A KVANTUMMECHANIKA KÁROLYHÁZY-MODELLJE

Frenkel Andor
MTA Wigner FK, Részecske- és Magfizikai Intézet

A fizikában két olyan elmélet van, amely minden anyagi folyamatot érint: az általános relativitáselmélet és a kvantummechanika. Furcsa módon ez a két elmélet nem vesz tudomást egymásról. A kvantummechanikában nem veszik figyelembe az általános relativitáselméletet, és az általános relativitáselmélet nem építi be a téridő geometriai szerkezetébe a testek helyzetének és sebességének kvantummechanikai határozatlanságát. Ezek a tudomásul nem vételek annyiban jogosak, hogy mindkét elmélet így is igen nagy pontossággal írja le a maga területét. Következésképpen egymásra hatásuk csak igen kis mennyiségi változásokat eredményezhet.

A fentiektől látszólag független probléma, hogy a kvantummechanika szerint bármely szabad fizikai rendszer tömegközéppontjának térbeli helyzete egyre határozatlanabbá válik a kvantummechanikai hullámfüggvény korlátlan szétfolyásának megfelelően. Márpedig a tapasztalat szerint míg a mikrorészecskék helyhatározatlansága lehet makroszkopikus méretű (ez történik a neutronnal a neutron-interferométerben), egy makroszkopikus test tömegközéppontjának térbeli helyzete mindig jól lokalizált, ellentétben a hullámfüggvény szétfolyásának korlátlan voltával.

Valószínűleg *Károlyházy Frigyes* volt az első, aki megmutatta, hogyan lehet az általános relativitáselméletet és a kvantummechanikát úgy kombinálni, hogy egyúttal határ szabassék a hullámfüggvény szétfolyásának [1, 2].

A téridő-szerkezet minimális határozatlansága

Az általános relativitáselmélet és a kvantummechanika néhány alapvető összefüggésére, többek között a Schwarzschild-sugár képletére és *Heisenberg* határozatlansági relációjára támaszkodva Károlyházy megállapította [1, 2], hogy az einsteini téridő szerkezetének van egy minimális határozatlansága, amelyet a

$$\Delta T \approx T_P^{2/3}\, T^{1/3} \tag{1}$$

képlet fejez ki.[1] (1)-ben T egy időintervallum hossza, ΔT a T-hez tartozó minimális határozatlanság és

$$T_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} = 5{,}3\cdot 10^{-44}\ \text{s} \tag{2}$$

a Planck-idő. G = 6,7·10^{-8} cm^3·g^{-1}·s^{-2} a newtoni gravitációs állandó, $\hbar$ = 1,1·10^{-27} erg·s a redukált Planck-állandó, c = 3·10^{10} cm/s a fénysebesség. (1)-ben és a továbbiakban „≈” nagyságrendi egyenlőséget jelöl. Az általános relativitáselmélet és a kvantummechanika egyesített elméletének hiányában nincs mód a T és ΔT közötti pontos összefüggés megállapítására.

Károlyházy ΔT-s képletének megjelenése előtt elterjedt volt az a nézet, hogy egy T intervallum minimális határozatlansága mindig maga a parányi Planck-idő. (1) szerint ez nem így van, ΔT sokkal nagyobb is lehet T_P-nél. Például $T \approx 1$ s esetén

$$\Delta T \approx 10^{-29}\ \text{s}, \tag{3}$$

ami még mindig igen kis érték, de 15 nagyságrenddel nagyobb a Planck-időnél. Megjegyzendő, hogy T_P-nél kisebb T időintervallumokra magának a téridőnek a fogalma kérdéses, így (1) csak T_P-nél nagyobb időkre alkalmazandó.

Mivel (1)-ben nem szerepel semmilyen partikuláris objektum adata, a képlet magának a téridőnek a szerkezetére vonatkozó relációnak tekinthető.

