versenyre jelentkező iskolákban kerül sor, amelynek időtartama 3 óra. A versenyzők minden szokásos segédeszközt (füzetek, könyvek és zsebszámológépek) használhatnak.

Az első forduló dolgozatait a megküldött javítási-értékelési útmutató alapján értékelik a szaktanárok. A továbbküldési *ponthatárt elért dolgozatokat*, valamint az értékelő és összesítő lapot legkésőbb *2011. február 28-ig* postázzák a Budapesti Műszaki és Gazda-

ságtudományi Egyetem Nukleáris Technikai Intézete (1521 Budapest, Műegyetem rkp. 9.) címére.

*Pontbátárok*: I. kategória: a maximális pontszám 60%-a, II. kategória a maximális pontszám 40%-a. A versenybizottság a beküldött dolgozatokat ellenőrzi, majd az *első forduló eredményéről* az értesítést legkésőbb *2011. március 19-ig* postázza a döntőbe jutott tanulók iskoláinak.

A versenybizottság a II. fordulóra az I. kategóriából maximum 20 tanulót, míg a II. kategóriából maximum 10 tanulót hív be.

*A 2. forduló (döntő) 2011. április 8–10. között kerül megrendezésre az Energetikai Szakközépiskola és Kollégiumban, Pakson.*

A 2. fordulóban a tanulók elméleti, mérési és számítógépes feladatokat oldanak meg.

## Az eredmények közzétételének módja

A döntőben a nyertes versenyzők a díjaikat a versenyt közvetlenül követő ünnepélyes eredményhirdetésen vehetik át, amelyre a helyi média képviselői is meghívást kapnak. Az egyes fordulók eredményei megtekinthetők a [www.szilardverseny.hu](http://www.szilardverseny.hu) honlapon. A versenyről beszámoló cikk készül a *Fizikai Szemle* részére.

## Díjazás

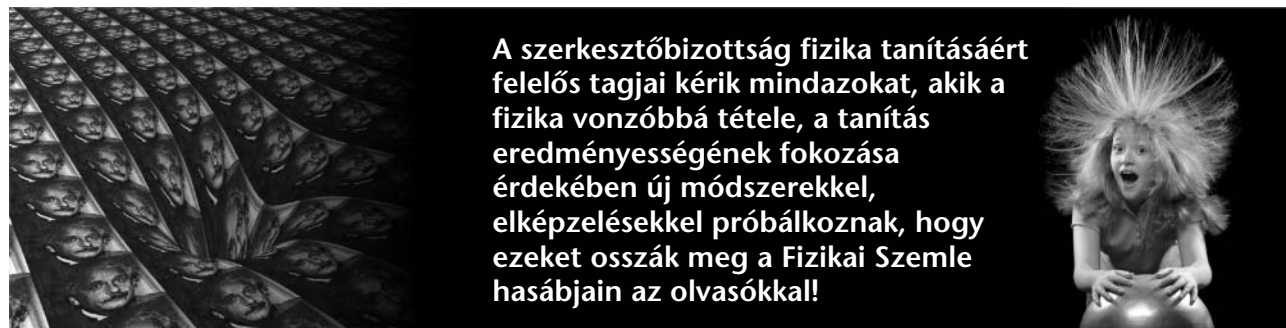
Az országos döntőbe bejutott tanulók könyvjutalomban részesülnek. Kategóriánként 1–3. helyezettet a Szilárd Leó Tehetséggondozó Alapítvány egyszeri ösztöndíjban részesíti.

A legeredményesebb felkészítő tanár – a verseny honlapján megtekinthető pontverseny alapján – Szilárd Leó Tanári Delfin-díjban részesül. A versenyen a legjobb eredményt elért iskola Marx György Vándor-díjban részesül.

## A szervezők elérhetősége

A versenybizottság vezetője: *Sükösd Csaba* tanszékvezető egyetemi docens, BME Nukleáris Technika Tanszék, 1521 Budapest, Műegyetem rkp. 9., e-mail: [sukosd@reak.bme.hu](mailto:sukosd@reak.bme.hu), tel.: 1-463-2523, fax: 1-463-1954.

A verseny felelőse: *Csajági Sándor*, az Energetikai Szakközépiskola és Kollégium tanára, 7030 Paks, Dózsa Gy. u. 95., e-mail: [Csajagi@eszi.hu](mailto:Csajagi@eszi.hu), tel.: 75-519-326, fax: 75-414-282.



**A szerkesztőbizottság fizika tanításáért felelős tagjai kérik mindazokat, akik a fizika vonzóbbá tétele, a tanítás eredményességének fokozása érdekében új módszerekkel, elképzelésekkel próbálkoznak, hogy ezeket osszák meg a Fizikai Szemle hasábjain az olvasókkal!**

## SOMOGYI ANTAL (1920–2010)

Hosszan tartó, türelemmel viselt betegség után 90. életévében, 2010. október 8-án elhunyt a kozmikus sugárzás és az űrkutatás hazai doyenje, *Somogyi Antal* professzor. Tanári, kutatói, valamint hazai és nemzetközi kutatásszervezői tevékenységét egyaránt nagyra értékeli tanítványai és volt munkatársai. Mindig korrekt, segítőkész egyénisége sokunk emlékeiben él tovább.

Későbbi tudományos pályájára hazánk egyik legjobb gimnáziumában, a *Kármán Mór* (*Kármán Tódor* édesapja) által alapított Trefort utcai Mintagimnáziumban, majd a Pázmány Péter Tudományegyetem matematika-fizika szakán készült fel. Az itt tanuló legkiválóbb diákok az oktatásba, kutatásba már korán bekapcsolódtak, és neves egyetemi tanárok közvetlen irányítása mellett dolgoztak. 1943-ban *Kicsiny görbületű folyadékfelszínek alakjának vizsgálata* című diplomamunkáját kissé kibővítve *summa cum laude* fokozatú egyetemi doktori címet szerzett.

1943-ban a budapesti Kölcsey gimnáziumban kezdte tanári pályafutását, majd 1945 őszén visszatért az alma materbe: a Trefort utcai Mintagimnázium tanára lett. Itt tanított egészen 1949-ig, de közben 1947 novemberétől 1948 júliusáig Belgiumban posztdoktorális képzésen vett részt, amelynek végén kitüntetéses vizsgát tett. 1949 tavaszától 1950 decemberéig tanársegéd volt az ELTE Fizikai Intézetében. Később is többször visszatért eredeti tanári hivatásához: 1958 és 1961 között a Miskolci Nehézipari Műszaki Egyetem Fizikai Tanszékét irányította, majd az ELTE fizikus, geofizikus és csillagász hallgatói számára tartott különféle kurzusokat.

A KFKI megalakulása után a *Jánossy Lajos* vezette Kozmikus Sugárzási Osztályra került. Itt bontakozott ki kutatói, később vezetői tevékenysége. Először a nagy energiájú kozmikus részecskék keltette kiterjedt légitáporok vizsgálatával foglalkozott, e témából írta 1958-ban kandidátusi, majd 1964-ben akadémiai doktori értekezését. A tervezett nagy észlelőrendszer kifejlesztésére azonban végül anyagi okokból nem kerülhetett sor. Másik fontos, nagy nemzetközi érdeklődést kiváltó témája a műonok föld alatti vizsgálatához kapcsolódott. Az 1957–58-as Nemzetközi Geofizikai Év alkalmából a KFKI 4-es épülete melletti aknában 18 méter mélységben műon-teleszkópot építettek irányításával, amely azután több mint két évtizeden át

működött, de már röviddel üzembehelyezése után két fontos felfedezéshez vezetett: a nagy energiájú kozmikus sugárzás bolygóközi lökéshullámokon való szóródásának (Forbush-effektus) és a Nap tengely körüli forgásából eredő 27 napos kváziperiodicitásának a kimutatásához.

Az elért sikerek nemzetközi elismeréshez és különféle tudományos testületekben és kooperációkban való részvételhez is vezettek. A „szocialista” országok kozmikus sugárzási munkacsoportját 15 éven keresztül vezette, az IUPAP Kozmikus Sugárzási Bizottságának 6 évig volt tagja, majd 3-3 évig titkára, illetve elnöke. Ő szervezte 1969-ben Budapesten a 11. Kozmikus Sugárzási Világkonferenciát. Egyik kezdeményezője volt az Európai Kozmikus Sugárzási Szimpóziumok sorozatának. 1974-től 1986-ig *CosNews* néven információs bulletint szerkesztett az egész kozmikus sugárzási közösség számára.

