BESZÁMOLÓ A 2015. ÉVI EÖTVÖS-VERSENYRŐL

Tichy Géza – ELTE Anyagfizikai Tanszék
Vankó Péter – BME Fizika Tanszék
Vigh Máté – ELTE Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2015. évi Eötvös-versenye október 16-án délután 3 órai kezdettel tizenöt magyarországi helyszínen[1] került megrendezésre. Ezért külön köszönettel tartozunk mindazoknak, akik ebben szervezéssel, felügyelettel a segítségünkre voltak. A versenyen a három feladat megoldására 300 perc áll rendelkezésre, bármely írott vagy nyomtatott segédeszköz használható, de zsebszámológépen kívül minden elektronikus eszköz használata tilos. Az Eötvös-versenyen azok vehetnek részt, akik vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny évében fejezték be középiskolai tanulmányaikat. Összesen 84 versenyző adott be dolgozatot, 21 egyetemista és 63 középiskolás.

Az ünnepélyes eredményhirdetésre és díjkiosztásra 2015. november 20-án délután került sor az ELTE TTK Harmónia termében. Az idei díjazottakon kívül meghívást kaptak az 50 és a 25 évvel ezelőtti Eötvös-verseny nyertesei is. Először az akkori feladatokat mutattuk be.

Az 1965. évi Eötvös-verseny feladatai

1. feladat

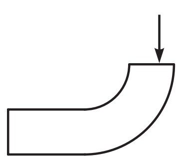
S = 20 méter hosszú, súlyos, hajlékony kötél egy kisméretű, súrlódás nélküli csigán van átvetve úgy, hogy hogy az egyik oldalon s_0 = 12 méter hosszú darabja lóg le. A kötelet elengedjük. Mennyi a kötél sebessége akkor, amikor az alsó kötélvég a) 16 méterre, b) 40 méterre van a csiga alatt? g = 1000 cm/s^2.

2. feladat

Hat, kör alakú, vezető fémlemezt helyezünk el egymás mellé, párhuzamosan. A szomszédok közötti d távolság egyenlő és kicsiny a lemezek sugarához képest. A lemezek sugara váltakozva R és $2R$. A lemezek középpontjai a síkjaikra merőleges egyenesen vannak. Kapcsoljuk össze a lemezeket úgy, hogy a keletkező kondenzátor kapacitása maximális legyen! Mekkora ez a kapacitás? Hogyan helyezkednek el a töltések a lemezeken?

3. feladat

Adva van egy negyedkörben meghajlított vastag üveglemez, amely egyenes részben folytatódik. Mi a feltétele annak, hogy az egyik véglapra merőlegesen beeső fénysugár



ne lépjen ki az üveglemez oldalfalain? (Csak a másik végén.) Csak a rajz síkjában haladó fénysugarakkal foglalkozzunk.

Az 1965-ös versenyen még csak érettségizett tanulók indulhattak (gimnazisták csak versenyen kívül). Ebben az évben két I. díjat osztottak ki (II. és III. díjat pedig egyet sem), a két díjazott: *Gnädig Péter,* a budapesti Táncsics Mihály Gimnázium érettségizett tanulója, tanára *Henter Lászlóné,* valamint *Juvancz Gábor* a budapesti Fazekas Mihály Gimnázium érettségizett tanulója, tanárai *Fábián Zoltán* és *Wiedemann László.*

Az 1990. évi Eötvös-verseny feladatai

1. feladat

Lemezjátszó korongjának közepére helyezett tálban víz van. A vízen egy pingponglabda úszik. Mi történik a pingponglabdával, miután megindítottuk a lemezjátszót?

2. feladat

Vízszintes helyzetű körlemezekből álló síkkondenzátort feltöltünk. A kondenzátor közelében a lemezek közti távolságot felező vízszintes síkban kis iránytűt helyezünk el. Ezután a kondenzátort a függőleges szimmetriatengely körüli forgásba hozzuk. Megmozdul-e az iránytű, s ha igen, merre?

3. feladat

Vízben szuszpendált, d = 0,5 μm átmérőjű, gömb alakú részecskék termikus egyensúlyi eloszlását vizsgáljuk mikroszkópon keresztül. A mikroszkóp tubusa függőleges. A részecskék anyagának sűrűsége 1040 kg/m^3, a hőmérséklet 23 °C. A mikroszkóp mélységélessége kicsi, mindig csak egy igen vékony vízrétegben lévő részecskék láthatók élesen. Mennyivel kell lejjebb süllyeszteni a mikroszkóp tubusát, hogy kétszer annyi részecskét lássunk? A víz törésmutatója n = 1,33.