A hullámfüggvény relatív fázisainak határozatlansága. Mikrorészecske és szilárd test koherenciacellája és a_c cellahossza

A téridő szerkezet (1)-es határozatlansága határozatlanságokat indukál bármely fizikai rendszer kvantummechanikai hullámfüggvényében. Ezek a határozatlanságok elsősorban a hullámfüggvény relatív fázisaiban jelentkeznek, és annál nagyobbak, minél nagyobb tömegű a vizsgált rendszer, adott rendszeren belül pedig annál nagyobbak, minél távolabbi pontok közötti relatív fázisról van szó.

Mikrorészecskék koherenciacellája és cellahossza

m tömegű mikrorészecske esetén a relatív fázis Δ_ϕ határozatlanságára a tér $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{x}'$ pontjai között

$$\Delta_\phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') \approx L_P^{2/3}\,\frac{a^{1/3}}{L_m} \tag{4}$$

adódik, ahol

$$a = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'| \tag{5}$$

a két pont távolsága,

$$L_m = \frac{\hbar}{c\,m} \tag{6}$$

az m tömeghez tartozó Compton-hullámhossz, és

$$L_P = c\,T_P = 1{,}06\cdot 10^{-33}\ \text{cm} \tag{7}$$

[1] Matematikai képleteink nem [1]-hez és [2]-höz, hanem [3]-hoz állnak közel.

a Planck-hossz. Látjuk, hogy Δ_ϕ monoton növekszik az a távolsággal. Δ_ϕ csak $a = 0$ esetén zérus, bármilyen kis a-ra $\Delta_\phi > 0$, a hullámfüggvény koherenciája mikrorészecskék esetében sem tökéletes. Mikor Δ_ϕ eléri a π értéket, a relatív fázis teljesen határozatlanná válik, a koherencia az ennek megfelelő $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ pontpárok között elvész. Jelöljük az ehhez tartozó a értéket a_c-vel:

$$\Delta_\phi(a_c) \approx L_P^{2/3} \frac{a_c^{1/3}}{L_m} = \pi \approx 1, \tag{8}$$

ahonnét ([1, 2, 3])

$$a_c \approx \left(\frac{L_m}{L_P}\right)^2 L_m. \tag{9}$$

Egy a_c átmérőjű tartományon (egy „koherenciacellán") belül a koherencia részlegesen fennáll, de egymástól a_c-nél, a „cellahossznál" nagyobb távolságokra lévő pontok között elvész.

Nézzük meg a_c tipikus értékeit. Elektronra $L_m^{\mathrm{el}} = 3{,}9 \cdot 10^{-11}$ cm, amivel (9)-ből

$$a_c^{\mathrm{el}} \approx 10^{35}\ \mathrm{cm} \tag{10}$$

adódik, míg neutronra $L_m^{\mathrm{ne}} = 2{,}1 \cdot 10^{-14}$ cm-rel

$$a_c^{\mathrm{ne}} \approx 10^{25}\ \mathrm{cm}. \tag{11}$$

Mikrorészecskékre a_c nagyobb, mint a Galaxisunk 10^{21} cm-es átmérője. Egy mikrorészecske hullámfüggvénye a valóságban csak a koherenciacella igen kis tartományára terjed ki, így Δ_ϕ-je sokkal kisebb mint π, a koherencia majdnem tökéletes. Ennek fényében nem csoda, hogy a neutron hullámfüggvénye koherensnek bizonyul a neutron-interferométerben, és ez akkor is így lenne, ha a jelenlegi közel 1 méter helyett az interferométer mérete mondjuk 100 kilométer lenne.