Az első fontos nemzetközi együttműködés, amelyet szervezett, a kozmikus sugárzás anizotrópiájának mérésére irányult. Bulgáriában, a 2925 méter magas Muszala csúcson sikerült a magyar–bolgár csoportnak először kimutatnia az 50 és 100 TeV közötti kozmikus sugárzás anizotrópiáját. Később szovjet kooperációban a Tien-san hegységben is hasonló méréseket kezdeményezett.

A 70-es évek végétől érdeklődése egyre inkább az űrkutatás és a kozmikus sugárzásnál kisebb energiájú részecskék felé fordult. A Halley üstökös 1986-os visszatérésekor vezető kutatója volt a Vega szondákon elhelyezett magyar „TÜNDE” műszernek, amelyet nagyrészt ő maga tervezett, és nagy szerepe volt több más űrküldetés előkészítésében és a mérések kiértékelésében is.

Tevékenységét több hazai és nemzetközi díjjal ismerték el. 1963-ban Bródy Imre-díjat, 1976-ban a KFKI Intézeti Díj 1. fokozatát, majd a Bolgár Tudományos Akadémia centenáriumi érmét, 1980-ban a Munka Érdemrend arany fokozatát ítélték neki. 1986-ban Ciolkovszkij-érmet, 1987-ben Jánossy-díjat kapott, 1994-ben a Magyar Tudományos Akadémia Eötvös József-koszorújával tüntették ki, majd még ugyanabban az évben a COSPAR „Distinguished Service Medal” kitüntetését kapta.

Somogyi Antal mindig tisztelettel beszélt és írt azokról, akiknek tevékenységét nagyra értékelte. A



kozmosz sugárzás hazai kutatásának úttörőit, *Barnóthy Jenőt* és *Forró Magdolnát* már egyetemi hallgató korából ismerte, és büszkén tekintette őket elődjének, sőt *Fenyves Ervinnel* együtt nekrológjukat is ő írta. De nagy tisztelettel emlékezett meg Jánossy Lajosról

is, akitől a modern kutatásszervezési és mérés kiértékelési módszereket tanulta. Azokról, akik megbántották vagy mellőzték, keveset beszélt. Úriember volt.

Emlékét megőrizzük.

*Erdős Géza, Kecskeméty Károly, Király Péter*

## TORÓ TIBOR (1931–2010)

„Aki megért és megértet, egy népet megéltet”

*Kányádi Sándor*

2010. október 17-én délelőtt, életének 80. esztendejében elhunyt *Toró Tibor* atomfizikus, nyugalmazott egyetemi tanár, a Magyar Tudományos Akadémia külső tagja. Kívánsága szerint testét elhamvasztják, hamvait pedig a család az általa megnevezett, szívéhez közel álló helyeken – Énlakán, Magyarhermányban, Kányádban, Etéden, Székelyudvarhelyen, Nagyváradon és Temesváron – szórja szét.

„...Szeretem a neutrínót, a reménnyel  
jósoltat, extázisban születettet, a  
gyengédséggel kereszteltet...  
Szeretem a neutrínót, s mindenben  
átsurranó csöppséget, amely nevetve  
szalad át az egész Galaktikán...  
Szeretem a neutrínót...”  
*Galina Nikolajeva*

Toró Tibor professzor halálát gyászolja a fizikus közösség. Az elméleti fizika professzora volt a Temesvári Egyetem Fizikai Tanszékén, 2007-től a Szegedi Tudományegyetem címzetes tanára. A Magyar Tudományos Akadémia külső tagja, a Román Akadémia Tudománytörténeli és Tudományfilozófiai Bizottságának tagja, Bolyai-kutató, az Erdélyi Bolyai Akadémia tiszteletbeli elnöke, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat tiszteletbeli tagja.

A Hargita megyei Énlakán született. Egyetemi tanulmányait a Temesvári Tudományegyetem matematika-fizika szakán végezte.

Jelentős eredményeket ért el több érdekes témában. Az elméleti részecskefizikában elsősorban a neutrínó tulajdonságainak megismerése motiválta. Eredményeiről számos könyvet, tudományos és ismeretterjesztő közleményt írt, több nyelven. Könyvet írt a neutrínóról, amelynek első kiadása románul jelent meg 1969-ben, bővített változata 1976-ban magyarul a Gondolat Kiadónál. A könyv világosan foglalja össze a neutrínó kutatásának első, közel 45 év alatt elért eredményeit. A kutatások 1966-tól felgyorsultak, ezért is időszerű volt a könyv ismételt megjelenítése. Bemutatja a kísérleti eredményeket és részletesen foglalkozik a neutrínó és a gyenge kölcsönhatás elméletével. Még azt is megemlíti, hogy volt idő, amikor jelentős elméleti fizikusok feltételezték, hogy a béta-bomlás során esetleg sérül az energiamegmaradás tétele. Természetesen ezt a feltevést a megfigyelések során észlelt, akkor egészen szokatlan eredmények váltották ki. A neutrínófizika több kozmológiai aspektusáról is írt, az anyag és antianyag



kapcsolatát is taglalta, amit a neutrínó és antineutrínó léte vetett fel. A könyv utolsó mondatában kifejti, hogy az Univerzum megismerésében a neutrínó is a többi elemi részecskehez hasonlóan az ember szolgálatába fog állni. Ebben teljesen igaza lett, hiszen a könyv megjelenése után a neutrínókutatás felgyorsult és igen fontos új eredmények jelentek meg. Ide tartoznak elsősorban azok, amelyek a neutrínó tömegével kapcsolatosak. 1998-ban a Super-Kamiokande detektorral ténylegesen kimutatták a íz-oszcillációt, amely a tömegnégyzetek különbségének függvénye. 2009-ben 1,5 eV tömeget jósoltak a neutrínónak. 2010-ben a CERN-ben észlelték először a neutrínó átalakulásait és azt, hogy biztosan van tömege. 2010 júliusában a fényes vörös galaxisok 3-D MegaZDR7 adatai megmutatták, hogy a három neutrínó tömegének összege kisebb 280 meV-nél. A neutrínók vizsgálata továbbra is fontos. A kis tömeg miatt szerepük van a Standard modell kiterjesztésében, a neutrínó negyedik generációjának megtalálását illetően, és a kvantumgravitációs hatások megismerésében. Utóbbi ténylegesen az Univerzum megismeréséhez is igen fontos.



Toró Tibor nagyon fontosnak tartotta *Bolyai János* munkásságának ismertetését, amely a nem-euklideszi geometria korszakát nyitotta meg. Ő tekintette a legnagyobb magyar tudósnak. Számos művet írt ezzel kapcsolatban, rámutatva Bolyai indító munkájára a *Riemann* utáni differenciálgeometria, a nem-ábeli mértékelmélet és a gravitáció megismerésének folyamatában. Kiemelte, hogy Bolyai János megoldott egy kétezer éves geometriai problémát. Bár a geometria nem természettudomány, hanem önálló logikai konstrukció, mégis alkalmazásának elsődleges célja a körülöttünk lévő világ leírása a matematika nyelvén.

Toró Tibor legtöbb közleménye természetesen a neutrínó megismerésével és a gravitációs hatásokkal foglalkozik. Kiemelhető itt a neutrínó négy spinor komponensű egyenletében a gravitációtól való függés meghatározása nemlokális spinkölcsönhatás esetén.

Számos cikke jelent meg a spinor és a gravitációs tér nemlokális kölcsönhatásáról. Az elemi részek kozmológiai szerepével több közleményben is foglalkozott.

Szakmai tevékenysége mellett kiemelkedő több évtizedig tartó közéleti munkássága, amellyel hozzájárult a magyar és az erdélyi természettudományi és matematikai kultúra megismertetéséhez és terjesztéséhez. Nagyszámú közleményben foglalkozott jelenlegi ismereteink történeti, filozófiai és ismeretelméleti vonatkozásaival.

Jelentős sikere volt a Bolyai Díj felújítása.

