XVI. ORSZÁGOS SZILÁRD LEÓ FIZIKAVERSENY

Beszámoló, II. rész: a döntő feladatai és megoldásuk

Radnóti Katalin
ELTE TTK Fizikai Intézet

I. kategóriájú feladatok

1. feladat (kitűzte: *Radnóti Katalin*)

Mekkora lenne az alapállapotú H-atom mérete, ha a mag és az elektron nem elektromosan, hanem csak gravitációsan vonzanák egymást? Mekkora lenne az alap és a gerjesztett állapotok energiája?

Megoldás:

Az energia kiszámításakor a (kvantummechanikai) mozgási és a potenciális energia összegét kell venni. Most a gravitációs potenciális energia szerepel az elektromos helyett, azaz

$$E(r) = \frac{\hbar^2}{2\, m_e\, r^2} - \gamma\, \frac{m_e\, m_p}{r}$$

minimumát kell venni, s ebből

$$r = \frac{\hbar^2}{\gamma\; m_e^2\, m_p}.$$

A számadatokat behelyettesítve:

$$r = \frac{\left(1{,}055\cdot 10^{-34}\right)^2}{6{,}6738\cdot 10^{-11}\cdot\left(9{,}11\cdot 10^{-31}\right)^2\cdot 1{,}6726\cdot 10^{-27}} = $$

$$= 1{,}2\cdot 10^{29}\ \text{m}$$

lenne alapállapotban.

Összehasonlításképpen: a Föld sugara: 6370 km = $6{,}37\cdot 10^{6}$ m, a Föld–Nap távolság 150 millió km = $1{,}5\cdot 10^{11}$ m. Az energiakifejezésbe visszahelyettesítve r értékét megkapjuk az alapállapoti és a gerjesztési energiákat:

$$E_n = -\frac{\gamma^2\, m_e^3\, m_p^2}{2\,\hbar^2}\,\frac{1}{n^2}.$$

Az alapállapotra (n = 1) például $2{,}49\cdot 10^{-78}$ eV-ot ad.

A megoldáshoz egyszerűbb gondolatmenet alapján is el lehetett jutni: hasonlítsuk össze az elektromos és a gravitációs potenciális energiát, mivel ezekben lesz különbség!

$$\left(\frac{e^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r} \Rightarrow \left(\gamma\; m_e\, m_p\right)\frac{1}{r}.$$

Más szóval minden hidrogénatom-képlet érvényben marad, csak a képletekben előforduló bal oldali zárójeles kombinációkat a jobb oldali zárójeles kombinációval kell helyettesíteni. Ezt követően pedig egyszerű behelyettesítéssel megkaphatók a számszerű értékek.

2. feladat (kitűzte: *Kis Dániel* és *Szűcs József*)

a) Hasonlítsuk össze egy 1 km sugarú neutroncsillag tömegét a Föld tömegével!

b) Mekkora lenne a nehézségi gyorsulás értéke a neutroncsillag felszínén?

Első megoldás:

a) A neutroncsillag jó közelítéssel maganyagsűrűségű. Egy A tömegszámú mag tömege közelítőleg:

$$m = \frac{A}{N_A} = \frac{A}{6\cdot 10^{23}}\ \text{g},$$

mivel A grammnyi anyagban van $N_A = 6\cdot 10^{23}$ Avogadro-számnyi részecske. E mag sűrűsége gömbszerű egyenletes anyageloszlás mellett:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{3\,A}{N_A\, 4\,\pi\, R^3}.$$

Ismert, hogy az R magsugárra: $R^3 = r_0^3\, A$, ahol $r_0 = 1{,}2\cdot 10^{-15}$ m. Azaz

$$\rho = \frac{3\,A}{N_A\, 4\,\pi\, r_0^3\, A} = \frac{3}{6\cdot 10^{23}\cdot 4\,\pi\cdot\left(1{,}2\cdot 10^{-15}\right)^3} = $$

$$= 2{,}3025\cdot 10^{20}\ \frac{\text{g}}{\text{m}^3} = 2{,}3025\cdot 10^{17}\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Ezek alapján az 1 km sugarú neutroncsillag tömege:

$$M_{cs} = \rho\,\frac{4\,\pi}{3}\,R_{cs}^3 = 2{,}3025\cdot 10^{17}\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot 4{,}189\cdot 10^{9}\ \text{m}^3 = $$

$$= 9{,}6447\cdot 10^{26}\ \text{kg}.$$

A Föld tömege $5{,}97\cdot 10^{24}$ kg, tehát a neutroncsillag tömege körülbelül 160-szor nagyobb.

b) A nehézségi gyorsulás a felszínen:

$$g_n = \gamma\,\frac{M_{cs}}{R_{cs}^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2}\cdot\frac{9{,}64\cdot 10^{26}\ \text{kg}}{10^6\ \text{m}^2} = $$

$$= 6{,}43\cdot 10^{10}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Második megoldás:

a) A megoldás során nem szükséges numerikusan kiszámítani a sűrűséget, mivel a $4\pi/3$ úgyis kiesik.

