

A KVARKANYAG SZOKATLAN TERMODINAMIKÁJA

Bíró Tamás Sándor

MTA KFKI Részecske és Magfizikai Kutató Intézet

Mi a kvarkanyag?

Az anyag szerkezete, folytonosság vagy atomosság, az atom részei, az atommag részei. Elemiek-e az elemi részecskék? Kvarkok és gluonok, színdinamika, kvark-gluon plazma: a nehézionfizika Szent Grálja.

A fizikában nem szokatlan az ilyen kezdetű mondat: „Már a régi görögök is...” Nos, ha a kvarkanyagról nem is, az anyagi világ elemi felépítéséről, például a tengerpart homokszemeinek számáról sokat vitatkoztak az ókoriak. Alapelvük az volt, hogy ami létezik, az nem lehet ellentmondásos, ezért ha okoskodásuk ellentmondásba (paradoxonba) torkolt, azt úgy értelmezték, hogy a kiinduló feltevés lehetetlen. A mozgás természetéről szóló szofista paradoxonok bizonyára közismertek. A vákuumtól való irtózás („horror vacui”) elvét is igazából a létező semmi, a valahol levő üresség ellentmondásos volta miatt mondta ki Arisztotelész. Minden, gondolatilag végtelenszer ismétlődő eljárást (mai nyelven rekurziót) eredménytelennek érezték, ezért elvetették. Demokritosznak is ez volt az érve az atomok mellett: az nem lehet, hogy az anyag vég nélkül osztható legyen, mert ennek a (gondolati) eljárásnak sosem érünk a végére. A legkisebb elem oszthatatlan, ezért „atom”.

Az atom nevet az újkorban a kémiai elemek tulajdonságát még hordozó legkisebb egység kapta. Azért tartották oszthatatlannak, mert hosszas próbálkozások ellenére sem sikerült az egyik elemet a másikba átalakítani. A bölcsek köve, amely erre képes lenne, a legendák közé került. Valójában a kémiai reakciók, az elemek vegyülése, megbontják az atom szerkezetét: az elektronok átrendeződnek. Az ionizáció, az elektromos áram (galvánelem) felfedezése után már ionokról és elektronokról is beszéltek, de az atomot még mindig oszthatatlannak, bár több verzióban megjelenőnek tartották. A radioaktivitás felfedezése vezetett az atommag és elektronburok modelljéhez, az atom szétszedhetőségéhez. Ráadásul az atommag átalakíthatósága is bebizonyosodott: nem lehetetlen aranyat előállítani más elemekből (csak ez többbe kerül, mint maga az arany).

A 20. század elején a proton, az elektron és a foton voltak az elemi részecskék, az anyag alapvető építőkövei. A neutron és a pozitron felfedezése, valamint az anti-részecske koncepciója az 1930-as évek elején ezt a számot hétre emelte. Igazán zavaró lett az elemi részek száma az 1950-es 60-as években, a kozmikus sugárzás detektorai és a gyorsítók megépítésével. Pionok, kaonok, müonok, rezonanciák és más, viszonylag stabil részecskék tucatjával váltak ismertté. Túl sok lett az „elemi”-nek nevezett részecske. Rendszerezési szándékkal, a Mengyelejev-féle periódusos rendszerhez hasonlóan, született meg a kvarkmodell. Az elemi részecskék háromfajta

kvarkot tartalmazhatnak: *up*, *down* vagy *strange* nevűt. A nehezebbek (barionok) hármat, a közepesen nehezek (mezonok) egy kvarkot és egy antikvarkot, míg a könnyűek (leptonok) egyet sem. A leptonok és kvarkok (ma már hat fajtát ismerünk) egy-egy családba rendezése alkotja mindmáig a részecskefizika standard modelljének alapját. Mindezek mellett az alapvető erőket közvetítő részecskék is megjelennek, a mértékbozonok. Az elektromágneses kölcsönhatást fotonok, a gyenge kölcsönhatást (amely pl. a radioaktivitásért felelős) a W^+ , W^- és Z jelű, gyenge bozonok, míg az erős kölcsönhatást (amely az atommagot összetartó erőért felelős) nyolcfajta ragacsrészecske, úgynevezett gluon közvetíti.

Az atom ionizációjához és a maghasadáshoz hasonló jelenséget azonban a kvarkok szintjén mindmáig nem sikerült megfigyelni. A kvarkok az őket tartalmazó erősen kölcsönható elemi részekbe be vannak zárva. A kvark-bezárás mechanizmusa nem igazán ismert. Matematikailag is kielégítő levezetését adni az erőket leíró alapelmélet, a kvantum-kromodinamika (QCD) alapján még senkinek sem sikerült. A kvalitatív fizikai képből azonban egyetértésre jutottunk: a kvarkokat a gluonok ragasztják össze, ezeket a kvarkok bocsátják ki és nyelik el egy bizonyos tulajdonságuk alapján, amelyet – némi fantáziával – színnek neveztek el. Ha megpróbálunk egy hadront szétszedni, energiát kell közölnünk vele, amely egy darabig újabb gluonok, majd egyszer csak egy kvark–antikvark pár képzésére fordítódik. Az eredmény egy vagy több újabb hadron, a kvarkok „felszabadítása” helyett.

A fokozott energiaközlés, ha gyorsan zajlik, sok-sok kvark és gluon jelenlétéhez vezethet kis térfogatban. Ebben az állapotban nem világos, hogy melyik kvark melyikkel áll párba (vagy hármasba), ki kihez tartozik. Ez egy valódi ősanyag, az úgynevezett kvarkanyag. Ezzel ugyanakkor elértük azt az állapotot, amely a lehető legközelebb esik a kvarkok felszabadításához. Analógiaként azt mondhatjuk, hogy egy párt nemcsak akkor fenyegethet az elválás, ha legalább egyikük messzire elutazik, hanem egy zsúfolt házibulin (még ha ugyanabban a szobában tartózkodnak is) éppúgy elsodródhatnak egymástól. Mindazonáltal kérdés, hogy a kvarkanyag a természetben megvalósul-e, illetve hogy technikailag megvalósítható-e.