A székely fizikus végül hazatért. Kívánságához híven Énlakán, Magyarhermányban, Kányádban, Etéden, Székelyudvarhelyen és Nagyváradon szórták szét hamvait, valamint Temesváron helyezték el művei mellett.

Emlékét őrizzük.

Dézsi István, KFKI RMKI

## BÚCSÚ TORÓ TIBORTÓL

Németh Judit  
ELTE

Toró Tibor, az MTA külső tagja, az erdélyi magyar fizikusok egyik legkiválóbb képviselője volt. Utoljára az Akadémia májusi közgyűlésén találkoztam vele, amikor a betegségéből még semmi sem látszott, sőt tele volt tervekkel. A nyár vége felé Csíkszeredán terveztek fizikatanárook számára a Bolyaiakról egy kisebb nyári iskolát tartani, és engem is megkért, hogy tartsak egy előadást *Németh László és a Bolyaiak* címmel. Én rögtön mondtam, hogy Csíkszeredára elmenni nem tudok, de írok a témáról egy-két oldalt és e-mailen majd elküldöm neki azzal a kéréssel, hogy ha egyetért vele, valaki olvassa fel a szöveget az összejevetelen.

A nyár folyamán vártam Tibor válaszát, hogy egyetért-e vele, de nem kaptam semmit. A szöveget azért elküldtem, hátha tudják használni. A válasz néhány hét múlva a feleségétől érkezett: Tibor meghalt.

Nem tudom, el tudta-e olvasni még a rövid kis cikket, vagy sem. Felolvasni az összejevetelen már biztos nem tudta, ebben a sors megátolta. Itt a *Szemlében* az ő tiszteletére és az ő emlékének adózva közöljük le az anyagot, hiszen nélküle ez sohasem íródott volna meg.

Hiányozni fog a jövő májusi közgyűlésen.

### Németh László és a Bolyaiak

Németh László természetesen kora gyerekkorától ismerte a Bolyaiak nevét és sorsát, hiszen nagyapám, aki földrajz-történelem szakos tanár volt, 13 éves koráig (ennyi idő volt apám, amikor nagyapámat behívták katonának) beszélt neki róluk. A későbbiekben azonban rendkívül kiterjedt érdeklődése dacára részletesen nem foglalkozott velük. Az 1932–36 között írt egyszemélyes folyóiratában, a *Tanúban*, ahol mindenről és mindenkiről ír (például már 1932-ben az

Einstein-féle relativitáselméletről, valamint a Világegyetem *Hubble* által 1925-ben felfedezett és a húszas évek végén publikált tágulásáról) Bolyai Jánosról nincs cikk. A háború után, vásárhelyi tanársága alatt természetesen a diákjainak beszél róluk, de részletesebben ott se foglalkozik velük.

A Bolyai-problémára, mint irodalmi témára egy fiatal erdélyi tanárnő hívta fel a figyelmét, aki legépelelte és elküldte neki néhány levelüket. A levelek hangja megfogta szívét és képzeletét. Ezen első levelek egy része még János göttingai tartózkodása alatt íródott, más részük akkor, amikor a fiú már visszatért Erdélybe, és apa és fia gyakorlatilag alig beszélt egymással. Németh László első perctől a „csodálatos mód összekaszkodott emberpár drámáját” látta ezekben a levelekben. „Arra, hogy egy szakmában dolgozó két ember ilyen drámaivá váló pedagógiai szenvedély ékelt volna egymásba, példát én nem tudok, s ez az, ami a Bolyaiak ügyét általános emberi érdekűvé teszi.”

A két ember nagyon különbözött egymástól. Apám egy tanulmányában leírja, milyen volt a külsejük. Főleg *Farkas* leírásával foglalkozik részletesen. Rendkívül jóképűnek írja le, sokoldalúnak, sármórnek. A társaságnak még öregkorában is kedvence, a nagyurak is befogadják maguk közé, tanítványai szeretik, a nők rajonganak érte. „Alighanem a legsokoldalúbb ember volt, aki magyar földön élt... ő szinte minden irányba, amelyben emberi tehetség kifejlődni szokott, alkotásra törően bizonyította képességét” írja róla Németh László. Hihetetlen nyelvtudása volt, nyolc nyelven beszélt folyékonyan. Erős technikai érzéke volt (egy időben kemenceraakással is foglalkozott, megoldotta az önhajtású kocsik problémáját stb.). Tizennégy számjegyre vont négyzet- és köbgyököt fejen. E hihetetlen sokoldalú tudás megszerzése időn-

ként káros hatással van egészségére. Fiatalkori barátjának, Gaussnak írt leveleiből sok mindent lehet megtudni Farkasról, a fiához való viszonyáról, és a korabeli Erdélyben egy szeniális ember sorsáról.

János ezzel szemben egészen más természetű: komor, barátságtalan, az emberekkel nem találja meg a hangot. Míg Farkas még öregen is a társaság központja, János már fiatalon megkeseredik, mogorvává válik. Farkas hihetetlen sokoldalú, János csak két irányba tehetséges: a matematikában és a zenében. (Ezenkívül kiváló vívó is, számos párbajt vívott, nemegyszer halálos végűt, és ő maga sohase sérült meg.) Fiatal korában Paganini darabjaival kápráztatta el a közönséget, Bécsben az operában egy szóló résznél állítólag a császár is megkérdezte, ki az, aki ilyen kiválóan hegedül. Természetesen ő is több nyelven beszélt, de például az irodalmi, vagy a technikai hajlam teljesen hiányzott belőle.

Az író Németh László képzeletét megfogták az apa-fiú levelek. Ezek két korszakra választhatók szét. Az első a göttingai levélváltás, a gondoskodó apa hangja, aki Erdélyből minden téren próbálja irányítani fiát, félti egészségét, félti a nőktől, de legfőképpen félti a kelepccétől, amibe ő maga is beleesett: a paralelogrammák problémájától.

A másik megható levélváltás-szakasz az öreg Bolyai és már idősödő fia között van. Apa és fia számos ok miatt összevesztek, szinte már nem beszélnek egymással, de a matematikai problémák még ekkor is közös témát jelentenek, hiszen ehhez egész Erdélyben jóformán csak ketten értenek. Már nem leveleket, csak cédulákat írnak egymásnak, apám eredetileg azt a címet akarta adni egyik darabjának, hogy címezetlen cédulák.

Azt hiszem, nem vitás, hogy apámat Farkas egyénisége vonzotta jobban, de ő íróként mindig tárgyilagos maradt: műveiből kiérződik, hogy János a szeniális.

Mielőtt befejeznék ezt a visszaemlékezést, idézzük fel egy pillanatra, mi volt a paralelogramma-probléma. A geometria a görögök idejében vált tudománnyá, de nem a tapasztalatból, hanem néhány, a szemlélet számára nyilvánvaló igazságból vont le következtetéseket: ezeket nevezték posztulátumoknak. Ilyen például a következő: minden pontból minden pontba húzható egyenes. Más ilyen igazságokat axiómáknak nevezték, például azt, hogy: az egész nagyobb, mint a része. Van azonban egy posztulátum, ami nem ilyen egyszerű, az ötödik (vagy a Bolyaiak által tizenegyediknek nevezett) posztulátum. Ez Euklidész megfogalmazásában úgy hangzik, hogy ha két párhuzamos egyenest metszünk egy harmadikkal, s az egyik oldali belső szögeinek összege kisebb  $180^\circ$ -nál, a két egyenes metszi egymást. Ezt a tételt azonban a szemlélet nem tudja közvetlenül igazolni. A feltevést azért fogadták el, mert a tér szerkezetéről való ismereteinkkel egyezik. A tizenegyedik posztulátumot számosan próbálták igazolni, Bolyai Farkas is, sőt állítólag Gauss is, de nem sikerült nekik. Ezért óvja Farkas annyira Jánost a paralelogrammáktól (még jobban, mint a nőktől). „Az Istenre kérlek, hagyj békén a paralelláknak, úgy irtózz tőle, mint akármi-csoda feslett társaságtól...”

Farkas nem oldotta meg ezt a problémát, és egész életében szenvedett attól, hogy Jánost nem tudta lebeszélni arról, hogy ezzel foglalkozzon. János megoldotta a problémát, és egész életében szenvedett attól, hogy ezt nem ismerték el.