Szilárd testek koherenciacellája és cellahossza

M tömegű, R sugarú homogén szilárd test esetén a jelölje a test tömegközéppontjának (tkp) két helyzete közötti távolságot:

$$a = |\boldsymbol{x}_{\mathrm{tkp}} - \boldsymbol{x}'_{\mathrm{tkp}}|. \tag{12}$$

A relatív fázisok viselkedésének vizsgálata azt adja, hogy határozatlanságuk most is monoton növekszik a-val, és a koherencia akkor vész el, mikor a eléri az alábbi a_c értéket [1, 2, 3]:

$$a_c \approx \begin{cases} \left(\dfrac{L_M}{L_P}\right)^2 L_M, & \text{ha } a_c \geq 2R, \quad (13\mathrm{a}) \\[2ex] \left(\dfrac{2R}{L_P}\right)^{2/3} L_M, & \text{ha } a_c \leq 2R. \quad (13\mathrm{b}) \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy a_c mikrorészecskékre vonatkozó (9) képlete egyezik az $a_c \geq 2R$ tartományban érvényes (13a) képlettel (m és M mindkét esetben a vizsgált rendszer tömege). Ennek így is kell lennie: a kvantummechanikában a mikrorészecskék pontszerűeknek tekintetnek, így $2R = 0 \leq a_c$ nyilván teljesül. De ebbe a tartományba nem csak mikrorészecskék tartoznak. Például egy $\rho \approx 1$ g/cm^3 sűrűségű, $R \approx 10^{-6}$ cm sugarú, tehát $M \approx 4\pi\rho R^3/3 \approx 4{,}2 \cdot 10^{-18}$ g tömegű szemcsére (13a)-ból

$$a_c^{\mathrm{sz}} \approx 5\ \mathrm{km} \tag{14}$$

adódik. A szemcse tömegközépponti hullámfüggvénye a szemcse méreténél sokkal nagyobb tartományra terjedhet ki anélkül, hogy koherenciája elveszne.

Tekintsünk most egy példát az $a_c \leq 2R$ tartományban. Ott a_c képlete függ a vizsgált test sugarától is. $R \approx 1$ cm sugarú, 1 grammos golyóra (13b)-ből azt kapjuk, hogy

$$a_c^{\mathrm{g}} \approx 10^{-16}\ \mathrm{cm}. \tag{15}$$

A golyó tömegközépponti hullámfüggvényében inkoherens pontpárok jelennek meg, amint a függvény túlterjed 10^{-16} cm-en, vagyis amint a tömegközéppont helyhatározatlansága ennél nagyobb lesz.

(Megjegyzés: Nem gömbölyű testeknél a koherenciacella sem gömb alakú. Például homogén cilinder esetén két cellahossz lép fel, a cilinder magasságának és átmérőjének megfelelően.)

Expanzió-kontrakció ciklusok. A τ_c ciklusperiódus

A koherenciacellán túl bekövetkező teljes koherenciavesztést Károlyházy objektív, megfigyeléstől független jelnek tekintette, amelynek hatására fellép egy koherenciavesztést ellensúlyozó reakció. Azt javasolta [2], hogy a Schrödinger-egyenletnek engedelmeskedve terjedhessen a hullámfüggvény a koherenciacellán túl egy $2a_c$ átmérőjű tartományra, amikoris már diszjunkt, egymáshoz képest teljesen inkoherens cellák is megjelennek. Ekkor pillanatszerűen és stochasztikusan kontrahálódjék a hullámfüggvény az általa elfoglalt $2a_c$ átmérőjű tartomány valamelyik koherenciacellájára, ezáltal megszüntetve a teljes koherenciavesztést. Ezután a hullámfüggvény ismét terjedhessen ki egy $2a_c$-s tartományra, onnét újra kontrahálódjék, és így tovább. Mivel a kontrakció pillanatszerű, egy expanzió-kontrakció τ_c ciklusperiódusát az $a_c \to 2a_c$ expanzióhoz szükséges

$$\tau_c \approx \frac{M a_c^2}{\hbar} \tag{16}$$

idő adja.