$$M_{cs} = \rho \frac{4\pi}{3} R_{cs}^3 = \frac{3A}{N_A 4\pi r_0^3 A} \frac{4\pi}{3} R_{cs}^3 = \frac{1}{N_A} \left(\frac{R_{cs}}{r_0} \right)^3.$$

Itt R_{cs} = 1 km, a neutroncsillag sugara. Behelyettesítve:

$$M_{cs} = \frac{1}{6 \cdot 10^{23}} \left(\frac{1000}{1{,}2 \cdot 10^{-15}} \right)^3 = 9{,}64 \cdot 10^{29} \text{ g} =$$

$$= 9{,}64 \cdot 10^{26} \text{ kg}.$$

A b) feladat megoldása ugyanaz, mint előbb.

3. feladat (kitűzte: Kis Dániel)

Az elektromosságtanból ismert, hogy mágneses momentumot hurokáramok hozhatnak létre. A neutron semleges részecske, tehát áramot nem hozhat létre, mégis van mágneses momentuma. Hogyan lehetséges ez?

Megoldás:

A neutron mágneses momentuma a nem nulla spinjétől ered. Ez azonban önmagában nem lenne elég, töltés nélkül nem csatolódhatna az elektromágneses térhez (lásd például neutrínó: van spinje, de nincs mágneses momentuma). Viszont ma már tudjuk, hogy a neutron nem elemi részecske, belső szerkezete van, három kvark alkotja. A három kvark két különböző elektromos töltéssel rendelkezik (udd, u +2/3, d −1/3 elemi töltéssel), amelyek inhomogén töltéseloszlást eredményeznek. Inhomogén töltéseloszlásnak pedig már van (lehet) mágneses momentuma, ha perdületjellegű mennyiség (például spin) is jelen van.

4. feladat (kitűzte: Szűcs József)

A svájci ETH egyetem kutatói új módszerrel mérték meg nagy pontossággal a proton méretét. Korábban nagy energiájú elektronok bombázásával – *Rutherford* kísérletéhez hasonló módon – mérték meg a proton kiterjedését, másrészt pedig gerjesztett hidrogénatomok által kibocsátott ultraibolya sugárzás hullámhosszának mérésével következtettek a protonok méretére. Mindkét módszerrel 0,88 fm protonsugarat mértek.

A mostani mérésnél viszont a H-atomban az elektronokat a náluk körülbelül 200-szor nehezebb negatív elektromos töltésű müonokkal helyettesítették. A proton-müon rendszerek gerjesztését követő röntgensugárzás hullámhosszából következtettek a protonok méretére, amelyre a korábbi eredményektől eltérően körülbelül 4%-kal kisebb, 0,84 fm protonsugarat kaptak. A mérést többször és más-más időpontban elvégezve, a hibahatáron belül ugyanerre az eredményre jutottak. Ez esetleg új elemi részecskék létének feltételezését is eredményezheti.

a) Vajon hogyan értelmezhető, hogy a H-atom (illetve a müon-proton atom) gerjesztésekor kibocsátott fény hullámhossza kapcsolatban van az (atommodellekben általában pontszerűnek tekintett) atommagok (H-atomnál a proton) méretével?

b) Miért lehet proton-müon rendszer gerjesztésével pontosabban meghatározni a proton méretét, mint a közönséges H-atom gerjesztéssel?

Megoldás:

a) A kvantummechanikai atommodell szerint az elektron nem pontszerű – amely az atommagtól relatíve nagy távolságban (10^4-10^5 magsugárnyira) körpályán kering a mag körül –, hanem állóhullámként veszi körül az őt fogva tartó atommagot (jelen esetben a protont). A modell szerint az elektron véges valószínűséggel tartózkodik az ugyancsak nem pontszerű, véges méretű protonon belül is, ahol már a Coulomb-potenciál semmiképpen sem az $1/r$ törvény szerint vehető számításba. Ezért a H-atom alapállapotában leginkább, de bizonyos mértékben a gerjesztett állapotokban is módosul a proton-elektron rendszer energiája a pontszerű atommag feltételezésével számítottakhoz képest. Ez jelentkezni fog az elektronátmeneteknél, és így a kibocsátott fény hullámhossza is megváltozik. E változás pontos mérésével, valamint az elektron állapotfüggvényének felhasználásával következtettek arra, hogy az elektron mennyit és mekkora térfogatban tartózkodik az atommagon belül. Ilyen módon lehetett ebből az atommag (proton) méretét meghatározni.

b) Mivel a negatív müonnak körülbelül 200-szor nagyobb a tömege, ezért a H-atomban az állapotfüggvényének kiterjedése is jóval kisebb (körülbelül 200-szor kisebb), mint az elektroné. Vagyis a proton a müont jóval közelebb húzza magához alapállapotban, mint a könnyebb (ezáltal mozgékonyabb) elektront. Ezért a müon többet tartózkodik a protonon belül, mint az elektron. Így a proton-müon rendszernél a fent leírt effektus jóval erősebben jelentkezik, mint a közönséges H-atomnál, így a proton mérete is pontosabban határozható meg.