## A TÁRSULATI ÉLET HÍREI

### Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat díjai, 2010

Ebben az évben az ELFT díjainak kiosztására a pécsi Vándorgyűlésen került sor.

*Andrási Andor*, a Központi Fizikai Kutatóintézet nyugalmazott főmunkatársa munkásságáért Bozóky-díjat kapott.

Andrási Andor 1960-tól kezdődően foglalkozott az emberi szervezetbe került radioizotópok által okozott belső sugárterhelés meghatározására irányuló korszerű mérő és értékelő módszerek kifejlesztésével és alkalmazásával. Ennek eredményeként a kifejlesztett egésztestszámoló mérőberendezés kiépítettsége és az alkalmazott mérő-értékelő módszerek a laboratórium tevékenységét a témán belül az ország legelismertebb és nemzetközileg is nagyra tartott szakmai központjává tették. A Paksi Atomerőmű létesítése során kidolgozta az erőmű dolgozói belső sugárterhelésének meghatározási rendszerét. A csernobili atomerőmű-

balesetet követően részt vett a hazai lakosság belső sugárterhelésének meghatározásában. Nemzetközi projektek keretében a belső sugárterhelés méréstechnikai és dózisszámítási módszereinek továbbfejlesztésével és ezek Európai Unió egységesítésével foglalkozott. 25 éven keresztül a Nemzetközi Atomenergia Ügynökség megbízásából számos országban vállalt szakértői és tanfolyam vezetési tevékenységet, valamint részt vett a NAÜ szakmai kiadványainak elkészítésében.

52 cikkére 75 hivatkozás ismeretes.

A Sugárvédelmi Szakcsoport alapító tagja. Több cikluson keresztül a Szakcsoport vezetőségi tagja, az IRPA-val (International Radiation Protection Association) és a külföldi szakegyesületekkel való kapcsolat felelőse, az IRPA egyes szakbizottságaiban a Sugárvédelmi Szakcsoport megbízottja, a *Sugárvédelmi hírek* elektronikus információs tájékoztató levelének szerkesztője.

Az ELFT *Biri Sándort*, a debreceni Atommagkutató Intézet Részecskegyorsító Centruma vezetőjét munkásságáért Selényi Pál-díjjal tüntette ki.

Biri Sándor a magyar ciklotronrezonanciás (ECR) ionforrás-program vezetőjeként munkatársaival megtervezte, megépítette és üzembe helyezte Magyarország egyetlen, erősen lefosztott plazmákat és nagy töltésű ionnyalábokat szolgáltató berendezését.

A debreceni ECR ionforrás és a köré épült laboratórium mára nemzetközi hírnevet szerzett, vonzó helyszínné vált kutatók, oktatók, diákok és látogatók számára. Biri Sándor az ECR-plazmák vizsgálatával és az ionforrás alkalmazásával több területen figyelemreméltó eredményeket ért el a nehézion-fizikai kutatások területén. Nagy töltésű plazmák tulajdonságait vizsgálta mind kísérleti (röntgen-diagnosztika, plazma fotók, elektrosztatikus szondák), mind elméleti számítógépes szimulációs módszerekkel. Fullerénből plazmákat, világrekord intenzitású ionnyalábokat és fullerénekre alapozott új anyagokat (endohedrális fulleréneket) állított elő. Eddig publikált 103 tudományos cikkére 275 hivatkozást kapott.

Az ELFT *Gál Jánost* – MTA Atomki – munkásságáért Szalay Sándor-díjjal tüntette ki.

Gál János a kísérleti magfizikát támogató elektronikai rendszerek fejlesztésében ért el kiváló eredményeket. A nukleáris spektroszkópia területén több új módszert dolgozott ki az energia-, idő- és intenzitás-mérés pontosságának javítása céljából. Ezeket a módszereket az általa tervezett nukleáris mérőberendezésekben alkalmazta. A kísérleti magfizikában elengedhetetlen vákuumtechnikához kapcsolódóan egy vákuummérő család, valamint kvadrupól tömegspektrométerek elektronikus egységeit fejlesztette ki. Nagy gammadetektor-rendszerek (EUROBALL, EXOGAM, AFRODITE) mellett használnak PIN fotodiódából és CsI(Tl) kristályból álló szcintillációs részecske-detektor-rendszert. Ehhez kapcsolódóan részecske diszkriminációs célra kidolgozta a ballisztikus deficit elvén működő impulzusalaki diszkriminációs módszert, valamint a CsI(Tl) detektorok lassú jeleihez egy speciális úgynevezett non-delay line állandó arányú időzítőt. Részt vett a CERN-beli NA49 kísérletben: a Budapest Fal triggerrendszerét fejlesztette. Eddigi 247 publikációjára 3168 hivatkozást kapott.

Az ELFT *Juhász Róbertet* – MTA Szilárdtestfizikai és Optikai Kutatóintézet – munkásságáért Jánossy Lajos-díjjal tüntette ki.

Juhász Róbert inhomogén rendszerek dinamikájának vizsgálatával foglalkozik.

Reális fizikai rendszerek mindig tartalmaznak inhomogenitásokat, amelyeknek fontos szerepük van a rendszerek kollektív viselkedésében. Juhász Róbert különböző soktestrendszereket, így kvantum spinmodelleket és nemegyensúlyi, sztochasztikus folyamatokat (bolyongás, kizárási folyamat stb.) elméleti módszerekkel vizsgált különböző inhomogenitások (ponthibák, rendezetlenség stb.) jelenlétében. Egyik leg-

fontosabb eredménye a rendezetlen kvantumrendszerknél használatos úgynevezett erős rendezetlenségi renormálási csoport módszer sztochasztikus folyamatoknál való alkalmazása, és annak megmutatása, hogy az erős rendezetlenségi fixpont-koncepció ezen klasszikus transzportfolyamatok esetén is alkalmazható. Az elért eredmények értékét jelzi, hogy azokat a témakör legfontosabb folyóirataiban, többek között a *Physical Review Letters*-ben közölte. Eddigi 25 cikkére 216 hivatkozást kapott.

Juhász Róbert többször is előadást tartott a Statisztikus Fizika Szakcsoport által szervezett Statisztikus Fizikai Napon.

Az ELFT *Lévay Pétert* – BME Fizikai Intézet – munkásságáért Novobátczy Károly-díjjal tüntette ki.

2006 januárjában *M. J. Duff* észrevette, hogy a húr-elméleti kompaktifikációkból ismert effektív 4 dimenziós szupergravitációs (STU) modell fekete lyuk megoldásainak makroszkopikus entrópiaformulája elegáns alakba írható a kvantum információelméletből ismert Cayley-hiperdetermináns segítségével. Felvetődött a kérdés, vajon a fenti matematikai egybeesés csupán a véletlen műve, vagy valami mélyebb fizikai kapcsolatot is sejtet az extrémális fekete lyukak fizikája és a kvantum információelmélet között?

Lévay Péter hozzátéve, hogy 2003-tól kvantum információelméleti kutatásokkal foglalkozik, kiemelt tekintettel a kvantumösszefonódottság geometriájának vizsgálatára. Ezirányú tapasztalatát felhasználva kvantum információelméleti analógiák segítségével megvizsgálta, vajon az *M. J. Duff* által talált formális matematikai egybeeséseken kívül vannak-e további, a dinamikát is érintő analógiák? *A meglepő válasz: igen!* Megmutatta, hogy a fekete lyukak fizikájából jól ismert attraktor mechanizmus, amelynek során az elmélet modulusterei stabilizálódnak az eseményhorizonton, a kvantum információelmélet és a hibajavító kódok nyelvén elegánsan megfogalmazható. A későbbiek során rámutatott, hogy a várakozással ellentétben a „fekete lyukak fizikája – kvantum információelmélet” analógia messze túlmutat az eredetileg vizsgált nagyon speciális STU-modellen. Jóllehet az analógia fizikai alapjai egyelőre ismeretlenek, Lévay Péter meglepő eredményei élénk érdeklődést váltottak ki mindkét terület kutatóiból: 2007. június 18–22. között meghívott előadóként vett részt a „School on Attractor Mechanism” című iskolán (Frascati, Olaszország). Ezt az évenként megrendezésre kerülő iskolát korábban kizárólag a húr-elmélet szakemberei látogatták. Eredményeiről az elmúlt években rangos egyetemeken meghívott előadóként számos előadást tartott (Torun 2006, Imperial College London 2008, Brisbane 2009, Princeton University 2009). A terület matematikai vonatkozásai további érdeklődést váltottak ki a véges geometriával foglalkozó szakemberek körében is. Ennek eredményeként 2009-ben a véges geometria fizikai alkalmazásával foglalkozó Finite Projective Ring Geometry elnevezésű ZIF kooperációs csoport tagja volt (Bielefeld 2009). Lévay Péter eddigi 41 cikkére 275 hivatkozás kapott.