Mint már láttuk, a mikrorészecskék a_c-i asztronomikus méretűek, egy mikrorészecske hullámfüggvénye csak a koherenciacella igen kis tartományára terjed ki, így kontrakcióra nem kerül sor. Ezt τ_c értékei is mutatják. Figyelembe véve, hogy az elektron tömege $9{,}1\cdot 10^{-28}$ g, a neutroné pedig $1{,}7\cdot 10^{-24}$ g, (16), (10) és (11) azt adja, hogy

$$\tau_c^{\mathrm{el}} \approx 10^{69}\ \mathrm{s} \quad \text{és} \quad \tau_c^{\mathrm{ne}} \approx 10^{53}\ \mathrm{s}. \tag{17}$$

A mikrorészecskék τ_c ciklusperiódusai sokkal nagyobbak, mint az Univerzum életkora…

Más a helyzet egy 1 grammos golyó esetén. $a_c^{\mathrm{g}} \approx 10^{-16}$ cm-rel (16) szerint

$$\tau_c^{\mathrm{g}} \approx 10^{-5}\ \mathrm{s}, \tag{18}$$

a golyó tömegközépponti hullámfüggvénye másodpercenként százezerszer kontrahálódik. Ennek köszönhetően a tömegközéppont helyhatározatlansága nem nő korlátlanul, hanem $a_c^{\mathrm{g}} \approx 10^{-16}$ cm és $2\,a_c^{\mathrm{g}}$ között ingadozik, tehát lokalizáltsága nagyságrendileg 10^{-16} cm-es marad.

Károlyházy vizsgálta a koherencia elveszését légnemű közegben is, nevezetesen Wilson-kamrában képződő nyomok szuperpozíciójának szétesését [2]. Helyszűke miatt erre az érdekes kérdésre itt nem térhetünk ki.

A kvantummechanikai méréselmélet szerint a hullámfüggvény redukcióját egy klasszikus mérőműszerrel, vagy az emberi tudattal való kölcsönhatás indukálja. Károlyházynál a redukciót felváltják a mérőműszertől és a megfigyeléstől független kontrakciók.

1986-ban *Ghirardi, Rimini* és *Weber* alkottak egy kvantummechanikai modellt [4], amelyben az expanzió-kontrakció ciklusokat stochasztikus differenciálegyenlet írja le. A GRW-modell és a Károlyházy-modell összehasonlításával [5] foglalkozik. A hullámfüggvény objektív, stochasztikus kontrakcióját tartalmazó modellt javasolt *Diósi Lajos* [6] és *Roger Penrose* is [7].

Anomális Brown-mozgás. A Károlyházy-modell kísérleti ellenőrizhetősége

Minden egyes, a hullámfüggvény kiterjedését $2a_c$-ről a_c-re csökkentő kontrakciónál fellép egy

$$\Delta p \approx \frac{\hbar}{a_c} \tag{19}$$

nagyságrendű impulzushatározatlanság. Ez oda vezet, hogy egy szabad makroszkopikus golyó tömegközéppontja nem pontosan a newtoni egyenes pályán mozog, hanem körülötte ingadozva halad növekvő ingadozási amplitúdóval. Bár ez az ingadozás igen kicsiny, elvileg lehetőséget ad Károlyházy módosított kvantummechanikájának kísérleti ellenőrzésére. Egy makroszkopikus test kellő izolálása a környezettől igen nehéz feladat. A kísérletet a nanotartományba eső objektummal kellene elvégezni.

Dominánsan mikroszkopikus (kvantummechanikai) és dominánsan makroszkopikus (klasszikus) viselkedés. A mikro-makro átmeneti tartomány

A fentiekből látszik, hogy az $a_c \gg 2R$ tartományba eső szilárd testek a mikrorészecskékhez hasonlóan viselkednek: tömegközépponti hullámfüggvényük a test méreténél sokkal nagyobb tartományra terjedhet ki jelentős koherenciavesztés nélkül. Ezzel szemben az $a_c \ll 2R$ tartományba tartozó szilárd testek viselkedése közel áll a klasszikushoz. Hullámfüggvényük elveszti koherenciáját már akkor, amikor a test méreténél sokkal kisebb tartományra terjed ki. Ennek megfelelően a test tömegközéppontja – a gyakran ismétlődő kontrakcióknak köszönhetően – majdnem pontszerűen lokalizált. A tömegközéppont mozgása közel klasszikus, a kvantummechanikai háttérre csak az anomális Brown-mozgás emlékeztet.