5. feladat (kitűzte: Szűcs József)

Ha a hidrogéngázt fokozatosan melegítjük, akkor a részecskék ütközésének következtében először a hidrogénmolekulák atomokra bomlanak, majd a forró atomos gáz „világítani” kezd.

a) Két, átlagos mozgási energiával rendelkező H_2-molekula azonos sebességgel ütközik frontálisan, és ennek következtében mindkettő atomokra esik szét. Mekkora lehet ekkor a gáz hőmérséklete?

b) Két átlagos mozgási energiájú, azonos sebességű, alapállapotú H-atom ugyancsak frontálisan ütközik, ezt követően egy látható foton keletkezik a Balmer-sorozat első vonalának megfelelő hullámhosszal. Ekkor mekkora a hidrogéngáz hőmérséklete?

c) Vessük össze az a) és b) kérdéseknél kapott eredményeket azzal a gyakorlati tapasztalattal, hogy a gázmolekulák egy része már 1-2 ezer kelvin hőmérsékleten is atomokra esik szét, és a Nap 5800 K hőmérsékletű felszínének spektrumában megtalálhatók a hidrogéngáz színképvonalai! Mondjunk róla véleményt!

Adatok: A H_2-molekula kötési energiája 4,52 eV. A H-atom energiája alapállapotban: −13,6 eV.

Megoldás:

a) Tegyük fel, hogy az ütköző molekulák teljes egészében elveszítik mozgási és forgási energiájukat. (Ezt a lendületmegmaradás törvénye megengedi, mivel a feltétel szerint az ütköző molekulák összes lendülete zérus.) Ekkor felírhatjuk:

$$2\,\frac{5}{2}\,k\,T = 2\,E_k \rightarrow T = \frac{2\,E_k}{5\,k} = \frac{2\cdot 4{,}52\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}}{5\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}\ \mathrm{J/K}} =$$

$$= 2{,}0962\cdot 10^4\ \mathrm{K} = 20\,962\ \mathrm{K}.$$

Itt E_k a molekula kötési energiáját jelöli.

b) Ugyancsak feltehetjük, hogy a H-atomok az ütközéskor elveszítik teljes mozgási energiájukat. Így a mozgási energiák összege csak az egyik atom gerjesztésére fordítódik, mivel egy foton jelenik meg. A feltételnek megfelelően a 3. energiaszintre kell gerjeszteni az egyik atomot az ütközési energia révén, hogy a 3 → 2 elektronátmenet során a megadott hullámhosszúságú foton keletkezzen. Így felírhatjuk:

$$2\,\frac{3}{2}\,k\,T = E_3 - E_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow T = \frac{E_3 - E_1}{3\,k} = \frac{-\dfrac{13{,}6\ \mathrm{eV}}{9} - (-13{,}6\ \mathrm{eV})}{3\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}\ \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}} =$$

$$= 4{,}672\cdot 10^4\ \mathrm{K} = 46\,720\ \mathrm{K}.$$

c) Az eredményül kapott hőmérsékleti értékek jóval magasabbak (körülbelül egy nagyságrenddel), mint a feladatban megadott hőmérsékletek, amelyeken a fenti jelenségek (molekulák felbomlása, atomok fénykibocsátása) a tapasztalat szerint már létrejönnek. A paradoxon oka a *részecskék sebességének Maxwell-eloszlása,* amely szerint egy adott T hőmérséklethez tartozó átlagos energiának megfelelő sebességnél (négyzetes középsebesség) jóval nagyobb sebességű részecskék is előfordulnak a T hőmérsékletű gázban. Így a fenti jelenségek már jóval alacsonyabb hőmérsékleten bekövetkeznek, mint az átlagos energiához tartozó hőmérséklet.

6. feladat (kitűzte: *Vastagh György*)

Termikus reaktorokban nagyon kis energiájú neutronok befogódása a ^{235}U atommagba már maghasadást tud létrehozni a létrejött ^{236}U atommagban. Mekkora energiájú gamma-fotonokkal lehetne a ^{236}U atommagot elhasítani?

Adatok: a neutron tömege: 1,008665 u, a ^{235}U tömege: 235,043923 u, a ^{236}U tömege: 236,045562 u, 1 u = 931,494 MeV/c^2.

Megoldás:

A ^{236}U atommagot a hasadási gáton kell átjuttatni, azaz a gamma-fotontól is legalább akkora energiát kell kapjon az atommag, amekkorát a termikus neutron befogódásakor kap. A termikus neutron nem a mozgási energiáját adja, hanem befogódásakor a kötési energiája szabadul fel, és áll a ^{236}U atommag rendelkezésére.