Az ELFT *Osvay Margit*ot – MTA Izotópkutató Intézet – munkásságáért Szigeti-díjjal tüntette ki.

Osvay Margit a sugárzisztenz felvezető-detektorok fejlesztése gamma dózisteljesítmény mérésére, valamint alumíniumoxid-kerámia termolumineszcens dózismérők előállítására és alkalmazására területén ért el kiváló eredményeket. Nagy aktivitású gamma sugárforrások dózisintenzitásainak mérésére szilícium félvezető-detektorokat fejlesztett. A bór és foszfor diffúzióval előállított detektorok sokszorosan sugárellenállóbbak, mint a korábban használt típus (több hazai alkalmazást is találunk, és a svéd Therados cég a gyártástechnológiát is átvette). Másik sikeres fejlesztése a lumineszcencia kutatáshoz kapcsolódik. Kezdeményezője lett a termolumineszcens (TL) módszer kiterjesztésének a sugártechnológiai dozimetria területére. Hazai alapanyagból alumíniumoxid-kerámia TL dózismérőket állított elő (Magyar Szabadalom). A 10 mGy – kGy dózistartomány átfogására alkalmas  $\text{Al}_2\text{O}_3\text{:MgY}$  kerámia dózismérőket itthon és külföldön is sikeresen használják, így például az 1999–2008. években 1-1 évre kihelyezett több száz dózismérővel feltérképezték a gamma dóziseloszlást a Paksi Atomerőmű I–IV. blokkjának hermetikusan zárt, magas hőmérsékleten. A szerződést Osvay Margit a Siemens céggel való versenyben nyerte el. Eddigi 140 publikációjára 130 hivatkozást kapott.

Az ELFT *Vida József* – Eszterházy Károly Főiskola, Eger – eddigi tevékenységét Prométeusz-éremmel ismerte el.

Vida József az EKF Fizika Tanszékének főiskolai tanára, több önálló fizikai szakkiadvány, könyv, tankönyv szerkesztője, írója. A Sulinet Internetes honlapján *Kedvenc kísérleteim* címmel kísérleti gyűjteménye található. Ezt a könyvét a Nemzeti Tankönyvkiadó is kiadta 1995-ben.

Publikációinak száma hatvan feletti, amelyek közül kettő külföldi szaklapban, több a *Fizikai Szemlében*, *A Fizika Tanításában* és a *Fizika Módszertani Lapokban* jelent meg.

Megyei és országos fizikai rendezvények szervezője, az Öveges József Országos Fizikaverseny elnöke, a verseny feladat-összeállító bizottságának vezetője. A Heves Megyei Általános Iskolai Fizikaversenyek feladatszerkesztő bizottságának is tagja.

Az ELFT Heves megyei Csoportjában több mint egy évtizeden keresztül működött megyei titkárként.

Az Eszterházy Károly Főiskola épületében létesített Varázstorony tervezője, megvalósítója és vezetője. Évek óta rendszeres előadója az általános iskolai fizikatanári ankétoknak és rendszeres kiállítója az ankétokhoz kapcsolódó eszközkiallításoknak. Sikeresen képviselte Magyarországot a Science on Stage nemzetközi fizikatanári bemutatón.

Gyakran tart kísérleti bemutatókat, amelyeken mindig telt ház van.

Vida József fáradhatatlan és odaadó lelkesedéssel, kimagasló szakmai hozzáértéssel, kimeríthetetlen gazdagságú kreativitással munkálkodik a fizika népszerűsítésén és professzionális megismertetésén. Egész lényéből a fizika iránti szeretete árad.

Az ELFT *Blészer Jenő*, a pécsi Széchenyi István Gimnázium és Szakközépiskola Mikola-díjas nyugalmazott középiskolai fizikatanára, volt szaktanácsadó eddigi tevékenységét Eötvös Plakettel ismerte el.

Blészer Jenő az ELTE matematika-fizika szakán végzett 1951-ben. Pályáját a dombóvári gimnáziumban kezdte, majd Pécsre került a Széchenyi Gimnázium és Szakközépiskolába. 1975-től Megyei Fizika Szakfelügyelőként segítette a fizikatanárokat az új tantervi reformok megvalósításában. Támogatta Baranya megye középiskoláiban a fizikaszertárok eszközparkjának fejlesztését. Számos demonstrációs eszközt tervezett, terveztetett és terjesztett el a megye középiskoláiban. Mint szakfelügyelő rendszeresen szervezett és vezetett évente 2-3 alkalommal tanári továbbképzéseket. 10 éven át szervezte a Megyei Központi Fizikai Klubot középiskolások számára. Hosszú éveken át vett részt az OKTV Bizottságában a szakközépiskola szekcióban. Kiemelkedő oktató-nevelő és szervező munkája mellett tudott időt szakítani publikációs tevékenységre is. Elsősorban a módszertani folyóiratban, *A Fizika Tanításában* jelentek meg cikkei, de több cikke jelent meg a *Fizikai Szemlében* is.

Az ELFT *Patkós András* – ELTE Atomfizikai Tanszék – eddigi tevékenységét ELFT Éremmel ismerte el, amelynek átadására az ELFT idei Közgyűlésén került sor.

## HÍREK ITTHONRÓL

### Tanári és tudományos kitüntetések

Ebben az évben Rátz Tanár Úr Életműdíjat kapott fizikatanárok: *Vida József*, Eszterházy Károly Tanárképző Főiskola Fizika Tanszéke, Eger és *Várnagy István*, Árpád Gimnázium, Tatabánya.

Ericsson-díj a fizika tehetségeinek gondozásáért kitüntetettjei: *Bülgözdi László*, Batthyányi Kázmér Gim-

názium, Szigetszentmiklós és *Somogyi Sándor*, Révai Miklós Gimnázium és Kollégium, Győr

Ericsson-díjasok a fizika népszerűsítéséért: *Jarosievtz Beáta*, SEK Budapest Általános Iskola és Gimnázium, Ady Endre Fővárosi Gyakorló Kollégium és Gábor Dénes Főiskola, Budapest; *Wöller Lászlóné*, Magyar-