A mikro-makro átmenetet nyilván az $a_c \approx 2R$ reláció jellemzi, ahol a koherencia elveszése a test méretének nagyságrendjébe eső tartományban történik. 1 g/cm^3 sűrűségű testre (13a) – és természetesen (13b) is – azt adja, hogy

$$a_c^{\mathrm{tr}} = 2\,R^{\mathrm{tr}} \approx 10^{-5}\ \mathrm{cm}, \tag{20}$$

ahonnét az átmeneti (transition) tömegre

$$M^{\mathrm{tr}} \approx 10^{-14}\ \mathrm{g} \tag{21}$$

adódik. Ez a porszemek és a kolloidszemcsék tömegtartománya.

Régebben úgy gondolták, hogy az általános relativitáselméletnek nem lehet köze a mikro-makro átmenethez, mert ha lenne, akkor az átmeneti tartományt az

$$M_P = \sqrt{\frac{\hbar\, c}{G}} = 2{,}2\cdot 10^{-5}\ \mathrm{g} \tag{22}$$

értékű Planck-tömegnek kellene jellemeznie, mivel az általános relativitáselmélet és a kvantummechanika alapvető természeti állandóiból, c-ből, G-ből és $\hbar$-ból ez a tömeg kombinálható ki. Azonban egy 10^{-5} grammos tömeg makroszkopikusan viselkedik, nem lehet köze az átmeneti tartományhoz.

Károlyházy mutatta meg, hogy a koherencia elveszésének mértékét nem csak az említett természeti állandók, hanem a vizsgált fizikai rendszer tulajdonságai (tömege, mérete, alakja, halmazállapota) is befolyásolják, és ennek figyelembe vétele a Planck-tömegnél jóval kisebb, plauzibilis értékű átmeneti tömeget ad.

Konklúzió

A kvantummechanikai méréselmélet szerint ahhoz, hogy a kvantummechanikából konkrét eredményeket kapjunk, szükség van egy, a kvantummechanikán kívüli klasszikus mérőműszerre, vagy – végső soron – egy megfigyelő tudatára. Azonban Károlyházy megmutatta, hogy ha figyelembe vesszük az einsteini téridő minimális szerkezeti határozatlanságának hatását a hullámfüggvény relatív fázisaira, akkor nincs szükség az anyagi világ éles felosztására kvantummechanikai és klasszikus objektumokra. Minden fizikai rendszer egy közös dinamikai törvénynek engedelmeskedik. Ebben a determinisztikus, schrödingeri evolúció ötvöződik a hullámfüggvény stochasztikus kontrakcióival. Elvileg egy mikrorészecske hullámfüggvénye is kontrahálódhat, de a valóságban erre nem kerül sor. Makroszkopikus szilárd testeknél a kontrakciók gyakoriak, és biztosítják a tömegközéppont erős lokalizációját akkor is, ha a test szabadon mozog és senki sem figyeli meg.