A nehézion-fizika Szent Grálja a kvarkanyag. Ezt keressük egyre nagyobb energiára gyorsított atommagok ütközéseiben, remélve, hogy az ősanyagot, ha csak kicsiben is, de újra létrehozhatjuk. Elméleti modelleket állítunk fel, amelyek a kvarkanyagot ilyen extrém körülmények között vizsgálják, az ebből kialakuló részecskesokaság jellemzőit, például energiaspektrumát számolják. Ennek során a kvarkanyag mint egy nagyon sűrű és energiadús (röviden forró) felhő jelenik meg: ez a kvark-gluon plazma (QGP). Ahhoz, hogy ezt megértsük, mind az elemi részek tulajdonságait, mind a melegítés és a plazmák mibenlétét tisztázni kell.

Az MTA Fizikai Osztályának 2003. december 13-ai ülésén tartott tudományos előadás szerkesztett változata.

A termodinamika elvei

A QGP-bez melegítés útján jutunk. Mi a melegítés részecskék esetében? Alapelv: energiaközlés. Termodinamikai főtételek: 1. az energia megmaradása (és mibenléte), 2. az energiaközlés hatékonysága (entrópia), 3. a hőmérséklet és az entrópia nullpontja. Potenciálok és feltételek, a Legendre-transzformációs struktúra. Ezek az elvek általánosak.

Az energiaközlés, melegítés általános elveivel a termodinamika foglalkozik. Ezek az elvek annyira általánosak, hogy kvantumozott rendszerek és a részecskefizika sem lehet kivétel hatályuk alól. A kvark–gluon plazma is, amennyiben létrejön, alá van vetve a termodinamika törvényeinek.

A legfőbb alapelveket főtételeknek nevezzük. Az első főtétel szerint az energia megmarad: nem lehet megsemmisíteni, sem a semmiből nyerni, csak a megjelenési formája változik. Ez egy önmagával konzekvens elv: ha úgy tűnik, nem marad meg a teljes energia, akkor arra kell gyanakodni, hogy egy eddig még ismeretlen formája felelős a teljes összegért. Ez az elv vezetett például a neutrínó felfedezéséhez, amikor egy töltetlen, s ezért nyomot sem hagyó részecske viszi el a hiányzó energiát és impulzust. A második főtétel még szigorúbb: az energiaátalakítás hatásfokát maximálja. Van egy különös formája az energiaközlésnek vagy elvonásnak, ez a hő. Ezt a formát, amely a hőmérséklettel és az entrópiával arányos, nem lehet elkerülni: zárt rendszerben az entrópia nem csökkenhet. Fontos tehát a kvarkanyag és a hadronanyag entrópiájának az összehasonlítása is, mert csak olyan hadronizációs modell lehet jó, amelyik nem csökkenti a teljes entrópiát. Végül a harmadik főtétel szerint csak az a jó entrópiamérték, amely az abszolút $T = 0$ hőmérsékleten szintén nulla, $S = 0$. Ebből az is következik, hogy ha valaki javasol egy entrópiát, amely egy másikkal a függvénye, $\tilde{S} = f(S)$, akkor ennek a függvénynek monotonnak kell lennie, és $f(0) = 0$ mindenképpen teljesül.

Képletszerűen a belső energia dE megváltozása mindenképpen a dS entrópiaváltozás, a dV térfogatváltozás és az esetleges részecskeszám-változások, dN figyelembe vételével számítható ki:

$$dE = T dS - p dV + \mu dN + \dots \quad (1)$$

A megfelelő energiaközlések együtthatói, a T (abszolút) hőmérséklet, a p nyomás, a μ kémiai potenciál, úgynevezett intenzív paraméterek, amelyek két anyagdarab egyensúlya esetén egyenlő értékre állnak be. Ha nem egyenlők, akkor addig folyik a megfelelő extenzív mennyiségek árama (hacsak ezt valamilyen szigetelés nem akadályozza meg mesterségesen, amiről egy felrobbanó kvark–gluon plazmában azért nem nagyon lehet szó), amíg az entrópia el nem éri maximumát.

$$S = \frac{E}{T} + \frac{pV}{T} - \frac{\mu N}{T} = \max. \quad (2)$$

az úgynevezett mikrokanonikus egyensúly definíciója.

Ha nem a kvark–gluon plazma egészét vizsgáljuk, hanem csak egy kisebb részét, amely a többi résszel még

szoros kapcsolatban van, akkor állandó energia- és részecskeszám mellett. Ekkor az energia, térfogat és részecskeszám értékét nem ismerjük, ezek az értékek fluktuálnak. Az $S(E, V, N)$ összefüggés – az állapotegyenlet – nem rögzíthető pontosan. Ebben az esetben egy másik kifejezés, az úgynevezett szabad energia az, amely az egyensúlyt jellemzi. Élénk energiacsere és fix hőmérséklet esetén az $F = E - TS$ mennyiség minimuma írja le az egyensúlyt. Az ennek megfelelő kanonikus állapotegyenlet egy $F(T, V, N)$ függvény.

A két (azaz a mikrokanonikus és a kanonikus) leírás kapcsolata az úgynevezett Legendre-transzformáció egy speciális esete:

$$\beta = \frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}, \quad F = E - TS. \quad (3)$$

Ennek során az energia és a hőmérséklet kapcsolata impliciten adott. Hasonlóan végrehajtható egy további Legendre-transzformáció a részecskeszám viszonylatában. Ekkor

$$\frac{\mu}{T} = \frac{\partial S}{\partial N}, \quad \Omega = F - \mu N. \quad (4)$$

Térfogatilag homogén rendszerekre $\Omega = -pV$, ami az ellenkező eset bizonyításáig jó feltevés. A kvark–gluon plazmát is homogénnek tekintjük. Ekkor az összes extenzív (azaz összeadódó) mennyiség arányosnak vehető a térfogattal: $E = Ve$, $N = Vn$. A nagykanonikus állapotegyenlet homogén határesetben a nyomás és a sűrűségeknek megfelelő intenzív mennyiségek kapcsolata által adott: $p(T, \mu)$.