# A FIZIKAI SZEMLE LX. ÉVFOLYAMÁNAK TARTALOMJEGYZÉKE

<p><i>Abonyi Iván:</i> Hell Miksáról, aki 1769-ben elsőként mérte meg a Nap–Föld-távolságot . . . . . 243</p> <p><i>Bajsz József:</i> Nukleáris energia: vele vagy nélküle? . . . . . 156</p> <p><i>Balázs Lajos:</i> Az űrcsillagászat európai útterve . . . . . 325</p> <p><i>Balla Márta, Szatmáry Zoltán:</i> A holt-tengeri tekerccsek és a fizika . . . . . 223</p> <p><i>Beleznay Ferenc:</i> Fél Nobel-díj – félvezető-fizika . . . . . 109</p> <p><i>Berényi Dénes:</i> Aktuális kutatási témák a természettudományokban . . . . . 129</p> <p><i>Blabó Miklós, Horváth Gábor, Hegedűs Ramón, Kriska György, Farkas Róbert, Susanne Ákesson:</i> A lovak fehérségének egy nem várt előnye . . . . . 145</p> <p><i>Büki Gergely:</i> A földben termelt energia hasznosítása . . . . . 181</p> <p><i>Dani Árpád, Tóth Eszter, Kovács Anna, Kovács Izolda, Berta Katalin:</i> Adatminősítés az orvosi eszközfejlesztés szolgálatában . . . . . 10</p> <p><i>Egri Ádám, Horváth Gábor, Horváth Ákos, Kriska György:</i> Beégethetik-e napsütésben a leveleket a rájuk tapadt vízcseppek? Egy tévhitkel terhes biooptikai probléma tisztázása – I.–II. rész . . . . . 1, 41</p> <p>Emlékezés Paál Györgyre (<i>Lukács Béla, Illés Erzsébet</i>) . . . . . 49</p> <p><i>Farkas Alexandra:</i> Halójelenségek: a magas szintű felhők légköroptikai állapotjelzői . . . . . 361</p> <p><i>Gál Vilmos:</i> Világkiállító magyar fizikusok . . . . . 17</p> <p><i>Gyürky György:</i> Az asztrofizikai p-folyamat – a nehéz elemek protongazdag izotópjainak keletkezése . . . . . 37</p> <p><i>Hargittai István:</i> Nehéz és izgalmas – Teller-életrajzot írni 230</p> <p><i>Hárs György:</i> Impulzusok nélkül működő, folyamatos üzemű repülési idő tömegspektrométer . . . . . 160</p> <p><i>Holl András:</i> A tudományos cikkek és adatok akadálytalan és hosszú távú elérhetőségéről . . . . . 190</p> <p><i>Horváth Dezső:</i> A világ keletkezése: Ősrobbanás = teremtés? . . . . . 217</p> <p><i>Hraskó Péter:</i> Jánossy Lajos relativitáselmélet-felfogásáról . . . . . 77</p> <p><i>Kovács László:</i> Henry Cavendish, a kísérletező ember . . . . . 167</p> <p><i>Kövér Ákos:</i> Elektrosztatikus elektronspektrométerek fejlesztése az ATOMKI-ban . . . . . 339</p> <p><i>Martinás Katalin, Radnóti Katalin:</i> Epizódok Madame Curie életéből . . . . . 14</p> <p><i>Németh Judit, Szabados László:</i> Természetes, hogy a Világegyetem alkalmas az élet számára? . . . . . 73</p> <p><i>Oláh-Gál Róbert:</i> Bolyai János hőelméleti vázlata . . . . . 82</p> <p><i>Palló Gábor:</i> Polányi kontra Einstein: vita az adszorpcióról 377</p> <p><i>Patkós András:</i> Puskin utcai kvarkok – I.–II. . . . . 331, 370</p> <p><i>Radnai Gyula:</i> Nobel-díjas családok I.–II. . . . . 300, 343</p> <p><i>Rékai János:</i> Adalékok a tranzisztor előtörténetéhez . . . . . 191</p> <p><i>Sávoly Zoltán:</i> Totálreflexiós röntgenfluoreszcencia spektrometria . . . . . 79</p> <p><i>Slíz Judit:</i> Helyfüggő amplitúdóval gerjesztett harmonikus oszcillátor kaotikus viselkedése . . . . . 116</p> <p><i>Szabó Gábor:</i> Kolmogorov és a relatív gyakoriság . . . . . 241</p> <p><i>Szabó M. Gyula:</i> Ütközések a Naprendszerben . . . . . 289</p> <p><i>Szalai Tamás:</i> Porgyártó(?) szupernóvák . . . . . 399</p> <p><i>Szatmáry Károly:</i> A szegedi csillagvizsgáló . . . . . 252</p> <p><i>Szatmáry Zoltán:</i> Fogytán az urán a Földön? . . . . . 122</p>	<p><i>Szepes László:</i> A kémiai kötés tanulmányozása gázfázisú fotoelektron-spektroszkópiával . . . . . 365</p> <p><i>Tar Domokos:</i> A mennydörgés és a lökeshullámok szerepe a villámgömb kialakulásában . . . . . 237</p> <p><i>Tél András, Tél Tamás:</i> Egy reménytelennek tűnő vezérlési probléma a klasszikus és modern fizika határán . . . . . 409</p> <p><i>Vető Balázs:</i> Gravitáció és gravitomágnesség (javított közlés novemberben) . . . . . 296</p> <p><i>Woyнарovich Ferenc:</i> Hogyan is mozog egy tömeges rugó? – I. . . . . 404</p> <p><b>A FIZIKA TANÍTÁSA</b></p> <p>Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat állásfoglalása a természettudományos közoktatásról és a tanárok helyzetéről . . . . . 65</p> <p>Az Országos Szilárd Leó Fizikaverseny meghirdetése a 2010/2011. tanévre . . . . . 425</p> <p><i>Baló Péter:</i> A fizikus kertje, avagy a mechanika tanításának egy új megközelítése . . . . . 423</p> <p><i>Bartos-Elekes István:</i> A szabadesés kísérleti tanítása a nagyváradi Ady Endre Líceumban . . . . . 204</p> <p><i>Bartos-Elekes István:</i> Az elektron fajlagos töltésének meghatározása magnetron módszerrel . . . . . 266</p> <p><i>Beke Tamás:</i> Elektromosan fűtött Rijke-cső termoakusztikus modellje (javított közlés novemberben) . . . . . 305</p> <p><i>Bigus Imre:</i> Becslési verseny az Árpád Vezér Gimnázium és Kollégiumban . . . . . 29</p> <p>Eötvös Loránd: A fizika tanításáról az Egyetemen (közreadja: <i>Papp Katalin</i>) . . . . . 278</p> <p><i>Hargittai István:</i> Hogy elkerüljük az ipari katasztrófákat... 395</p> <p><i>Holics László:</i> Észrevétel egy megoldáshoz a KöMaL P. 4225. feladata kapcsán . . . . . 356</p> <p><i>Jaloveczki József:</i> Fizika kísérleti bemutató . . . . . 215</p> <p><i>Jendrék Miklós:</i> Jobb ma egy Deprez, mint holnap egy multi, avagy mutatós kísérletek mutatós műszerekkel . . . . . 390</p> <p><i>Jendrék Miklós:</i> Kísérletezzünk hétköznapi eszközökkel! . . . . . 260</p> <p><i>Jubász Nándor, Ősz György, Vida József:</i> A XX. Öveges József Fizikaverseny országos döntője . . . . . 311</p> <p><i>Kovács László:</i> Szubjektív tanszéktörténet . . . . . 91</p> <p><i>Petróczi Gábor:</i> Jubileumi Fizikaverseny a kazincbarcikai Ságvári Gimnáziumban . . . . . 275</p> <p><i>Radnóti Katalin, Adorjáné Farkas Magdolna:</i> Mit tanítsunk fizikából az általános iskolában? . . . . . 84</p> <p><i>Radnóti Katalin:</i> A fizikai fogalmak alakulása . . . . . 255</p> <p><i>Radnóti Katalin:</i> Analógiák a fizikában és szerepük a fizika oktatásában . . . . . 131</p> <p><i>Sándor-Kerestély Ferenc:</i> Wigner Jenő Országos Fizikai Feladatmegoldó Verseny . . . . . 137</p> <p><i>Sükösd Csaba:</i> XII. Szilárd Leó Nukleáris Tanulmányi Verseny – beszámoló, I.–II. rész . . . . . 25, 56</p> <p><i>Tömpe Péter:</i> Bolyai Zentán . . . . . 174</p> <p>Tudósítás az Eötvös-verseny eredményhirdetéséről (<i>Zagyva Tiborné</i>) . . . . . 52</p>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<i>Vannay László, Fülöp Ferenc</i> : A Fizika OKTV harmadik fordulója az első kategória részére (javított közlés novemberben) . . . . .	318	Csákány Antal (1933–2010) ( <i>Bencze Gyula</i> ) . . . . .	360