A $^{235}\mathrm{U} + \mathrm{n} \rightarrow {}^{236}\mathrm{U} + Q$ reakció energiamérlege:

$$Q = \left[M\left({}^{235}\mathrm{U}\right) + M(\mathrm{n}) - M\left({}^{236}\mathrm{U}\right)\right] c^2.$$

Az adatokat behelyettesítve:

$$Q = (235{,}043923 + 1{,}008665 - 236{,}045562)\ \mathrm{u}\, c^2 =$$

$$= 0{,}00726\ \mathrm{u}\, c^2.$$

A megadott átváltással kapjuk:

$$Q = 0{,}00726\ \mathrm{u}\, c^2\cdot 931{,}494\ \frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}^2} = 6{,}545\ \mathrm{MeV}.$$

Tehát legalább ennyi energiát kell bevinni a gammafotonnak is, hogy átemelje az atommagot a hasadási gáton.

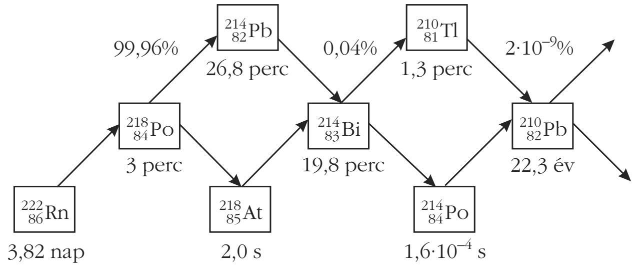
A megoldás során elhanyagoltuk azt, hogy a gamma-foton abszorpciójakor az atommag visszalökődik valamennyivel (a lendületmegmaradás miatt). A nagy magtömeg miatt azonban ez a visszalökődés csak nagyon kicsit szól bele az energiamérlegbe:

$$E_{vissza} = \frac{p^2}{2\,M} = \frac{E_\gamma^2}{2\,M\,c^2} = E_\gamma\,\frac{E_\gamma}{2\,M\,c^2}.$$

Innen látható, hogy az atommag a visszalökődés során az eredeti gamma-foton energiájának csak igen kis töredékét képes átvenni.

7. feladat (kitűzte: *Sükösd Csaba*)

A radon bomlássémája a következő *ábrá*n látszik. Porszívóval levegőt szívunk át gézrétegeken másfél órán keresztül egy hosszú időn át nem szellőztetett pincehelyiségben. Tíz perccel a szívás befejezése után a gézt béta-sugárzást érzékelni képes Geiger–Müller-számlálócső elé helyezzük, és 1 óra hosszat mérünk. A kezdeti beütésszám körülbelül 35-40 perc alatt csökken a felére.



a) Az ábrán szereplő bomlási sor mely tagjaitól származhat a mért beütésszámok döntő többsége?

b) Adjunk kvalitatív (nem-számításos) magyarázatot a 35-40 perces „effektív” felezési időre!

Megoldás:

a) Először azt kell megállapítani, hogy milyen bomlási módok láthatók az ábrán. A tömegszámokból és a rendszámokból kiderül, hogy a felfelé mutató nyilak alfa-bomlásokat, a lefelé mutató nyilak pedig negatív béta-bomlásokat jeleznek. Mivel a detektorunk csak béta-sugarakat detektál, ezért csak a lefelé mutató nyilakat kell figyeljük ahhoz, hogy megállapítsuk, hogy a bomlási sor mely tagjaitól származhatnak a beütésszámok.

A gézen – mint szűrőn – a radon nem tud megtapadni, mivel nemesgáz. A többi bomlástermék azonban megtapadhat, mivel ezek fémek, és a levegőben lebegő porszemekre és aeroszolokra adszorbeálódhatnak.

Mivel 10 perc várakozás után kezdtük el a mérést, ezért a rövid felezési idejű izotópokból már sok elbomlott: a ^{218}Po (3 perc) és a ^{210}Tl (1,3 perc) emiatt kiesik. A ^{210}Pb az igen hosszú felezési idő miatt esik ki, hiszen a 22,3 év semmiképpen sem csökkenhet 35-40 perces „effektív” felezési idővel. A béta-bomló izotópok közül két jelölt maradt: a 26,8 perc felezési idejű ^{214}Pb, és a 19,8 perc felezési idejű ^{214}Bi. A detektált beütésszámok döntő többsége tehát ezektől származik.

b) Meglepő, hogy a mért „effektív” felezési idő sokkal hosszabb, mint bármelyik a kettő közül. Ennek az az oka, hogy ez a két izotóp egy „bomlási sort” alkot. Mindkét izotóp felezési ideje jóval kisebb, mint a bomlási sor kiinduló tagjáé (a radoné), valamint a feladat szerint hosszú ideig nem volt szellőztetve, ezért feltehető, hogy a szoba levegőjében már kialakult a radioaktív (szekuláris) egyensúly, azaz a sor tagjainak aktivitása megegyezik. Miután a felezési idejüknél jóval hosszabb ideig történt a mintavétel (porszívózás), ezért feltehető, hogy aktivitásuk arányos a szoba levegőjében lévő aktivitáskoncentrációval (és az arányossági tényező azonos, hiszen nem feltételezhető, hogy a két fémet különbözőképpen kötné meg a géz). Ezért a szűrőn lévő aktivitásuk is egyenlő – legalábbis a szívás befejezésekor. Detektorunk tehát a ^{214}Pb tényleges aktivitásának dupláját méri (mivel méri a vele azonos aktivitású ^{214}Bi-ot is). Viszont a ^{214}Bi a ^{214}Pb-ból keletkezik, ezért – ha az aktivitásuk egyenlő – kezdetben a ^{214}Bi aktivitása nem csökken (hiszen amennyi elbomlik belőle, ugyanannyi keletkezik is a ^{214}Pb-ból). Emiatt az aktivitás *csökkenése* kezdetben csak a ^{214}Pb-tól származik.