Amennyiben a fenti feltételek teljesülnek, a $p(\mu, T)$ és az $S(E, N, V)$ állapotegyenletek ekvivalensek. A kvark–gluon plazma és az abból kialakuló, főként pionokból álló hadrongáz leírása a megfelelő $p(T, \mu)$ görbék összehasonlításával történik a legegyszerűbben: ha a két anyag egyensúlyban van, akkor azonos T és μ mellett a nyomások is megegyeznek (ez a Gibbs-kritérium), különben a nagyobb nyomású állapot (ún. fázis), valósul meg az egyensúly elérése után.

A fent vázolt, hagyományos termodinamika feltételei közül némelyik nem valószínű azonban, hogy teljesül a nehézion-kísérletekben. Ilyen a kellően nagy rendszer megléte, s ezért a véges térfogat, illetve részecskeszám hatása erős lehet. Ez speciális folyamatok, például a csak párban keletkező ritka hadronok esetén jelentős lehet. A másik feltétel az állandónak tekintett paraméterek időbeli túl gyors változása, akár csak fluktuációja. A „zajos” hőmérséklet például az egyensúlyi energiaeloszlást megváltoztathatja, ami a kirepülő részecskék spektrumában mérhető effektusra vezet. Ilyen jelenségekről a további fejezetekben lesz szó.

Részecskék és véletlen számok

A hő és a hőmérséklet statisztikus elmélete, matematikai modell, állapotegyenlet. Véletlen számok és átlagok, Fourier-transzformáció. Rekombináció, az exponenciális stationárius megoldás. A hatványeloszlás rekombinációja.

A termodinamika alapelvei működésének egyik általános feltétele az, hogy a fontos fizikai mennyiségek átlagértéke oly nagy legyen, hogy emellett a fluktuációk nagysága elhanyagolható. Ezt eldönteni azonban egyáltalán nem egyszerű. Néha a néhány is elegendően soknak bizonyul, máskor a végtelen sok sem garantálja a változatlan átlagot. Matematikailag az átlagtól való eltérés valószínűségének kell kellően gyorsan csökkennie. Ha ez nem következik be, akkor a klasszikus termodinamika nem alkalmazható. Ilyen esetekre jöhet szóba egy „kiterjesztett” termodinamika alkalmazása. Ahhoz, hogy az ilyen irányú, kortárs (pl. az entrópiafogalom általánosítására irányuló) próbálkozásokat megértsük, először a klasszikus entrópia és a mikroszkopikus eloszlások kapcsolatát kell röviden felelevenítenünk. Ezt a célt szolgálja a jelen fejezet.

Akár az energiakvantumok, akár a részecskék eloszlását vizsgáljuk, a különböző sokrészecske-, sok-kvantum-állapotok relatív valószínűségét keressük. Egyensúlyban ezt az entrópia maximalizálásával számíthatjuk ki, esetleg egyes átlagértékek, például az energia vagy részecskeszám beállítása mellett. Ezt a Lagrange-szorók módszerével tehetjük meg, azaz a nagykanonikus esetben $S - \beta(E - \mu N)$ maximumát keressük. A kiindulópont mindenestre az entrópia (valamint az energia és részecskeszám) meghatározása a különböző lehetséges állapotokra. Ha egy i állapot valószínűsége w_i (és az összes állapot ismerjük, azaz $\sum_i w_i = 1$), akkor a Boltzmann–Gibbs-entrópia az átlagos meglepetés:

$$S = \left\langle \ln \frac{1}{w_i} \right\rangle = - \sum_i w_i \ln w_i. \quad (5)$$

Egy valószínűtlen állapot (w_i kicsi) bekövetkezése nagy mennyiséggel, míg egy valószínű állapoté csak kevésbé növeli a meglepetés-entrópiát. Ha összesen \mathcal{N} állapot van és mindegyik egyformán valószínű ($w_i = 1/\mathcal{N}$), akkor $S = \ln \mathcal{N}$. Ez az egyenletes eloszlás egyben az entrópiát maximalizáló mikrokanonikus eloszlás. Ez két állapot esetére nagyon egyszerűen belátható. A megfelelő valószínűségek p , illetve $1-p$, az entrópia $S = -p \ln p - (1-p) \ln(1-p)$. Ennek maximuma, mint az például deriválás útján megállapítható, valóban $p = 1-p$ (azaz $p = 1/2$) esetén áll be.

A nagykanonikus valószínűség, a Gibbs-eloszlás az alábbi kifejezés maximumából adódik:

$$- \sum_i w_i \ln w_i - \beta \sum_i w_i E_i - \beta \mu \sum_i w_i N_i = \max. \quad (6)$$

A w_i szerinti deriváltat zérussal egyenlővé téve kapjuk:

$$w_i = \frac{1}{Z} \exp(-\beta (E_i - \mu N_i)), \quad (7)$$

ahol a Z partíciós összeg a $\sum w_i = 1$ feltétel miatt

$$Z = \sum_i \exp(-\beta (E_i - \mu N_i)). \quad (8)$$

A hőmérséklet ez esetben $T = 1/\beta$, állandó. A sok részecskéből álló kvark–gluon plazma esetében a lehetséges állapotokra való összegzés a térfogatra és a részecske

impulzusára való összegzést jelent. Nagy térfogatban és magas hőmérsékleten (egyelőre $\mu = 0$ kémiai potenciál mellett) ez egy-egy integrállal írható le:

$$N = V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \exp(-E_k/T), \quad (9)$$

$$E = V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} E_k \exp(-E_k/T),$$

ahol E_k a \vec{k} impulzusú részecske által hordozott teljes energia. Különösen érdekes a részecskénti energia, E/N , mert ez jól mérhető és független a V térfogattól. A nyomás is kiszámítható egy integrállal, s az entrópia az

$$S = \frac{E + pV - \mu N}{T}$$

összefüggésből. A nagyon gyors részecskékre az energia a relativisztikus képletből számolható,

$$E_k = \sqrt{m^2 + k^2},$$

ahol a fénysebességet egységnyinek választottuk.¹ Ha a jellemző energiák nagyok a nyugalmi energiához képest, akkor $E_k \approx |\vec{k}| \gg m$. A részecskesűrűség és az energiasűrűség integrálja leegyszerűsödik:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \exp(-k/T), \quad (10)$$

$$\varepsilon = \frac{E}{V} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^3 \exp(-k/T).$$