Az 1990-es verseny díjazottjai: I. díjat kapott *Bodor András,* az ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnáziumának IV. osztályos tanulója, tanára: *Zsigri Ferenc;* II. díjat kapott *Horváth Tibor,* a kecskeméti Katona József Gimnázium IV. osztályos tanulója, tanára: *Kocsisné Domján Erzsébet,* valamint *Zóka Gábor,* a nagyatádi Ady Endre Gimnázium érettségizett tanuló-

[1] Részletek: http://mono.eik.bme.hu/~vanko/fizika/eotvos.htm.

ja, tanára *Knapp Ottó;* III. díjat kapott *Egyedi Péter,* a pécsi Leőwey Klára Gimnázium IV. osztályos tanulója, tanára *Csikós Istvánné, Maróti Miklós,* a szegedi Radnóti Miklós Gimnázium IV. osztályos tanulója, tanára *Dudás Zoltánné,* valamint *Tokodi Tamás,* a JATE Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium érettségizett tanulója, tanárai *Kocsis Vilmos* és *Győri István.*

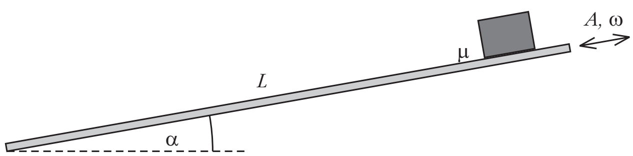
Gnädig Péter, az 50 évvel ezelőtti egyik győztes külföldi útja miatt nem tudott eljönni, de üzenetét *Vankó Péter* felolvasta. A 25 évvel ezelőtti díjazottak közül Horváth Tibor és Maróti Miklós jött el az alkalomra, utóbbi az akkori feladatok ismertetése után röviden beszélt a versennyel kapcsolatos emlékeiről és pályájáról.

Ezután következett a 2015. évi verseny feladatainak és megoldásainak bemutatása. Az 1. feladat megoldását *Vigh Máté,* a 2. feladatét Vankó Péter, a harmadik feladatét *Tichy Géza* ismertette.

A 2015. évi Eötvös-verseny feladatai

1. feladat kitűzte: Vigh Máté

Egy L = 6 m hosszúságú, merev deszkalap síkja a vízszintessel állandó, α = 10°-os szöget zár be. Az így kialakított lejtő tetejére egy kis hasábot helyezünk. A deszkát a lejtésvonalával párhuzamos irányban A = 1 mm amplitúdóval és ω = 500 s^{-1} körfrekvenciával harmonikusan rezgetni kezdjük.



1. ábra

Mennyi idő alatt éri el a hasáb a lejtő alját? (A csúszási és tapadási súrlódási együttható értéke egyaránt μ = 0,4, a hasáb a mozgás során nem borul fel.)

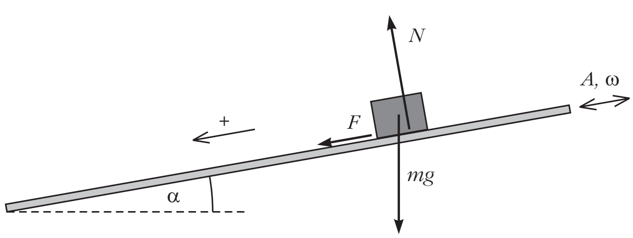
Megoldás

Az m tömegű hasábra az mg nehézségi erő, az N kényszererő és az F (csúszási vagy tapadási) súrlódási erő hat (utóbbi iránya a deszkalap rezgetése során változik). A test mozgásegyenletei a lejtőre merőleges, illetve azzal párhuzamos irányban:

$$N - m g \cos\alpha = 0,$$

$$F + m g \sin\alpha = m a.$$

A gyorsulásnál a lejtés irányát választottuk pozitívnak, lásd a *2. ábrát.*



2. ábra

Tapadás esetén a kényszererő és a súrlódási erő között az $|F| \le \mu N$ egyenlőtlenség áll fenn, míg csúszásnál $|F| = \mu N$. A hasáb gyorsulása akkor a lehető legnagyobb, ha a hasáb csúszik, és a hasáb *deszkához viszonyított* (relatív) sebessége negatív irányba mutat. Ekkor