8. feladat (kitűzte: *Radnóti Katalin* és Szűcs József)

a) Becsüljük meg, hogy hányszor többet kell rugalmasan ütköznie a neutronoknak fékeződéskor a nehézvizes moderátorban a deutériumatomokkal, mint a könnyűvizesben a hidrogénatomokkal ahhoz, hogy kezdeti mozgási energiájuk 1% alá csökkenjen? Az egyszerűség kedvéért számoljunk csak egyenes ütközésekkel!

b) Hogyan és miért kell megváltoztatni a reaktor aktív zónájában az üzemanyagrudak egymáshoz mért távolságát, ha a könnyűvíz-moderátort nehézvízre cseréljük?

c) Azonos számú üzemanyagrudat tartalmazó reaktorok esetén könnyűvizes vagy nehézvizes moderátorból van szükség nagyobb mennyiségre?

d) Milyen elhanyagolásokat végeztünk a feladat megoldása során?

Megoldás:

Vizsgáljuk meg az ütközésekkor a neutronok energiaveszteségét! A magok ütközését tekintsük egyenes, centrális és rugalmas ütközéseknek! Ez esetben felírhatjuk az energia- és lendületmegmaradás egyenleteit.

Jelöljük az ütköző neutron tömegét m-mel, az állónak vett fékező magok tömegét M-mel! Ekkor

$$p_m = p'_m + p_M, \qquad \frac{p_m^2}{2m} = \frac{p'^2_m}{2m} + \frac{p_M^2}{2M}. \tag{1)–(2}$$

Vezessük be a tömegek arányára az $M/m = x$ jelölést! Ekkor a fenti egyenleteket az alábbi alakra hozhatjuk:

$$p_m = p'_m + p_M, \qquad x p_m^2 = x p'^2_m + p_M. \tag{3)–(4}$$

A neutron ütközés utáni és előtti lendületének hányadosára vezessük be a $p = p'_m / p_m$ jelölést!

Ekkor a (3)–(4) egyenletekből kapjuk:

$$(1+x)\,p^2 - 2p + 1 - x = 0.$$

Ennek $p \neq 1$ triviálistól különböző megoldása:

$$p = \frac{1-x}{1+x}.$$

A neutronenergiák hányadosa:

$$\frac{E'}{E} = \left(\frac{p'_m}{p_m}\right)^2 = p^2 = q = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2.$$

A neutron N számú ütközése után a neutron megmaradt energiahányada q^N lesz.

A közönséges víz esetén, amikor a neutron az azonos tömegű protonnal ütközik ($x = 1$) már az *első ütközéskor elveszíti teljes energiáját* (így a legalább 1%-ra való csökkenés teljesül).

A deuteronnal való ütközés esetén, ahol x = 2-nek vehető q = 1/9, így a szükséges ütközések száma N = 3, hogy $q^N \leq 0{,}01$ teljesüljön.

b) Ha feltesszük, hogy a neutronok szabad úthossza (két ütközés között megtett út) ugyanakkora a közönséges, mint a nehézvízben, akkor nyilvánvaló, hogy messzebb kell helyezni egymástól az üzemanyagrudakat.

c) Ha ugyanannyi üzemanyagrudat használunk, akkor az előzőek alapján a reaktor mérete is sokkal nagyobb lesz, és természetesen több nehéz-, mint könnyűvízre van szükség.

d) Több elhanyagolást is tettünk a feladat megoldása során, amelyek közül jónéhány jelentősen módosítja az eredményt.

– Csak egyenes ütközéseket vettünk figyelembe, holott a valóságban az ütközések a háromdimenziós térben történnek, és ezért a neutronok diffúziós mozgást végeznek, és egy ütközéskor átlagosan kisebb energiát veszítenek, mintha csak egyenesen ütköznének. Emiatt több ütközésre van szükség.

– Az ütközések között megtett utat (az átlagos szabad úthosszat) a neutronok és a szóró atommagok szórási hatáskeresztmetszete is befolyásolja. Ez lényegesen különböző protonra és deuteronra, sőt függhet a neutron energiájától is, ami persze lassulás közben változik. Könnyűvízben az átlagos szabad úthossz 3,7 mm, nehézvízben pedig 19,6 mm, azaz több mint ötször akkora. Emiatt nehézvízben a neutronok körülbelül ötször akkora utat kell megtegyenek – még ha ugyanannyit is kellene ütközzenek –, mint könnyűvízben.