Az eredmény szerint $n = \lambda T^3$ és $\varepsilon = \sigma T^4$. Hasonló számolásból adódik a nyomás:

$$p = \frac{1}{3} \sigma T^4.$$

Ezek az eredmények a tiszta sugárzásra jellemző Stefan–Boltzmann-törvénnyel egyeznek meg (azzal a különbséggel, hogy a kvantumozás miatt az integrálokban az exponensnél bonyolultabb kifejezés jelenik meg, de a hőmérséklet hatványaival való arányosság nem változik).

A kvarkbezárás miatt még egy, a térfogattal arányos „büntető” energia, BV is számításba jön, a tényleges energiasűrűség a kvark–gluon plazma esetén tehát

$$\varepsilon = \sigma T^4 + B \quad \text{és} \quad p = \frac{1}{3} \sigma T^4 - B$$

adja az állapotegyenletet. Ez az anyag egy bizonyos hőmérséklet alatt ($T_0 \approx 175$ MeV) negatív nyomású lenne, ezért rögtön csomósodik: a kvarkokból és gluonokból hadronok keletkeznek. Ugyanakkor a kvarkok és gluonok energiaeioszlása exponenciális volt, amit a

¹ Ez a részecskefizikában szokásos egységrendszer: a fénysebesség, a redukált Planck-állandó és a Boltzmann-állandó mind egy, $c = 1$, $\hbar = 1$ és $k = 1$. Így a tömeg, az impulzus, a hőmérséklet mértékegysége megegyezik az energiáéval, mind MeV vagy GeV. Egy proton tömege – azaz a nyugalmi energiája – körülbelül 1 GeV.

részecskeszámra vonatkozó integrál differenciálásával kapunk:

$$\frac{(2\pi)^3}{V} \frac{d^3 N}{dk^3} = \exp\left(-\frac{|k|}{T}\right). \quad (11)$$

A keltett hadronok ezt az eloszlást – legalábbis részben – öröklik, valóban megfigyelhető exponenciálisan lecsengő szakasz a pionok és más részecskék spektrumában.

Szögezzük le, az nagyon jelentős tény, hogy a termodinamika gyorsító kísérletekre, jelesül a kvark-gluon plazmára is alkalmazható. Voltak azonban fanyalgók is, akik megjegyezték, ezzel viszont nem sok újat tudunk meg a természet jelenségeiről. A továbbiakban a kvark-gluon plazma egy viszonylag új, a hagyományos termodinamika egyensúlyi feltételeit fellazító tárgyalását ismertetem, amelynek kutatásában magam is részt veszek.

Először tekintsük át, hogy mit is jelent a fluktuációk el nem hanyagolhatósága. Milyen nagy a nagy, milyen kicsi a kicsi? A kvark-gluon plazmát leíró különféle matematikai modellekben (mint a fizika más területein is) a véletlen számok jelentős szerepet játszanak. Az egyik legfontosabb módszer a kanonikus vagy nagykanonikus eloszlású energiaértékeknek megfelelő modellállapotok előállítása számítógépen, amelyek segítségével aztán a mérhető átlagértékek meghatározhatók. Ha egy véletlen változó eloszlása egyenletes, például $(-1, 1)$ közötti, akkor sok ilyen szám jól használható mikrokanonikus modellezésre. Kanonikus esetben gondoskodni kell az állapotok preparálásáról, a hőtartállyal való egyensúly eléréséről, ami az $\exp(-E/T)$ Gibbs-eloszláshoz vezet végül. De vajon ez mindig igaz?

Az átlagok és fluktuációk viszonyát az általános termodinamikai elvek szerint azért fogadjuk el, mert majdnem minden eloszlás sokszoros megismétlése a Gauss-eloszláshoz vezet (ez a centrális határeloszlás tétele). A Gauss-eloszlásban az átlagtól való eltérés relatív nagysága minden határon túl csökkenthető a mintavétel (független) megismétlésével: $\Delta E/E \sim \mathcal{N}^{-1/2}$ a jellemző arány. A véges intervallumon egyenletes eloszlású véletlen számok összege például nagyon jól közelíti a Gauss-eloszlást. Egyetlen szám eloszlása egy vízszintes szakasszal jellemezhető két szám összege már egy háromszög alakú kaplap. Vizsgáljuk meg n darab ilyen szám skálázott összegének az eloszlását:

$$P_n(x) = 2^{-n} \left(\prod_{i=1}^n \int_{-1}^1 dx_i \right) \delta\left(x - a_n \sum_{i=1}^n x_i\right), \quad (12)$$

ahol a $\delta(x-y)$ disztribúció (Dirac-delta) az integrálra rákényszeríti az $x = y$ feltétel teljesülését. Számítsuk ki ennek az eloszlásnak a Fourier-transzformáltját,

$$\tilde{P}_n(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} P_n(x), \quad (13)$$

amelynek a k szerinti deriváltjai a $k = 0$ helyen az $\langle x^i \rangle$ típusú várható értékeket adják. Az úgynevezett centrális

momentumok (négyzetes szórás és magasabb korrelációk) pedig az $\ln \tilde{P}_n(k)$ deriváltjaiból adódnak.

$$\tilde{P}(0) = \int dx P(x) = 1$$

a nulladik derivált,

$$\frac{d\tilde{P}}{dk(0)} = \int dx i x P(x) = i \langle x \rangle$$

az első derivált stb.