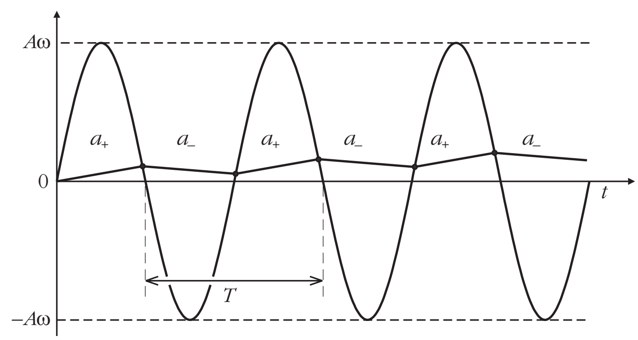
$$a_{\max} = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha),$$

az adatok behelyettesítése után $a_{\max} \approx 5{,}6\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ adódik. A deszkalap legnagyobb gyorsulása a harmonikus rezgés következtében $A\omega^2 = 250\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, amely több mint 40-szer akkora, mint $a_{\max}$ értéke, így a hasáb a rezgetés indításakor *azonnal megcsúszik.* Látni fogjuk, hogy további mozgása során a test sehol sem tapad meg, tehát mindvégig az (állandó nagyságú) csúszási súrlódási erő hat rá.

A hasáb gyorsulása a mozgás során tehát kétféle értéket vehet fel aszerint, hogy a súrlódási erő éppen a pozitív vagy negatív irányba mutat:

$$a_{\pm} = g(\sin\alpha \pm \mu\cos\alpha),$$

és mivel a megadott számadatok szerint $\mu > \mathrm{tg}\alpha$, így a_+ előjele pozitív, a_- előjele pedig negatív. Az a_+ gyorsulású mozgásszakasz addig tart, amíg a deszka (előjeles) sebessége nagyobb a hasáb sebességénél, míg az a_- gyorsulású mozgásszakaszban a helyzet éppen fordított. A *3. ábrán* látható grafikonon ábrázoltuk a deszkalap és a hasáb sebességét az idő függvényében. Utóbbi egy olyan töröttvonallal ábrázolható, ahol az egyes szakaszok meredeksége a_+ és a_-. Mivel $|a_+| > |a_-|$, így a hasáb egy periódusra vett átlagsebessége (a „sodródási sebesség”) egyre növekszik, miközben a test lefelé sodródik a deszkán.

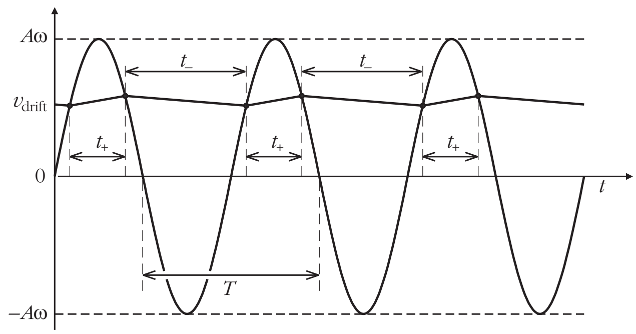


3. ábra

A sodródási sebesség növekedése addig tart, amíg a hasáb átlaggyorsulása zérussá nem válik. Ezután a hasáb sebessége egy állandó v_{drift} érték körül fluktuál (*4. ábra*). Ez az állandósult (stacionárius) mozgás a viszonylag nagy rezgetési frekvencia miatt hamar kialakul, így a teljes mozgási idő becslésekor a kezdeti felgyorsulás időszakát el is hanyagolhatjuk.

Az állandósult sodródás feltétele:

$$\langle a \rangle \equiv \frac{a_+ t_+ + a_- t_-}{T} = 0.$$



4. ábra

Természetesen fennáll a

$$T = t_+ + t_-$$

egyenlőség is. Az egyenletekből megkaphatjuk a t_+ időtartam hosszát:

$$t_+ = \frac{a_-}{a_- - a_+}\,T = \left(1 - \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mu}\right)\frac{T}{2}.$$

A sodródási sebességet pedig abból a feltételből határozhatjuk meg, hogy a hasáb gyorsulása akkor vált irányt, amikor a deszka és a hasáb sebessége megegyezik. A sebesség (v_{drift} értékéhez képest kicsiny) fluktuációját elhanyagolva:

$$v_{\text{drift}} \approx A\,\omega\cos\left(\omega\,\frac{t_+}{2}\right).$$

Végül, behelyettesítve a T_+-ra kapott eredményt:

$$v_{\text{drift}} = A\,\omega\cos\left[\left(1 - \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mu}\right)\frac{\pi}{2}\right] = A\,\omega\sin\left(\frac{\pi\;\mathrm{tg}\alpha}{2\mu}\right).$$