<i>Vida József</i> : Az egri Varázstorony Miskolcon debütált . . . . .	175	Dióhéjban a SPICE = FÚSZER projektről ( <i>Jarosievitz Beáta</i> ) . . . . .	288
<i>Vida József</i> : Izgalmak a Varázstorony vetélkedő döntőjén . . . . .	207	Eötvös-verseny 2010 . . . . .	285
<i>Wiedemann László</i> : Középszintű demonstrációs kísérletek elemzése . . . . .	416	EURODIM 2010 – 11 <sup>th</sup> Europhysical Conference on Defects in Insulating Materials . . . . .	36
<i>Wiedemann László</i> : Problémamegoldás a fizikában . . . . .	200	Felhívás javaslatételre . . . . .	68
XVII. Newton-kupa ( <i>Farkas László</i> ) . . . . .	64	Fizikai díjak és a Dr. Hegedűs Zoltán Alapítvány ( <i>Faigel Gyula</i> ) . . . . .	282
<i>Zátonyi Sándor</i> : Gyakorlati példák és feladatok az általános iskolai fizikaoktatásban . . . . .	385	<i>Füstöss László</i> : „száraz halból készült máját ehetsz” – 225 éve halt meg Sajnovics János . . . . .	322
<b>VÉLEMÉNYEK</b>		Háromdimenziós tévéközvetítés szemüveg nélkül? ( <i>Barna Angéla, Barna Norbert, Kis János Benedek, Kiss László, Matbesz Anna, Molnár Dániel, Vizsnyiczai Gáspár</i> ) . . . . .	432
<i>Egyed Sándor</i> : Hol kezdődik a metafizika? . . . . .	209	Hazai kutatóműhelyekből . . . . .	144
<i>Makai Mihály</i> : Színe és fonákja . . . . .	351	HTP2010 – Tanártovábbképzés fizikatanároknak a CERN-ben ( <i>Sükkösd Csaba</i> ) . . . . .	106
<i>Papp Zoltán</i> : Sugárvédelem a középiskolában és az érettségien: jól van úgy, ahogy van? . . . . .	95	Idegenek a Tejtrendszerben ( <i>Kovács József</i> ) . . . . .	180
<i>Tél Tamás</i> : Bologna vagy tanárképzés? . . . . .	100	Jégrétegek a Hold északi pólusvidékén ( <i>Tóth Imre</i> ) . . . . .	180
<b>ÁLFIZIKAI SZEMLE</b>		Kálmán professzor az Óbudai Egyetem tiszteletbeli doktora ( <i>Gáti József</i> ) . . . . .	324
<i>Laczik Bálint</i> : Szabadalmazott paramechanika – az inercia hajtóművek . . . . .	140	Kanyargó lávacsatorna a vörös bolygón ( <i>Derekas Aliz</i> ) . . . . .	108
<i>Pálinkás József</i> : Védnöki szavak a tudományért . . . . .	139	Kitüntetések . . . . .	70, 143, 178
<b>KÖNYVESPOLC</b>		Kozmikus részecskegyorsítókat figyelt meg a Fermi ( <i>Szalai Tamás</i> ) . . . . .	108
Berényi Dénes: Tudomány és kultúra ( <i>Füstöss László</i> ) . . . . .	279	Középszintű fizikatudás nélkül is lehetünk fizikában nyilatkozó akadémikusok! . . . . .	214
Fehér István, Deme Sándor (szerk.): Sugárvédelem ( <i>Gáspárdy Géza, Kerekes Andor</i> ) . . . . .	359	Kvantumos repedés a kriptográfia páncélján . . . . .	179
Gorzkowski Waldemar, Tichy-Rács Ádám (szerk.): List of winners in 1 <sup>st</sup> – 40 <sup>th</sup> International Physics Olympiads . . . . .	281	Lentről felfelé havazik a Hartley 2-üstökösön ( <i>Molnár Péter</i> ) . . . . .	432
Hraskó Péter: A relativitáselmélet alapjai ( <i>Bokor Nándor</i> ) . . . . .	66	Mágneses egér ( <i>Gasparics Antal</i> ) . . . . .	36
Nukleon ( <i>Radnóti Katalin</i> ) . . . . .	68	Magyar kutatók is részt vettek a kvark-gluon folyadék hőmérsékletének meghatározásában . . . . .	214
Szemenyei István (főszerk.): Világhírű tudósok jelenről és jövőről ( <i>Berényi Dénes</i> ) . . . . .	177	Marx Emlékelőadás 2010 . . . . .	143
<b>PÁLYÁZATOK</b>		Mayer Farkas (1929–2010) ( <i>Radnai Gyula</i> ) . . . . .	104
A 2010. évi Öveges József díj pályázati felhívása . . . . .	173	Multimédiás alkalmazások a középiskolai természettudományos oktatásban . . . . .	36
<b>HÍREK – ESEMÉNYEK</b>		<i>Németh Judit</i> : Búcsú Toró Tibortól . . . . .	429
14. Európai Szkeptikus Kongresszus . . . . .	287	Pályázat kísérleti fizikából . . . . .	144
A hetedik Budapesti Szkeptikus Konferencia ( <i>Füstöss László</i> ) . . . . .	107	Segítsen Ön is a napviharok előrejelzésében! ( <i>Szalai Tamás</i> ) . . . . .	180
A hosszútávú döntéseket hivatott segíteni az MTA újonnan felállított Stratégiai Tanácsadó Testülete . . . . .	144	Sólyom Jenő köszöntése ( <i>Iglói Ferenc</i> ) . . . . .	398
A legtöbb csillag ikerként születik . . . . .	180	Somogyi Antal, 1920–2010 ( <i>Erdős Géza, Kecskeméty Károly, Király Péter</i> ) . . . . .	427
A legújabb csillagászati nagyműszerek ( <i>Szabados László</i> ) . . . . .	72	Szédítő törpekeringő ( <i>Kovács József</i> ) . . . . .	288
A Pentagon a kutatási pénzeket átirányítja az alkalmazott kutatásokra . . . . .	179	Tanári és tudományos kitüntetések . . . . .	432
Amikor a határ valóban a csillagos ég ( <i>Kiss László, Kővári Zsolt</i> ) . . . . .	324	<i>Tapasztó Levente</i> : Fizikai Nobel-díj 2010 . . . . .	396
Az atomoktól a csillagokig – fizikai előadássorozat az ELTE TTK-n ( <i>Cserti József</i> ) . . . . .	287	Telbisz Ferenc (1932–2010) ( <i>Zimányi Magdolna</i> ) . . . . .	105
Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2010. évi Küldöttközgyűlése . . . . .	106, 143, 283	Természettudomány-tanítási fesztivál Magyarországon . . . . .	180, 288
Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat díjai, 2010 . . . . .	430	Toró Tibor, 1931–2010 ( <i>Décsi István</i> ) . . . . .	428
Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat Közhasznúsági jelentése a 2009. évről . . . . .	211	Új CCD-kamera a Pizskéstetői Observatóriumban . . . . .	324
Az óriás lézer mérőoldkőhöz ért a fúziós kutatásokban . . . . .	71	Új helyre költözik az Eötvös Loránd Fizikai Társulat . . . . .	360
Az űrállomás 2028-ig képes lesz működni . . . . .	144	Ütköző részecskék fekete lyukakat hozhatnak létre . . . . .	71
Búcsú Biczó Gézától ( <i>Ladik János</i> ) . . . . .	285	Vákuumfizikai, felületkémi, nanoszerkezeti szemináriumok 2010 második félévében . . . . .	213
		Varga Dezső 70 éves . . . . .	285
		XIV. Magfizikus Találkozó – 2009. szeptember 3–4. ( <i>Fülöp Zolt, Horváth Ákos, Lévai Péter</i> ) . . . . .	69