A véletlen számok összegére visszatérve az x szerinti integrálás a $\delta(\cdot)$ disztribúcióban kirótt feltétel teljesüléséhez vezet:

$$\tilde{P}_n(k) = 2^{-n} \left[\prod_{i=1}^n \int_{-1}^1 dx_i \exp(i k a_n x_i) \right]. \quad (14)$$

Ez pedig n egyforma integrál szorzata, azaz

$$\tilde{P}_n(k) = \left[\frac{1}{2} \int_{-1}^1 dy \exp(i k a_n y) \right]^n. \quad (15)$$

Az integrál elvégezhető, az eredmény:

$$\tilde{P}_n(k) = \left[\frac{\sin(a_n k)}{a_n k} \right]^n. \quad (16)$$

A $\sin(z)/z$ függvény oszcillál és fokozatosan eltűnik nagy argumentumra, míg a nulla közelében egy. Válasszuk a skálafaktort $a_n = (3/n)^{1/2}$ -nek, ekkor nagy n -re $a_n k$ kicsi, és az eredmény sorba fejthető:

$$\tilde{P}_n(k) \approx \left(1 - \frac{a_n^2 k^2}{6} + \dots \right)^n, \quad (17)$$

ami a

$$\tilde{P}_n(k) \approx \left(1 - \frac{k^2/2}{n} \right)^n \rightarrow \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right) \quad (18)$$

eredményre vezet. Ez egy Gauss-függvény, amelynek a Fourier-transzformáltja szintén Gauss:

$$P_\infty(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Ezzel egy speciális esetben bebizonyítottuk a centrális határeloszlás tételt. Az általános bizonyítás hasonlóan végezhető, mindvégig feltétel azonban, hogy a $P(x)$ alapeloszlás ne legyen túlságosan hosszú farkú (azaz minden centrális momentuma véges legyen). Ellenpélda a Lorentz-eloszlás,

$$P(x) = \frac{T/\pi}{1 + T^2 x^2}, \quad (19)$$

amelynek Fourier-transzformáltja,

$$\tilde{P}(k) = \exp\left(-\frac{|k|}{T}\right),$$

a Gibbs-féle részecskespektrum ultrarelativisztikus esetben. A centrális momentumok ez esetben az

$$\ln \tilde{P}(k) = -\frac{|k|}{T}$$

deriváltjai a $k = 0$ helyen, amelyek mindegyike (kivéve a nulladikat) divergál. Most is lehet persze határeloszlás,

$$\ln \tilde{P}_n(k) = -\frac{n|k|a_n}{T}$$

független n -től, ha $a_n = 1/n$. Vagyis a számtani közép (sok-sok egyenlő energiájú részecske tömegközéppontja) szintén Lorentz-eloszlású. Az érdekes az, hogy egy kis tömeg bevezetésével ez az eloszlás „rövidíthető”, azaz regulárisra tehető. Ha

$$\tilde{P}(k) = \exp\left(\frac{m - \sqrt{m^2 + k^2}}{T}\right)$$

egy-egy kvark vagy gluon spektruma (azaz majdnem Lorentz-görbe mentén lokalizálható a plazma belsejében), akkor n ilyen részecskéből álló hadronszerű csomó (ún. *cluster*) spektruma hasonlóan exponenciális:

$$\tilde{P}_n(k) = \exp\left(\frac{nm - \sqrt{(nm)^2 + k^2}}{T}\right). \quad (20)$$

Ha n nagyon nagy, de m nagyon kicsi, akkor az így létrejövő képződmény (hadron) $M = nm$ tömege lehet véges. A gyorsító nyalábirányára merőlegesen kirepülő hadronok spektruma így

$$\exp\left(\frac{M - M_t}{T}\right)$$

értékűnek adódik, ahol

$$M_t = \sqrt{M^2 + k_t^2}$$

az úgynevezett transzverzális tömeg. Egy szabály, amely különböző M tömegű hadronokra (pionra, kaonra, protonra) a kísérletileg megfigyelt spektrumokban teljesülni látszik.

A fent leírt jelenséget rekombinációnak nevezzük. Elemi esete, $n = 2$, például egy kvark és egy antikvark mezonná egyesülését jellemzi. Ennek során az energia közel egyenlő arányban adódik az egyik és a másik kvarkból az új hadron nyugalmi rendszerében. Az ok az, hogy a mezonba kötött állapotra jellemző relatív impulzus sokkal kisebb (kb. 100 MeV), mint a kiindulási kvarkok egyenkénti impulzusa (1–10 GeV).

Az exponenciális függvény a rekombináció szempontjából is különleges. Az E energiájú hadron két, egyaránt $E/2$ energiájú kvarkból való keletkezésekor a spektrum szorzódik (ez az eredeti valószínűségek konvolúciójának felel meg):

$$\tilde{P}_2(k) = \tilde{P}_1^2\left(\frac{k}{2}\right).$$

Sok részből (ún. partonból) álló hadron esetén

$$\tilde{P}_n(k) = \tilde{P}_1^n\left(\frac{k}{n}\right) \quad (21)$$

a rekombináció szabálya. Ennek a szabálynak az exponenciális spektrum:

$$\tilde{P}(k) = \exp\left(-\frac{|k|}{T}\right)$$

a fixpontja, önmagába megy át. Ez a tulajdonság nem triviális. A Tsallis-eloszlás, amely a következő fejezet témája lesz, például egy hatványfüggvényszerű spektrumot ad,

$$\tilde{P}_1(E) = \left(1 + \frac{E}{b}\right)^{-c}, \quad (22)$$

amelynek az n -szeres rekombinációja,

$$\tilde{P}_n(E) = \left(1 + \frac{E}{nb}\right)^{-nc}, \quad (23)$$

nem önmaga. Nagyon nagy n -re azonban ez a spektrum is az exponenciálisához közelít.

Az entrópia általánosításai

Miért kell általánosítani: hosszúfarkú eloszlások, nem eléggé elnyomott fluktuációk. Tsallis-entrópia és kanonikus eloszlás. A Tsallis-entrópia nem extenzív.