A számszerű adatokat felhasználva $v_{\text{drift}} \approx 0{,}32\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ értéket kapunk, így a hasáb mozgásának becsült ideje

$$t = \frac{L}{v_{\text{drift}}} \approx 18{,}8\ \mathrm{s}.$$

Hátravan még annak belátása, hogy a hasáb valóban nem tapad meg soha a lejtőn. A megtapadásnak két feltétele van: az egyik, hogy egy adott pillanatban a test és a deszkalap sebessége megegyezzen; a másik, hogy ugyanebben a pillanatban a deszka gyorsulásának nagysága kisebb legyen $|a_+|$-nál vagy $|a_-|$-nál aszerint, hogy a deszka épp lefelé vagy felfelé gyorsul. A sebesség-idő grafikonról látszik, hogy ez a két feltétel csak akkor következhet be, amikor a deszka gyorsulása nagyon kicsi, azaz sebessége nagy ($A\omega$-hoz közeli). Ekkora sebességre azonban a hasáb nem tud felgyorsulni, mert már előbb beáll a nála jóval kisebb v_{drift}. A hasáb tehát mindvégig csúszva halad a lejtőn.

Megjegyzés

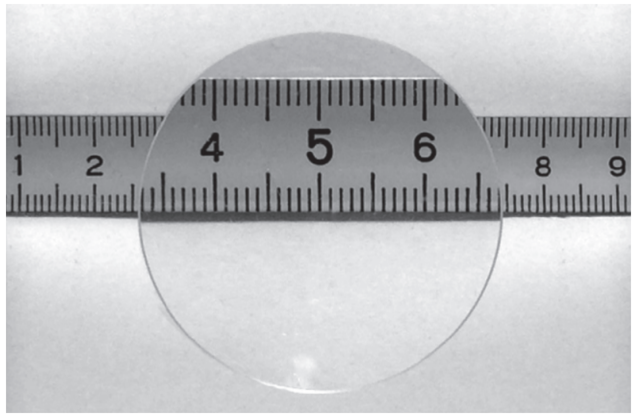
A megoldás során felhasználtuk, hogy a mozgás első, átmeneti szakasza (amely alatt a hasáb átlagsebessége eléri a v_{drift} értéket) rövid. Részletesebb számolással megmutatható, hogy ez az időtartam

$$\tau \approx \frac{A\,\omega}{\mu\,g\cos\alpha} \approx 0{,}13\ \mathrm{s}$$

nagyságrendű, tehát a becslésnél elkövetett hibánk valóban elhanyagolható (1-2% körüli érték).

2. feladat kitűzte: Tichy Géza és Vankó Péter

A fényképen látható vékony lencse átmérője 4,00 cm, a lencse és a mérőszalag távolsága 5,0 cm.

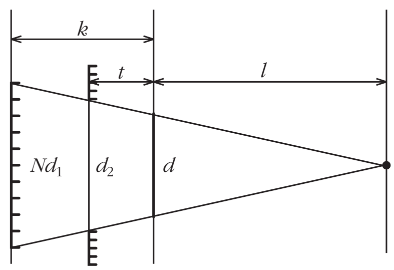


5. ábra

Mekkora a lencse fókusztávolsága?

Megoldás

A képen (*5. ábra*) látható, hogy a lencse a mérőszalagról egyenes állású, nagyított, látszólagos képet hoz létre. A képről két adat olvasható le: a lencsén belül (nagyítva) látható mérőszalagszakasz hossza (ezt jelöljük d_1-gyel) és az a távolság, amit a lencse kitakar a mérőszalagból (ez legyen d_2).



6. ábra

Készítsünk vázlatot az optikai elrendezésről (*6. ábra*)! A rajzon három sík látható: a lencse síkja, a mérőszalag síkja és a látszólagos kép síkja. Az átmérők közül a lencse d átmérője meg van adva, a d_2 átmérőt leolvastuk a képről, a látszólagos kép átmérője pedig Nd_1, ahol d_1 a képről leolvasott méret és N a nagyítás. A távolságok közül a t tárgytávolság (a lencse és a mérőszalag távolsága) meg van adva, a k képtávolság és az l távolság (a lencse és a fényképezőgép távolsága) egyelőre ismeretlen.