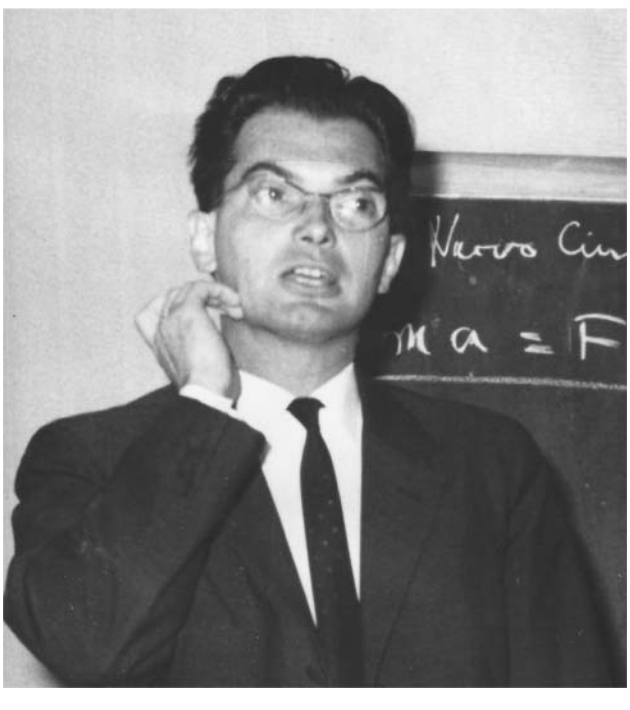
Irodalom

1. Károlyházy, F., *Nuovo Cimento XLII A* (1966) 390.
2. Károlyházy, F.: Gravitáció és makroszkopikus testek kvantummechanikája. Akadémiai doktori értekezés. *Magyar Fizikai Folyóirat XXII* (1974) 23.
3. Frenkel, A., in: *Quantum Reality, Relativistic Causality, and Closing the Epistemic Circle: Essays in Honour of Abner Shimony.* W. C. Myrvold, J. Christian editors, Springer, 2009, p 293.
4. Ghirardi, G. C., Rimini, A., Weber, T., *Physical Review D34* (1986) 470.
5. Frenkel, A., *Foundations of Physics 20* (1990) 159.
6. Diósi, L., *Physics Letters 105A* (1984) 199.
7. Penrose, R., *General Relativity and Gravitation 28* (1996) 581.

A FIZIKA TANÍTÁSA

KÁROLYHÁZY-FELADATOK AZ EÖTVÖS-VERSENYEN I. RÉSZ – MECHANIKA

Károlyházy Frigyes több mint fél évszázadon át volt tagja az Eötvös-verseny versenybizottságának. Ő maga diákkorában nem indult ezen a versenyen, mivel amikor érettségizett, már éppen szétszakadóban volt a versenyt jegyző Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat, és nem rendezték meg a versenyt. A matematikusok külön társulatot hoztak létre Szegeden, a fizikusok pedig éppen csak ébredeztek a kábulatból,



amelyet például *Ortvay Rudolf* elvesztése okozott. *Selényi Pál,* akinek aktív szerepe volt a fizikai társulat háború utáni megalakításában, a nála munkára jelentkező *Vermes Miklós*t bízta meg a fizikai tanulóverseny megszervezésével. Vermes kimutatása szerint az első hivatalos fizikai Eötvös-versenyt 1949-ben rendezték, amikor Károlyházy Frigyes már másodéves hallgató volt az egyetemen, ezért nem is indulhatott rajta. Ő ugyan emlegetett egy előző évben tartott versenyt, amelyen elindult és amelyen sikeresen szerepelt, sőt még arra is emlékezett, hogy *Sós Vera* is indult a versenyen, de lehet, hogy az matematikaverseny volt és semmi írásos nyoma nem maradt.

Hogyan került Károlyházy Frigyes a versenybizottságba? Kezdetben Selényi Pál, majd *Pócza Jenő* volt a versenybizottság elnöke, 1959-től lett Vermes Miklós, aki addig is a verseny szervezője, mindenese volt. Valószínűleg még Pócza idejében történt, hogy nem sokkal a verseny után valaki felhívta Vermest telefonon és az egyik feladat megoldása iránt érdeklődött. Vermes évtizedekkel később is kuncogva mesélte el a történetet: az illető azt kérdezte, hogy ugye az ennek a feladatnak a megoldása, hogy… – és elmondta a megoldást, amire a bizottság gondolt. – Ugyanis az a helyzet – mondta az illető rendkívül tapintatosan –, hogy az úgy nem jó. Az illetőt Károlyházy Frigyesnek hívták, akit Vermes már a következő évben behívott a versenybizottságba. Ezután már csak egyetlen évben engedte meg neki, hogy távol maradjon, amikor tanulmányúton volt az Egyesült Államokban, 1974-ben. Ekkor hívta meg a bizottságba Vermes e sorok íróját.