Vannak tehát esetek – például a nehézion-reakciók bizonyos aspektusai ilyenek –, amikor a hagyományos termodinamika alapfeltevései nem teljesülnek. Ilyenkor az átlagtól való eltérések, a fluktuációk jellemzően nagyok és jelentős távolságban sem függetlenek. Ilyen helyzetben az entrópia eredeti definíciója, amely az a priori egyenlő valószínűségek elvére vezetett a mikrokanonikus sokaságban, változtatásra szorul. A kiterjesztett képlettől elvárjuk, hogy egy bizonyos határesetben visszaadja az eredeti Boltzmann–Gibbs-formulát, s egyébként tartsa meg az entrópia józanul hangzó tulajdonságait. (A tudomány konzervativizmusa, a kis lépések taktikája hatalmas hatóerő: új elméletek kidolgozásakor biztosítja a lehető legmesszebb menő kompatibilitást a régi eredményekkel, az addigi tudomány újrafelhasználását.)

Az entrópia józan tulajdonságai közé tartozik a pozitívitás (nulla szigorúan csak nulla hőmérsékleten lehet), a monotonitás és a független (nem kölcsönható) rendszerekre vonatkozó additívitás (extenzívitás). Ha valamit ebből fel kell adni, akkor ez nyilván az utolsó szempont: hosszú távú kölcsönhatás esetén – amilyenek a kvarkokat egymáshoz ragasztó erők is – az egész több mint részeinek az összege. A furcsa itt az, hogy látszólag, azaz „átlagosan” független rendszerekre is elvetjük az entrópia additívitását: a közös állapot valószínűsége továbbra is a független részállapotok valószínűségeinek a szorzata, de a teljes entrópia nem a részentrópiák összege. A logaritmus formula megváltozik.

Az idők során több ilyen kiterjesztési javaslat is született. Az egyik legtöbbet elemzett javaslat *Constantino Tsallis* brazil fizikustól származik.

A kiindulópont a logaritmust és inverzét, az exponenciális függvényt közelítő hatványfüggvények használata. (Ez nagyon jól illik a részecskefizikában tapasztalt, részben exponenciálisnak, részben hatványfüggvénynek tűnő spektrumokhoz.) Definiáljuk a következő függvény-csoportot:

$$\ln_c(x) = c(1 - x^{-1/c}), \quad \lim_{c \rightarrow \infty} \ln_c(x) = \ln(x), \quad (24)$$

$$\exp_c(x) = \left(1 - \frac{x}{c}\right)^{-c}, \quad \lim_{c \rightarrow \infty} \exp_c(x) = \exp(x).$$

A c hatvány tetszőleges valós szám lehet. Ezek a függvények egymás inverzei, $\exp_c[\ln_c(x)] = x$, s a deriválási szabályok csak kicsit térnek el a megszokottól:

$$\frac{d}{dx} \exp_c(x) = \exp_c^q(x), \quad (25)$$

$$\frac{d}{dx} \ln_c(x) = \frac{1}{x^q},$$

ahol $q = 1 + 1/c$ az úgynevezett Tsallis-index. A szokásos logaritmustól eltérően, az \ln_c függvény nem additív a szorzat argumentumra nézve:

$$\ln_c(xy) = \ln_c(x) + \ln_c(y) - \frac{1}{c} \ln_c(x) \ln_c(y). \quad (26)$$

(A módosítás iránya természetesen c előjelétől függ.) A Tsallis-entrópia definíciója,

$$S = \sum_i w_i \ln_c\left(\frac{1}{w_i}\right), \quad (27)$$

alapján az ekvipartíció, a kanonikus és nagykanonikus eloszlás, valamint az állapotegyenlet szintén módosul. Ha $w_i = 1/\mathcal{N}$, akkor $S = \ln_c(\mathcal{N})$, illetve $\mathcal{N} = \exp_c(S)$. Két független részrendszer összetevésekor, még ha az együttes állapot valószínűsége szorzat is ($w_{ij}^{(12)} = w_i^{(1)} w_j^{(2)}$), a Tsallis-entrópia nem additív:

$$S^{(12)} = S^{(1)} + S^{(2)} - \frac{1}{c} S^{(1)} S^{(2)}. \quad (28)$$

A nagykanonikus eloszlás és partíciós függvény szintén a módosított exponenciálist tartalmazza,

$$w_i = \frac{1}{Z} \exp_c\left(-\frac{X_i}{T}\right), \quad Z = \sum_i \exp_c\left(-\frac{X_i}{T}\right), \quad (29)$$

ahol $X_i = E_i - \mu N_i$. Az átlagos energia és részecskeszám szerepét módosított átlagok veszik át,

$$E = \frac{\sum_i w_i^q E_i}{\sum_i w_i^q}, \quad N = \frac{\sum_i w_i^q N_i}{\sum_i w_i^q}, \quad (30)$$

amelyek a szokásostól némiképp eltérő termodinamikai potenciálra vezetnek:

$$\Omega = -pV = -T \ln_c Z = \left(1 - \frac{S}{c}\right)(E - \mu N) - TS. \quad (31)$$

Szerencsére a részecske energiája kifejezéséből az $(1 - S/c)$ véges méretfaktor kiesik:

$$\frac{E}{N} = \frac{\mu \frac{\partial p}{\partial \mu} + T \frac{\partial p}{\partial T} - p}{\frac{\partial p}{\partial \mu}}. \quad (32)$$

A részecskespektrumok az $\exp_c(-x)$ energiaeloszlást követik $x = (E_k - \mu)/T$ argumentummal. Érdekes megjegyezni, hogy ez a függvény, amely kis energiákra közel exponenciális, míg nagy energiákra hatványszerű lecsengetést mutat, előállítható a szokásos exponenciális függvény integráljaként is:

$$\exp_c(-x) = \frac{1}{\Gamma(c)} \int_0^\infty dt t^{c-1} e^{-t(1+x/c)}, \quad (33)$$

ahol

$$\Gamma(c) = \int_0^\infty dt t^{c-1} e^{-t}$$

az Euler-féle Gamma-függvény, értéke, ha c egész szám, a faktoriális, $(c-1)!$. Ez úgy is felfogható, hogy az x változóban szereplő inverz hőmérséklet, $1/T$ nem állandó, hanem a fenti integrállal jellemzett, úgynevezett Gamma-eloszlást követ. Fizikailag ez a kvarkanyag gyors fejlődése miatt fellépő, nem elhanyagolható hőmérséklet-fluktuációk hatását veszi figyelembe. (Ez a Gamma-eloszlású inverz hőmérséklet levezethető egy multiplikatív zajt tartalmazó, sztochasztikus hővezetési egyenletről.)