A rajzon ábrázolt mennyiségek között egyszerű összefüggéseket írhatunk fel. A lencsetörvény alapján:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} - \frac{1}{k},$$

ahol f a keresett fókusztávolság (a látszólagos képtávolság negatív, de k-t pozitív távolságként jelöltük). A nagyítás:

$$N = \frac{k}{t},$$

a látószögek egyenlőségéből (hasonló háromszögek):

$$\frac{N d_1}{k + l} = \frac{d_2}{t + l} = \frac{d}{l}.$$

Az egyenletrendszert rendezve (k-t, l-t és N-t kiejtve):

$$f = \frac{t\,d}{d_2 - d_1}.$$

Mielőtt ebbe a kifejezésbe behelyettesítenénk a megadott és leolvasott adatokat, foglalkoznunk kell az adatok *hibájával* is! Nem véletlenül szerepel a szövegben 4,00 cm és 5,0 cm. A lencse átmérőjét tolómérővel meg lehet mérni, így az tizedmilliméter (századcentiméter) pontossággal megadható. A lencse és a mérőszalag távolsága már nem mérhető ilyen pontosan, hiszen a lencse vastagsága sem nulla – ezt az adatot már csak milliméter pontosan adja meg a feladat szövege. A legkritikusabb a d_1 és d_2 távolságok minél pontosabb leolvasása, mert a fókusztávolság képletében ezek különbsége szerepel. Gondos megfigyeléssel ezek az átmérők néhány tizedmilliméter pontossággal leolvashatók a képről.

A megadott és leolvasott adatok hibájából már a hibaszámítás ismert szabályai szerint meghatározható a fókusztávolság relatív hibája:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta d_1 + \Delta d_2}{d_2 - d_1}.$$

A megadott és leolvasott adatok hibával:

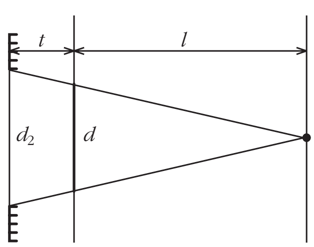
$$t = 5 \pm 0{,}05 \text{ cm},$$
$$d = 4 \pm 0{,}005 \text{ cm},$$
$$d_1 = 3{,}4 \pm 0{,}02 \text{ cm},$$
$$d_2 = 4{,}9 \pm 0{,}02 \text{ cm}.$$

Ebből a numerikus eredmény: $f = 13{,}3 \pm 0{,}5$ cm.

Megjegyzések

1. A versenyzők egy része másképp gondolkozott, másféleképp oldotta meg a feladatot. E megoldások gondolatmenete a következő.

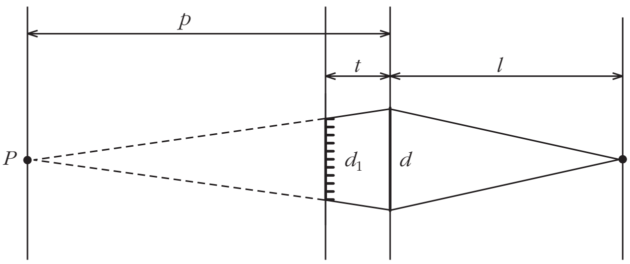
A megadott adatok (*7. ábra*) és a leolvasott d_2 „külső” átmérő alapján hasonló háromszögek segítségével kifejezhető a lencse és a fényképezőgép l távolsága:



7. ábra

$$l = \frac{t\,d}{d_2 - d}.$$

A *8. ábrán* az látható, hogy a nagyított képen még éppen látható pontokból (a d_1 „belső” átmérő két széléről) induló (és a lencsén megtörve a fényképezőgépbe jutó) fénysugarak olyanok, mintha egy képzeletbeli P pontból indulnának. A P pont lencsétől mért p távolsága az előzőhöz hasonló módon kifejezhető:



8. ábra

$$p = \frac{t\,d}{d - d_1}.$$

A képzeletbeli P pontból induló fénysugarak a lencsén megtörve éppen a fényképezőgépbe jutnak, így a lencsetörvény alapján

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l},$$

amiből l és p behelyettesítésével és átrendezéssel a fókusztávolságra a már korábban levezetett eredményt kapjuk.

2. A versenyzők közül senki sem foglalkozott a hibákkal, és a leolvasást is „nagyvonalúan” végezték (a d_2 átmérőt legtöbben kereken 5 cm-nek, mások 4,8 cm-nek vették). Egy 1 mm-es leolvasási hiba 1 cm-es hibát okoz a fókusztávolságban – ennek ellenére az eredményt legtöbben 4-5 értékes jegy pontossággal adták meg. Így erre a feladatra – bár 16-an lényegében helyesen megoldották – senki se adott teljes értékű megoldást.