9. feladat (kitűzte: Sükösd Csaba)

Egy téglalap oldalai L és $4L$. A téglalap úgy képes változtatni az alakját, hogy mindig téglalap marad, és a felülete is állandó. Erre a téglalapra három elektront helyezünk, majd engedjük, hogy az elektronok – az egyensúlyi állapot elérése érdekében – deformálják a téglalapot.

Mekkora lesz a téglalap oldalainak az aránya egyensúlyi állapotban?

Megoldás:

Az a és b oldalú téglalapba bezárt elektron állóhullámának komponens-hullámhosszai, -impulzusai és -energiatagjai:

$$n_x \frac{\lambda_x}{2} = a \to \lambda_x = \frac{2a}{n_x} \to p_x = \frac{h}{2a} n_x \to$$

$$\to E_x = \frac{p_x^2}{2m} = \frac{h^2}{8m}\frac{1}{a^2} n_x^2,$$

$$n_y \frac{\lambda_y}{2} = b \to \lambda_y = \frac{2b}{n_y} \to p_y = \frac{h}{2b} n_y \to$$

$$\to E_y = \frac{p_y^2}{2m} = \frac{h^2}{8m}\frac{1}{b^2} n_y^2.$$

Így a teljes energia:

$$E = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2}\right).$$

A Pauli-elv szerint alapállapotban 2 elektron tartózkodik, a harmadik pedig első gerjesztett (1 csomóvonalas) állapotban lesz. Így a bezárt elektronrendszer teljes energiája:

$$E_{összes} = 2\frac{h^2}{8m}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \frac{h^2}{8m}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2}\right) =$$

$$= \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3}{a^2} + \frac{6}{b^2}\right) = \frac{3h^2}{8m}\left(\frac{b^2 + 2a^2}{a^2 b^2}\right).$$

A felület állandóságából $ab = 4L^2$, azaz $b = 4L^2/a$, ezt behelyettesítve kapjuk:

$$E_{összes} = \frac{3h^2}{8m}\left(\frac{1}{a^2} + 2\frac{a^2}{16L^4}\right) = \frac{3h^2}{8m}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{a^2}{8L^4}\right).$$

Első megoldás: deriválva a szerint kapjuk:

$$-\frac{2}{a^3} + \frac{2a}{8L^4} = 0,$$

amiből $a^4 = 8L^4$, azaz

$$a = \sqrt[4]{8}\,L = 1{,}682\,L \text{ és}$$

$$b = \frac{4L^2}{\sqrt[4]{8}\,L} = \sqrt[4]{32}\,L = 2{,}378\,L.$$

A téglalap oldalainak aránya tehát:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt[4]{32}\,L}{\sqrt[4]{8}\,L} = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}.$$

Második megoldás: A feladat deriválás nélkül is megoldható, ha használjuk a számtani és mértani középre vonatkozó – középiskolában is ismert – azonosságot:

$$\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy},$$

és az egyenlőség (a minimum) feltétele: $x = y$. Legyen most $x = 1/a^2$ és $y = a^2/8L^4$. Ekkor a zárójeles kifejezésre kapjuk:

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{a^2}{8L^4}\right) \ge 2\sqrt{\frac{1}{a^2}\frac{a^2}{8L^4}} = \frac{1}{L^2\sqrt{2}} = \text{konst.},$$

és minimumértékét akkor veszi fel, ha

$$\frac{1}{a^2} = \frac{a^2}{8L^4},$$

amiből természetesen visszakapjuk az

$$a = \sqrt[4]{8}\,L, \text{ és a } b = \frac{4L^2}{a} = \sqrt[4]{32}\,L$$

értékeket.

A téglalap oldalainak aránya tehát:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt[4]{32}\,L}{\sqrt[4]{8}\,L} = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}.$$

A feladatkitűző megjegyzése: a középiskolában tanított folyadékcseppmodellben a folyadékcseppet a „felületi feszültség” mindig gömbbé igyekszik összehúzni. Ugyanakkor tudjuk, hogy csak a mágikus számú protont és/vagy neutront tartalmazó atommagok gömbszimmetrikusak, az atommagok többsége alapállapotban is többé-kevésbé deformált. Ez a folyadékcseppmodell alapján érthetetlen, ennek kifejezetten kvantummechanikai oka van. Az atommagokra érvényes háromdimenziós, gömbi koordinátákban számolható kvantummechanikai eset természetesen túl bonyolult lenne középiskolások számára, ám a feladatban szereplő kétdimenziós „téglalap” esete középiskolások számára is végigszámolható egyszerű esetben megmutatja, hogy hogyan vezet a „lezárt törzsön” kívüli részecskék megjelenése az egész rendszer deformációjához. Az analógia a következő: deformáció közben a téglalap felszínének állandósága analóg az atommag térfogatának állandóságával 3D esetben (a maganyag összenyomhatatlan). A feladat feltételei mellett a leginkább szimmetrikus eset a négyzet lenne – ez felelne meg a gömb alaknak 3D-ben. (A kör természetesen még szimmetrikusabb 2D alakzat lenne, de a feladat matematikai kezelése túl nehéz lenne a középiskolások számára, ha nem csak téglalapokat, hanem általános síkidomokat kellene figyelembe venni.) Ha ugyanezt a feladatot két elektronra – vagy a 2D húrmodell egyéb „mágikus számára” – oldjuk meg, akkor az alapállapoti egyensúlyi alak valóban négyzet lesz. A mágikus számtól különböző részecskék esetén azonban deformált alakot kapunk – mint az a feladatban is látható.