Az ideális Tsallis-gáz állapotegyenlete a fentiek alapján meghatározható, a részecskesűrűség és az energiasűrűség a hatványfüggvénnyel meghatározott hagyományos eloszlások Gamma-eloszlású integráljából adódik:

$$n_0 = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} f_c\left(\frac{E_k - \mu}{T}\right), \quad (34)$$

$$\epsilon_0 = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} E_k f_c\left(\frac{E_k - \mu}{T}\right).$$

A fenti integrálokban szereplő egyrészecske-eloszlás-függvény levezethető a hagyományos termodinamikai képletek Gamma-eloszlású integráljaiból:

$$f_c(x) = -\frac{d}{dx} \ln_c(Z),$$

$$Z(x) = \frac{\int_0^\infty dt t^{c-1} e^{-t} \zeta\left(\frac{tx}{c}\right)}{\int_0^\infty dt t^{c-1} e^{-t}}, \quad (35)$$

ahol

$$\zeta(y) = 1 + \exp(-y)$$

a hagyományos Fermi- és

$$\zeta(y) = \frac{1}{1 - \exp(-y)}$$

a hagyományos Bose-eloszlásra, amelyek a kvarkok, illetve a gluonok kvantumos eloszlását írják le. A nagy energiára jellemző klasszikus közelítés a Boltzmann–Gibbs-eloszlás, amelyeknek most a feltétele $\exp_c(-x) \gg 1$. Ekkor

$$\begin{aligned} f_c(x) &\approx -\frac{d}{dx} \ln_c(1 + \exp_c(-x)) \\ &\approx -\frac{d}{dx} \exp_c(-x) \\ &= \left(1 + \frac{x}{c}\right)^{-c-1} = w_i^q. \end{aligned} \quad (36)$$

Behelyettesítve a $\mu = 0$ mellett érvényes $x = |k|/T$ kifejezést, a (34) képleteknek megfelelő integrálok elvégezhetőek. Az eredmény:

$$\begin{aligned} n_0 &= \frac{1}{2\pi^2} \frac{2c^2}{(c-1)(c-2)} T^3, \\ \epsilon_0 &= \frac{1}{2\pi^2} \frac{6c^3}{(c-1)(c-2)(c-3)} T^4. \end{aligned} \quad (37)$$

Ebből

$$\frac{E}{N} = \frac{\epsilon_0}{n_0} = \frac{3cT}{c-3}$$

adódik, ami egy egyszerű összefüggés a részecskespektrum hatványmeredeksége, $(c+1)$ és a részecskénti energia, E/N között. A hagyományos termodinamika $c \rightarrow \infty$ határesetében visszakapjuk az

$$\frac{E}{N} = 3T$$

képletet, amely a kvark–gluon plazma eredeti elképzelésére volt jellemző, s azonos a tiszta sugárzással töltött üreg fotonokénti energiájával. A gyakorlati esetben azonban, $T \approx 175$ MeV és $E/N \approx 1000$ MeV értékeket mértek, ami ezt az arányt közel $6T$ -re teszi $3T$ helyett. A spektrum hatványa ebből $c+1 \approx 6,7$ -nek adódik. Ugyanakkor más, elektron–pozitron ütközésben mért spektrumokra inkább az $5,8 \pm 0,5$ hatvány a jellemző. Vajon megakasztja ez a parányi homokszem a Tsallis-féle termodinamika gépezetét?

Részecskespektrumok és kvázirészecskék

Az entrópia extenzív tétele, az energia nem extenzív. Kölcsönhatási energia egy része a kvázienergiában: kvázirészecskék. Kvantumos korrekciók, Fermi- és Bose-eloszlás. Kísérletileg mért spektrumok.

A termodinamika kiterjesztésével járó meglepetéseknek még nincs vége. Kiderült, hogy a Tsallis-entrópia helyett bevezethető ennek egy monoton függvénye, amely additív. Tekintsük az

$$\tilde{S} = c \ln \frac{1}{1 - S/c} \quad (38)$$

Wang-féle entrópiát (itt a hagyományos logaritmus szerepel). Könnyen belátható, hogy ez a (28) képletben kifejezett pszeudoadditivitás érvényessége mellett additív. Miután az

$$\begin{aligned} \tilde{S}^{(12)} &= -c \ln \left(1 - \frac{1}{c} S^{(12)}\right) \\ &= -c \ln \left[1 - \frac{1}{c} \left(S^{(1)} + S^{(2)} - \frac{1}{c} S^{(1)} S^{(2)}\right)\right] \end{aligned} \quad (39)$$

képletben a logaritmus argumentumában az

$$\left(1 - \frac{S^{(1)}}{c}\right) \left(1 - \frac{S^{(2)}}{c}\right)$$

szorzat fedezhető fel, eredményül az additivitást kapjuk:

$$\begin{aligned} \tilde{S}^{(12)} &= -c \ln \left(1 - \frac{1}{c} S^{(1)}\right) - c \ln \left(1 - \frac{1}{c} S^{(2)}\right) \\ &= \tilde{S}^{(1)} + \tilde{S}^{(2)}. \end{aligned} \quad (40)$$

Mínt hogy a (38) képlet által megadott függvény monoton, a Wang-entrópiának ugyanott van maximuma, ahol a Tsallis-entrópiának. A kanonikus és nagykanonikus eloszlás most is hatványfüggvény.