Német Óvoda, Általános Iskola és Gimnázium, Győr;  
Bigus Imre, Árpád Vezér Gimnázium, Sárospatak.

Zsigó Zsolt fizikatanár MTA pedagógus kutatói pályadíjat kapott november 30-án.

Díjakat adtak át december 3-án a Magyar Nukleáris Társaság Ünnepi Közgyűlésén Pakson:

Csajági Sándor paksi fizikatanár kapta a Magyar Nukleáris Társaság idei Szilárd Leó Díját.

Zsigó Zsolt nyíregyházi fizikatanár nyerte a Magyar Nukleáris Társaság idei Öveges-díját.

Szepesi Tamás, a KFKI RMKI fiatal kutatója kapta a Magyar Nukleáris Társaság Simonyi Károly Emlékplakettjét, amelyet fúziós kutatásokban elért kiemelkedő eredményért ítélnek oda évente.

## HÍREK AZ UNIVERZUMBÓL

### Lentről felfelé havazik a Hartley 2-üstökösön

A mélyben fagyott állapotban levő, majd a naphő hatására szublimáló szén-dioxid fagyott vizet és poranyagot juttat az üstökös felszíne fölé.

A NASA Deep Impact szondája 2010. november 4-én alig 700 km távolságban száguldott el a Hartley 2-üstökös magja mellett. A megközelítés során a kutatóknak eleinte csak a kométa igen sok és igen aktív gázkilövellése tűnt fel, amelyek feltűnő szén-dioxid-felhőket fújnak ki a felszín tucatnyi pontján. Azonban a további vizsgálatok során kiderült, hogy a közeli űr is ragyogó jég- és hőtörmelékkel tarkított, amelyek némelyike akár kosárlabda méretű is lehet.

Mind ez idáig négy másik üstököst sikerült űrszondáknak megfigyelniük. A meglátogatott kométák (Halley, Borrelly, Wild 2 és Tempel 1) egyikénél sem sikerült hasonló űrbéli hógolyókat megfigyelni. Ez különösen a Tempel 1 esetében fontos, mivel ezt az üstököst ugyanez a szonda kereste fel, és az ugyanazzal a kamerával, ugyanolyan felbontással készített képek esetében nem voltak megfigyelhető a hólabdák. Mindezek alapján a Hartley 2 egyik eddig ismert üstököshöz sem hasonlítható.

A hóviharban kidobódott jég- és porszemcsék egy közelítőleg gömb alakú térrészt töltenek be, amelynek középpontja a Hartley 2 forgó magjában van. A szabálytalan, súlyzóra emlékeztető, alig 2 km-es mag jóval kisebb, mint a környező, több tíz kilométer átmérőjű hóviharfelhő. A Deep Impact műszerei egyértelműen kimutatták, hogy a mag környezetében lebegő részecskék fagyott vízből, azaz jégből állnak. A mikrométeres mérettartományba eső szemcsék néhány centiméter-deciméter méretű, lazán összetapadó csomókba tömörülnek. Ezek a csomók olyan lazák, hogy pusztá kézzel is könnyen összeroppantathatnánk őket. Törékenységük, sűrűségük és állaguk alapján a földi magashegységekben található hóhoz hasonlíthatók.

Még egy ilyen roppant laza hógolyó is hatalmas károkat okozhatott volna a szondának, amennyiben körülbelül 12 km/s (43 ezer km/óra!) sebességgel eltalálja. Egy ilyen ütközés a súlyos károk mellett valószínűleg bukdácsoló mozgást is előidézett volna, amely miatt a szonda képtelen lett volna antennáit a Föld felé fordítani, így adatokat továbbítani és szüksé-



A hóvihar kialakulása az üstökös felszínén

ges parancsokat fogadni. Egy ilyen baleset után az irányítást végző mérnökök még abban sem lehettek volna teljesen biztosak, mi is történt. Szerencsére 700 km-es távolságig a hólabdák felhője már nem nyúlik el: a Nap sugárzása már jóval e távolság elérése előtt szublimáltatja a darabokat.

E darabok forrásai pedig ugyanazok a kilövellések, amelyek először is megragadták a kutatók figyelmét. Az üstökös magjának kérgében szárazjégtömbök találhatóak. A Nap sugárzása miatt ezek a tömbök igen gyorsan párolognak, a keletkező gáz a kőzet helyi szerkezetét követve tör a felszínre, útja során pedig a kéreg anyagába ágyazódott vízjégdarabokat is magával sodor.

A hatás miatt az üstökösmagon szokatlan módon nem fentről lefelé, hanem éppen ellenkező irányban havazik. Sebességük ekkor még csak alig néhány méter másodpercenként, így egy leszállóegység számára nem jelentenének komoly veszedelmet. Azonban a mag megközelítése során, a nagyobb távolságban, sokkal nagyobb sebességgel száguldó darabok jelentette veszélyt az üstökösök megközelítésére tervezett későbbi szondák tervezőinek is figyelembe kell majd venniük.

A felfedezés alapjául szolgáló adatsorok mellett még több gigabájtnyi adat vár a kutatók elemzésére, így a Hartley 2-üstökössel kapcsolatban a következő hetekben-hónapokban további érdekes eredmények várhatóak.

Forrás: NASA Science News, 2010. november 18.

Molnár Péter

# HÍREK A NAGYVILÁGBÓL

## Háromdimenziós tévéközvetítés szemüveg nélkül?

Az 1977-es Csillagok háborúja mozifilm óta nagy érdeklődés övezi a háromdimenziós távjelenlét (telepresence) lehetőségét: a más helyen zajló események holografikus videótechnikával történő közvetítése nagy gyakorlati jelentőségű lehet az élet számos területén, például távolról történő sebészeti beavatkozások során. Az utóbbi években a szórakoztatóiparban előretörték a háromdimenziós filmek, de

ezek nem holografikus technikával készülnek, megtekintésükhöz pedig speciális szemüveg szükséges.

A tárgyakról visszavert fény intenzitását és fázisát rögzítő hologramok a lézerek megjelenése óta egyszerűen előállíthatók. Mindeddig azonban megoldatlan volt a mozgó objektumok valós idejű holografikus megjelenítése. A legfőbb nehézségeket a megfelelő sebességgel frissíthető és a környezeti hatásokra érzéketlen kijelzők hiánya, illetve a hologramok továbbításához szükséges nagy mennyiségű információ hatékony feldolgozása okozta.

Jelentős előrelépésről számolt be *P. A. Blanche* (University of Arizona) és csoportja a *Nature* magazin 2010. november 4-i (Nature 468, 80) számában.

2. ábra. Balra: a 3D távjelenlét-rendszer egyik képe. Jobbra: egy működő 12x12 hüvelykes megjelenítő egység.



1. ábra. Példák színes hologramokra. A színinformációt egymásra felvett három monokromatikus (kék, piros, zöld) hologrammal kódolják.

A kutatóknak először sikerült megvalósítaniuk egy valós idejű megközelítő sebességgel frissíthető és színes térbeli képeket továbbító holografikus távjelenlét-rendszert. Eszközük lelke egy speciális polimerreteg két, indium-ón-oxid bevonatú üveglemez között. A bonyolult összetételű anyag optikai viselkedését elektromos tér és lézer egyidejű alkalmazásával vezérelhetjük. A hologramot képelemenként (holografikus pixelenként, úgynevezett hogelenként) egy 6 ns impulzushosszú, 50 Hz-es ismétlési frekvenciájú lézerrel rögzítik a polimerben. Az impulzushossz rövidege miatt a rendszer érzéketlen a környezeti zajokra, így hétköznapi használata is lehetséges. A kísérletekben egy 10x10 cm-es kijelzőt 1x1

mm-es színes hogoekkel 2 másodpercenként frissítettek, ami még távol áll a mozifilmek másodpercenkénti 26 képkockájától, de már ez is nagy ugrás a korábbi eredményekhez képest.

A meglévő technológia továbbfejlesztésével a jövőben új alkalmazások valósulhatnak meg a távgyógyászatban, műszaki tervezésben, reklám- és szórakoztatóiparban. Ehhez elsősorban a képfrissítési frekvenciát kell egy-két nagyságrenddel növelni.

*Barna Angéla, Barna Norbert, Kis János Benedek, Kiss László, Matbesz Anna, Molnár Dániel, Vizsnyiczai Gaszton*

Szerkesztőség: 1121 Budapest, Konkoly Thege Miklós út 29–33., 31. épület, II.emelet, 315. szoba, Eötvös Loránd Fizikai Társulat. Telefon/fax: (1) 201-8682  
A Társulat Internet honlapja <http://www.elft.hu>, e-postacíme: [mail.elft@gmail.com](mailto:mail.elft@gmail.com)

Kiadja az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, felelős: Szatmáry Zoltán főszerkesztő.

Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza. A szerzőknek tiszteletpéldányt küldünk.

Nyomdai előkészítés: Kármán Tamás, nyomdai munkálatok: OOK-PRESS Kft., felelős vezető: Szathmáry Attila ügyvezető igazgató.

Terjeszti az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, előfizethető a Társulatnál vagy postautalványon a 10200830-32310274-00000000 számú egyszerűsített.

Megjelenik havonta, egyes szám ára: 780.- Ft + postaköltség.

**HU ISSN 0015-3257** (nyomtatott) és **HU ISSN 1588-0540** (online)