3. feladat — *Holics László* feladata nyomán kitűzte: Gnädig Péter

Egy hosszú, vékony, egyenes tekercs (szolenoid) hossza l = 1 m, átmérője D_1 = 2 cm, meneteinek száma N_1 = 2000, ohmos ellenállása elhanyagolható. A tekercs kivezetéseire 100 V effektív feszültségű, 100 kHz frekvenciájú váltakozó feszültséget kapcsolunk. A szolenoid mellett, annak közvetlen közelében, a tengelyére merőleges felezősíkban egy N_2 = 200 menetszámú, lapos, D_2 = 3 cm átmérőjű tekercs helyezkedik el.

Mekkora effektív feszültséget mutat a lapos tekercsre kapcsolt (ideálisnak tekinthető) voltmérő?

Egy tanárlegenda, Holics László és a díjazott diákok.

1. megoldás

A hosszú tekercsben folyó áram hatására a tekercs belsejében valamekkora, időben periodikusan változó $\Phi(t)$ mágneses fluxus jön létre. A változó mágneses fluxus a hosszú tekercs minden menetében feszültséget indukál, ezek összege minden pillanatban megegyezik a tekercsre kapcsolt váltakozó feszültséggel:

$$U_1(t) = N_1 \frac{\Delta \Phi(t)}{\Delta t}.$$

A lapos tekercsben nem folyik áram (a voltmérő ellenállása nagyon nagy), de a hosszú tekercs szórt mágneses tere feszültséget indukál benne. A feladat e szórt tér meghatározása.

A tekercsen kívüli mágneses mező ($l \gg D_1$ miatt) jó közelítéssel olyan, mintha a tekercs egyik végén egy pontszerű forrásból összesen $\Phi(t)$ mágneses fluxus indulna ki *gömbszimmetrikusan,* a tekercs másik végén pedig ugyanekkora fluxus nyelődne el (vagyis mintha egy $-\Phi(t)$ erősségű forrás helyezkedne el ott).

A lapos tekercs a hosszú tekercs felezősíkjában, a hosszú tekercshez közel helyezkedik el, így ezen a helyen mindkét forrás külön-külön

$$B(t) = \frac{\Phi(t)}{4\pi \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

mágneses indukciót hoz létre (mert a Φ fluxus egy $l/2$ sugarú gömb felületén oszlik el egyenletesen). A lapos tekercs közel van a hosszú tekercshez, így B közel merőleges a felületére. A lapos tekercsen áthaladó teljes (mindkét forrásból származó) fluxus emiatt:

$$\Phi_2(t) = 2\,B(t)\,\pi \left(\frac{D_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{D_2}{l}\right)^2 \Phi(t).$$

Ez az időben változó fluxus a lapos tekercsben

$$U_2(t) = N_2 \frac{\Delta \Phi_2(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2} N_2 \left(\frac{D_2}{l}\right)^2 \frac{\Delta \Phi(t)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{N_2}{N_1} \left(\frac{D_2}{l}\right)^2 U_1(t)$$

feszültséget indukál. (Felhasználtuk $U_1(t)$ korábban felírt kifejezését.)

Az $U_1(t)$ és $U_2(t)$ feszültségek minden pillanatban arányosak egymással, így az effektív értékek aránya is ugyanekkora. Ebből a keresett feszültség:

$$U_2 = \frac{1}{2} \frac{N_2}{N_1} \left(\frac{D_2}{l}\right)^2 U_1 \approx 4{,}5 \text{ mV}.$$

2. megoldás *Fehér Zsombor* megoldása alapján

Egy hosszú, egyenes tekercs (szolenoid) belsejében kialakuló mágneses indukció nagyságára jól ismert a következő összefüggés:

$$B_\infty = \mu_0 \frac{N I}{l},$$

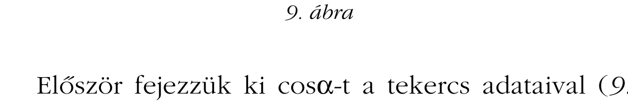
ahol N a tekercs menetszáma, I a tekercsen átfolyó áramerősség és l a tekercs hossza, valamint μ_0 értéke $4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am.

Ez az összefüggés azonban *véges* hosszúságú tekercsre *csak közelítőleg* igaz! A véges hosszúságú tekercs terét helyesen a következő kifejezés adja meg:

$$B = B_\infty \cos\alpha = \mu_0 \frac{N I}{l} \cos\alpha,$$

ahol α a tekercs zárókörének fél látószöge a tekercs középpontjából nézve. Ez az összefüggés a Biot–Savart-törvény segítségével levezethető (lásd a *2. megjegyzésben*).