Hogyan lehetséges, hogy az additív Wang-entrópia nem a szokásos exponenciális eloszlást adja? Az ok az energia nem additív volta ebben az esetben. Megadható egy formális energia kifejezés, amely additív, s ezért a hagyományos ideális gáz termodinamikájára vezet, azaz az

$$\omega_k = b \ln \left(1 + \frac{E_k}{b}\right) \quad (41)$$

kifejezést tekintve energiának a hagyományos Gibbs-eloszlás,

$$\exp\left(-\frac{\omega_k}{T}\right) = \left(1 + \frac{E_k}{b}\right)^{-b/T} \quad (42)$$

valóban hatványszerű (az $\exp(a \ln x) = x^a$ képlet alapján). Amennyiben $b = cT$, majdnem visszakapjuk a Tsallis-féle kanonikus eloszlást azzal az apró különbséggel, hogy most a részecskespektrumban szereplő hatvány mindössze c , nem $c+1$. Ez egy olyan Tsallis-féle termodinamikának felel meg, ahol az összenergiát és részecskeszámot nem w_i^q -val, hanem w_i -vel súlyozva számoltuk ki:

$$E = \sum_i w_i E_i, \quad N = \sum_i w_i N_i.$$

Ez a nehézion-kísérletben tapasztalt spektrális meredekség (T) és részecskénti energia (E/N) alapján számszerű-

leg $c \approx 5,7$ -et ad, ami már jól egyezik a független elektron–pozitron ütközéses kísérlet $c = 5,8 \pm 0,5$ -ös eredményével. Eltávolítottuk a homokszemet (s ugyanakkor érvet találtunk az entrópiafogalom kiterjesztésének egy egyszerűbb változata mellett)!

A fenti trükk nem áll egyedül: elvileg egy sűrű anyagban, például kvark–gluon plazmában mozgó részecske energiája lehet más, mint a vákuumban mozgóé. A kölcsönhatások miatt az eredeti energia nem additív, ami viszont additív, az nem az eredeti részecskéket számolja. Az ilyen, közegbeli részecskét kvázirészecskének hívjuk.

A kvázirészecske energiája és impulzusa között nem a hagyományos összefüggés áll fenn. (Egy [tan]testület tagjaként más lehet valakinek a hatása, mint privát környezetben.)

A hosszú távra korrelált fluktuációk, amelyek miatt a termodinamika kiterjesztendő, más területeken is fellépnek. Fraktális diffúzió, üvegszerű szerkezetek rendeződése, galaxisok eloszlása, sőt a tőzsdei fluktuációk és a klímaváltozások is inkább Tsallis-, semmint Gibbs-eloszlást látszanak követni. Ezen rendszerek leírásának általános alapelveiből a jövőben még sokat tanulhatunk.

DIFFERENCIÁLIS ROTÁCIÓ AZ LQ HYDRAE FELSZÍNÉN

Kővári Zsolt

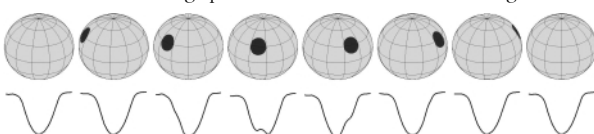
MTA Konkoly Thege Miklós Csillagászati Kutatóintézet

A csillagok felszínének részletes vizsgálata a csillagászat új kutatási területe, mely a nagyfelbontású spektroszkópia elterjedésével kezdődött alig két évtizede. A tudományterület történetének részletes feldolgozásával foglalkozott a közelmúltban Kővári (2002). A napfoltokhoz hasonló csillagfoltokat közvetlen módon nem láthatjuk, mivel még a legkorszerűbb távcsövek felbontóképessége is nagyságrendekkel elmarad attól, ami a közeli csillagok felszínének tanulmányozásához szükséges. Ezért a csillagok felszínét csupán közvetett módon tudjuk vizsgálni. Ezekről az indirekt rekonstrukciós módszerekről közöl összefoglalást Kővári és Oláh (1999).

A modern csillagfelszín-rekonstrukciós technikák – mint például a Doppler-képpalkotás – lehetővé teszik, hogy a csillagok felszínéről olyan térképeket készítsünk, amelyek segítségével részletesen tanulmányozható a csillagfoltok mérete, alakja, elhelyezkedése stb. Ha idősraba rendezett térképeket vizsgálunk, megláthatjuk, hogyan változik a felszín, következtethetünk arra, milyen folyamatok hozzák létre, illetve alakítják a csillag foltjait.

A Nap esetében a napfoltok felbukkanása a mágneses dinamóval magyarázható, melyet a differenciális rotáció (nem merevtestszerű forgás: a Nap az egyenlítőjénél forog a leggyorsabban, a pólusok felé haladva a forgási sebesség csökken) és a plazma konvektív áramlásai működtetnek. Mai tudásunk szerint hasonló mechanizmus hozza létre a mágnesesen aktív csillagokon a foltokat. A foltok időbeli változásának nyomon követése ugyanakkor lehetőséget teremt arra, hogy kimutassuk a csillagfelszíni differenciális rotációt. (Erre vonatkozó tapasztalatokról a Nap esetében már jóval korábban beszámoltak: például Maunder és Maunder 1905, Newton 1934 stb.)

1. ábra. Foltos csillag spektrumvonalának változása a forgás során.



A Doppler-képpalkotás alapjai

A pontforrásnak tekinthető csillag megfelelő spektrumvonalaiából álló sorozatot felhasználva rekonstruálható a csillag felszínének hőmérséklet-eloszlása. A módszer arra az egyszerű megfontolásra épül, hogy a forgó csillag különböző részeiről érkező fény eltérő Doppler-eltolódást szenved. A Doppler-képpalkotásként ismert technikát először Vogt és Penrod (1983) alkalmazták. Az eljárás alapja az a felismerés, hogy a fotoszférából eredő spektrumvonal alakja a forgás különböző fázisaiban a foltok miatt más és más. A spektrumvonalat eszerint tekinthetjük az aktuális kétdimenziós korong egydimenziós lenyomatának. Ennek illusztrációja látható az 1. ábrán, amelyen egy foltos csillag látható a tengelyforgás egymást követő fázisaiban, alatta pedig az adott pillanatban mérhető spektrumvonal.

2. ábra. A Doppler-képpalkotás alapelve.