10. feladat (kitűzte: Kis Dániel)

Legalább mekkora energiájú γ-fotonnak kell egy vízmolekulában lévő elektronon Compton-szórást szenvednie, hogy az így kirepülő elektron Cserenkov-sugárzást bocsásson ki?

Adatok: a víz törésmutatója n = 1,33. Az elektron kötési energiáját hanyagoljuk el!

Megoldás:

A Cserenkov-sugárzás feltétele, hogy a közegben mozgó elektron sebessége nagyobb legyen, mint a közegbeli fénysebesség. Így a vízmolekulából kilökött elektron sebességére kapjuk:

$$v \geq \frac{c}{n} = \frac{3\cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1{,}33} = 2{,}26\cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Az elektron minimális mozgási energiája pedig:

$$E_{kin} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} - 1 \right) = 0{,}517\, m_0 c^2 = 264\ \text{keV}.$$

Az elektronon szórt foton akkor ad át legnagyobb energiát a meglökött elektronnak, ha az ϑ = 180°-ban visszaszóródik. Ekkor a Compton-szórás képletéből adódik, hogy

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\vartheta) = \frac{2h}{mc},$$

mivel ebben az esetben $\cos\vartheta = -1$.

Fejezzük ki a hullámhosszakat E, E' energiákkal, majd azonos átalakítások után a keresett E fotonenergiára egy másodfokú egyenletet kapunk:

$$\frac{hc}{E'} - \frac{hc}{E} = \frac{2hc}{mc^2} \rightarrow \frac{E-E'}{E\cdot E'} = \frac{2}{E_0} \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta E \cdot E_0 = 2E\cdot E' = 2E(E-\Delta E) \rightarrow$$

$$\rightarrow 2E^2 - 2\Delta E\cdot E - \Delta E\cdot E_0 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow E^2 - \Delta E\cdot E - 0{,}5\,\Delta E\cdot E_0 = 0,$$

ahol $\Delta E = E - E'$ = 264 keV és $E_0 = mc^2$ = 511 keV.

$$E_{12} = \frac{\Delta E \pm \sqrt{(\Delta E)^2 + 2\Delta E\cdot E_0}}{2} = \frac{\Delta E}{2}\left(1 \pm \sqrt{1+\frac{2E_0}{\Delta E}}\right).$$

Itt csak a pozitív előjelet vesszük, hiszen a fotonenergia nem lehet negatív:

$$E = 0{,}5\cdot 264\ \text{keV}\cdot\left(1+\sqrt{1+\frac{2\cdot 511\ \text{keV}}{264\ \text{keV}}}\right) = 423{,}33\ \text{keV}.$$

Legalább 423,33 keV energiájú ($\lambda \leq 2{,}93\cdot 10^{-12}$ m hullámhosszú) fotonnak kell szóródnia a vízmolekulák elektronjain.

Junior (II. kategória) feladatai

Ezen a versenyen is, mint az első Szilárd-versenyen (valamint 2004 óta ismét) a junior kategória feladatai csak részben voltak azonosak az I. kategória (11–12. osztályosok) feladataival. Az utolsó két, a 9. és a 10. feladat más volt a fiatalabb versenyzők számára.

9. feladat (kitűzte: Vastagh György)

Egy pontszerűnek tekinthető radioaktív sugárforrás 3,2 mg ^{32}P izotópot tartalmaz. A foszfornak ez az izotópja 14,3 nap felezési idővel, negatív β-bomlással bomlik.

a) Mi lesz a leányelem?

b) Hány elektront számlál percenként a sugárforrástól 1 m távolságban elhelyezett β-detektor, ha annak felülete 10 cm²?

(A detektor és a sugárforrás vákuumban van.)