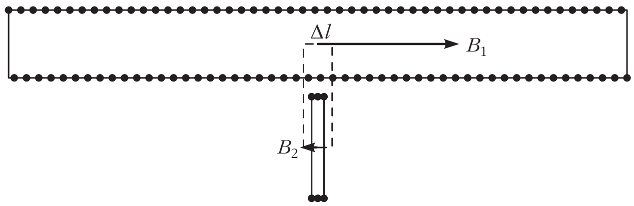
Hosszú, vékony tekercsnél $\alpha \ll 1$, és így $\cos\alpha \approx 1$, tehát az ismert összefüggés általában *jó közelítésként* használható. Ebben a feladatban azonban pont ez a kicsi különbség lesz számunkra fontos!



9. ábra

Először fejezzük ki $\cos\alpha$-t a tekercs adataival (*9. ábra,* kihasználjuk, hogy $\alpha \ll 1$, $\sin\alpha \ll 1$.):

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} \approx 1 - \frac{1}{2}\sin^2\alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{D_1}{l}\right)^2.$$



10. ábra

Írjuk fel a gerjesztési törvényt egy olyan kis téglalapra, amelynek két oldala a két tekercs tengelyén fekszik (*10. ábra*):

$$B_1\,\Delta l + B_2\,\Delta l = \mu_0\, n\, I = \mu_0 N_1 \frac{\Delta l}{l} I = \mu_0 \frac{N_1 I}{l} \Delta l,$$

ahol B_1 és B_2 a hosszú, illetve a rövid tekercsben lévő indukció nagysága, n pedig a kis hurok által körülfogott menetek száma. (Felhasználtuk, hogy a tengelyre merőleges indukciókomponens a szolenoid tengelye tájékán elhanyagolható.)

A hosszú tekercsben a mágneses indukció

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1 I}{l} \cos\alpha \approx \mu_0 \frac{N_1 I}{l}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{D_1}{l}\right)^2\right],$$

amit felhasználva

$$B_2 = \mu_0 \frac{N_1 I}{l} - B_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{D_1}{l}\right)^2 \mu_0 \frac{N_1 I}{l} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{D_1}{l}\right)^2 B_1.$$

A tekercsekben indukált feszültség arányos a tekercsek menetszámával és az egy meneten áthaladó fluxussal, amiből a keresett feszültség:

$$U_2 = \frac{N_2 B_2 \pi \left(\dfrac{D_2}{2}\right)^2}{N_1 B_1 \pi \left(\dfrac{D_1}{2}\right)^2} U_1 = \frac{1}{2}\frac{N_2}{N_1}\left(\frac{D_2}{l}\right)^2 U_1,$$

az 1. megoldással megegyezően.

Megjegyzések

1. A megoldásban nem használtuk fel a megadott adatok közül a hosszú tekercs D_1 átmérője, valamint a rákapcsolt feszültség frekvenciájának számértékét. Ugyanakkor mindkét adat *nagyságrendje* fontos a megoldáshoz! Felhasználtuk, hogy $l \gg D_1$, mert emiatt közelíthettük a külső teret két *pontforrás* terével. A hosszú tekercs induktív ellenállása és így a tekercsen folyó áram nagysága függ a frekvenciától. Ha a frekvencia sokkal kisebb (például 50 Hz) lenne, akkor a tekercsen a rákapcsolt 100 V feszültség hatására olyan nagy áram indulna meg, amely a tekercset azonnal szétolvasztaná.

2. *A véges hosszúságú tekercs terének levezetése.* Egy r sugarú körvezetőben folyó $\mathrm{d}I$ áram által keltett mágneses indukciót a kör síkjára merőleges szimmetriatengely mentén, a kör síkjától h távolságra könnyen felírhatjuk a Biot–Savart-törvény segítségével:

$$B(h) = \frac{\mu_0\,\mathrm{d}I}{4\pi}\frac{2r\pi}{r^2+h^2}\frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{\mu_0 r^2\,\mathrm{d}I}{2\left(r^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Rakjuk össze az l hosszúságú N menetes tekercset $\mathrm{d}h$ vastagságú kis köráramokból. Ekkor egy ilyen kis körben

$$\mathrm{d}I = \frac{NI}{l}\mathrm{d}h$$

áram folyik, ami a tengelye mentén, a síkjától h távolságra

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 N I r^2}{2\,l\left(r^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}h$$

indukciót hoz létre.