Megoldás:

a) Bomlási séma:

$$^{32}_{15}\mathrm{P} \rightarrow ^{32}_{16}\mathrm{S} + ^{\ 0}_{-1}e + \tilde{\nu}.$$

A kezdeti bomlatlan atommagok száma:

$$N = \frac{m}{M} N_A = \frac{3{,}2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{g}}{3{,}2 \cdot 10^{1}\ \dfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}} \cdot 6 \cdot 10^{23} \frac{1}{\mathrm{mol}} = 6 \cdot 10^{19}.$$

Az aktivitás kiszámítása

$$A = \frac{\ln 2}{T_f} N = \frac{\ln 2}{8{,}64 \cdot 10^{4} \cdot 14{,}3\ \mathrm{s}} \cdot 6 \cdot 10^{19} =$$

$$= 3{,}366 \cdot 10^{13}\ \frac{1}{\mathrm{s}} = 33\,660\ \mathrm{GBq}.$$

A detektor percenkénti beütésszáma:

$$N = \frac{A\,t}{4\pi\, r^2} \Delta f =$$

$$= \frac{3{,}3660 \cdot 10^{13}\ \dfrac{1}{\mathrm{s}} \cdot 60\ \mathrm{s}}{4\pi \cdot 10^{4}\ \mathrm{cm}^2} \cdot 10\ \mathrm{cm}^2 = 1{,}607 \cdot 10^{11}.$$

10. feladat (kitűzte: *Király Márton*)

Egy könnyűvíz-moderátorú atomerőműben az üzemanyagban lévő ^{238}U egy része üzem közben ^{239}Pu-má alakul, és ez ugyancsak részt vesz a láncreakcióban az ^{235}U mellett. A kazetta élettartama végén a hasadások közel harmadáért már az üzem közben felgyűlt ^{239}Pu felel. Az üzemanyaghoz szükséges, 4%-ban dúsított urán 1 kg-jának előállítása során 8,2 kg „szegényített” urán keletkezik 0,3% ^{235}U tartalommal. Az urán nagy sűrűsége miatt (19,1 g/cm^3) ezt előszeretettel használják ólom helyett lőszerekben és páncéltörő lövedékekben.

a) Mennyi hasadási energia lenne kinyerhető egyetlen szegényített uránlövedékből, ha a benne lévő ^{238}U-t teljes egészében plutóniummá tudnánk alakítani?

b) Mennyi idő alatt szabadul fel ugyanennyi hasadási energia egy 500 MW villamos teljesítményű atomerőművi blokkban (például Paks) ha az energiaátalakítás hatásfoka 34%?

c) Hány lövedékből nyerhető ki annyi energia, amennyi egy év alatt Magyarország összes belső égésű motorjában felszabadul?

Adatok: egy nehéz atommag hasadásakor átlagosan 200 MeV energia szabadul fel. Egy 120 mm-es kinetikus lövedék 4,5 kg szegényített uránt tartalmaz. Magyarországon 2011. évben összesen 2,88 milliárd liter motorhajtó üzemanyag fogyott. A benzin és a gázolaj fűtőértéke 43 MJ/kg, sűrűségük átlagosan 0,8 g/cm^3.

Megoldás:

a) A lövedékben található uránatomok száma:

$$N = \frac{m}{M} N_A \cdot 0{,}997 \approx \frac{4{,}5 \cdot 10^{3}\ \mathrm{g}}{238\ \dfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}} \cdot 6 \cdot 10^{23}\ \frac{1}{\mathrm{mol}} =$$

$$= 1{,}134 \cdot 10^{25}.$$

A kinyerhető energia:

$$E = N \cdot 200\ \mathrm{MeV} = 1{,}134 \cdot 10^{25} \cdot 2 \cdot 1{,}6\ \cdot 10^{-11}\ \mathrm{J} =$$

$$= 3{,}63 \cdot 10^{14}\ \mathrm{J} = 363\,000\ \mathrm{GJ}.$$

b) Mivel $P = W/t$, ezért

$$t = \frac{W}{P} = \frac{3{,}63 \cdot 10^{14}\ \mathrm{J}}{5 \cdot 10^{8}\ \mathrm{W} \cdot \dfrac{1}{0{,}34}} =$$

$$= 2{,}4684 \cdot 10^{5}\ \mathrm{s} \approx 68{,}56\ \mathrm{h} \approx 2\ \text{nap és}\ 20{,}5\ \mathrm{h}.$$

c) Felszabadult motorolaj-energia:

$$E = V\rho\, é = 2{,}88 \cdot 10^{9}\ \ell \cdot 0{,}8\ \frac{\mathrm{kg}}{\ell} \cdot 43\ \frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{kg}} =$$

$$= 99 \cdot 10^{9}\ \mathrm{MJ} = 9{,}9 \cdot 10^{16}\ \mathrm{J}.$$

A lövedékek száma:

$$N = \frac{9{,}9 \cdot 10^{16}\ \mathrm{J}}{3{,}63 \cdot 10^{14}\ \mathrm{J}} \approx 273\ \mathrm{db}.$$

✧

A következő (befejező) részben a verseny számítógépes szimulációs, valamint kísérleti feladatát, továbbá a verseny értékelését mutatjuk be.

Végül ismertetjük a győzteseket, a díjazottakat és a támogatókat.

A szerkesztőbizottság fizika tanításáért felelős tagjai kérik mindazokat, akik a fizika vonzóbbá tétele, a tanítás eredményességének fokozása érdekében új módszerekkel, elképzelésekkel próbálkoznak, hogy ezeket osszák meg a Fizikai Szemle hasábjain az olvasókkal!