A tekercs középpontjában lévő indukciót úgy kapjuk meg, hogy ezeket a kis indukciójárulékokat összegezzük $h = -l/2$-től $h = l/2$-ig:

$$B = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mathrm{d}B = \frac{\mu_0 N I r^2}{2\,l}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\mathrm{d}h}{\left(r^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{\mu_0 N I}{l}\frac{\dfrac{l}{2}}{\sqrt{\left(\dfrac{l}{2}\right)^2 + r^2}} = \frac{\mu_0 N I}{l}\cos\alpha,$$

ahol α a tekercs zárókörének fél nyílásszöge a tekercs középpontjából nézve (lásd a *9. ábrát*).

Ezután került sor az eredményhirdetésre. A díjakat *Patkós András,* az Eötvös Loránd Fizikai Társulat elnöke adta át.

Egyetlen versenyző sem oldotta meg mindhárom feladatot, ezért a versenybizottság 2015-ben nem adott ki első díjat.

Egy feladat helyes és egy feladat lényegében helyes megoldásáért *második díjat* nyert *Fehér Zsombor,* a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója, *Horváth Gábor* tanítványa – jelenleg az ELTE matematikus hallgatója; *Holczer András,* a Pécsi Janus Pannonius Gimnázium érettségizett tanulója, *Dombi Anna* és *Kotek László* tanítványa – jelenleg a BME villamosmérnök hallgatója; *Juhász Dániel,* a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Csányi Sándor* tanítványa; *Sal Kristóf,* a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója, Kotek László és Horváth Gábor tanítványa, valamint *Tompa Tamás Lajos,* a miskolci Földes Ferenc Gimnázium 11. osztályos tanulója, *Zámborszky Ferenc* és *Kovács Benedek* tanítványa.

Egy feladat helyes megoldásáért és a hozzáfűzött diszkusszióért *harmadik díjat* nyert *Balogh Menyhért,*

A 2015. évi Eötvös-versenyen legeredményesebben szereplő diákok. (Fotók: Tichy-Rács Ádám)

a budapesti Baár-Madas Református Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Horváth Norbert* tanítványa.

Egy feladat lényegében helyes megoldásáért *dicséretben* részesült *Bege Áron,* a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulója, Horváth Gábor és *Szokolai Tibor* tanítványa; *Bencsik Bálint,* az Óbudai Árpád Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Nagy Attila* tanítványa; *Bugár Dávid,* a komáromi Selye János Gimnázium érettségizett tanulója, *Szabó Endre* tanítványa – jelenleg az ELTE fizikus hallgatója; *Forrai Botond,* a budapesti Baár-Madas Református Gimnázium 12. osztályos tanulója, Horváth Norbert tanítványa; *Frey Balázs,* a Váci Szakképzési Centrum Boronkay György Műszaki Szakközépiskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Tóth Eszter* tanítványa; *Gémes Antal,* a hódmezővásárhelyi Bethlen Gábor Református Gimnázium 11. osztályos tanulója, *Lakatos-Tóth István* és *Nagy Tibor* tanítványa; *Kasza Bence,* a Budai Ciszterci Szent Imre Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Ábrám László* és *Sarkadi Tamás* tanítványa; *Kovács Péter Tamás,* a Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnázium 11. osztályos tanulója, *Juhász Tibor* és *Pálovics Róbert* tanítványa; *Körmöczi Dávid,* az Egri Szilágyi Erzsébet Gimnázium és Kollégium 12. osztályos tanulója, *Szabó Miklós* tanítványa; *Olosz Balázs,* a PTE Babits Mihály Gyakorló Gimnázium érettségizett tanulója, *Koncz Károly* tanítványa – jelenleg a BME villamosmérnök hallgatója; *Szamosfalvi Benjámin Balázs,* a Miskolci Herman Ottó Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Dudás Imre* tanítványa; *Szick Dániel,* a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója, Horváth Gábor tanítványa; *Tomcsányi Gergely,* a Váci Szakképzési Centrum Boronkay György Műszaki Szakközépiskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója, Tóth Eszter tanítványa, valamint *Török Péter,* a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulója, Horváth Gábor és Szokolai Tibor tanítványa.

A MOL támogatásával a második díjjal nettó 25 ezer, a harmadik díjjal nettó 20 ezer forint pénzjutalom járt, a dicséretes versenyzők, valamint a díjazottak tanárai pedig a versenyt támogató Typotex Kiadó könyveit kapták.