

# A SZIVÁRVÁNY FIZIKÁJA – III.

## Az esőcseppek fényszórási jelenségei

Cserti József  
Eötvös Loránd Tudományegyetem,  
Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

### Az egzakt leírás

#### Mie-elmélet

Az Airy-elmélet egyik dimenziótlan paramétere a  $kR$  mennyiség, ahol  $k = 2\pi/\lambda$  a fény hullámszáma. Az elmélet kielégítően magyarázza a szivárvány legfontosabb jellemzőit, ha  $kR \geq 5000$ . Látni fogjuk, hogy az Airy-elmélet eredményei ennél kisebb értékekre már eltérnek az egzakt számításoktól, azaz ha a vízcseppek mérete kisebb 0,1 mm-nél. Rögtön felmerül a kérdés, mit tekintünk egzakt megoldásnak? Meglepő módon, Airy 1838-as eredményeit követően, fél évszázadot kellett várni a válaszra. James Clerk Maxwell 1862-ben megjelent *On the Physical Lines of Force* című cikkében szerepelnek először a Maxwell-egyenletek. Ezen egyenletek alapján tetszőleges méretű és törésmutatójú gömb alakú anyag fényszórására elsőként 1890-ben Ludvig V. Lorenz [26], majd jóval később, tőle függetlenül, 1908-ban Gustav Mie [27] és egy évvel később henger alakú szóró testekre Peter J.W. Debye [28] vezetett le analitikus megoldást. Az irodalomban leggyakrabban – Lorenz és Debye nevét méltatlanul nem említve – az egzakt elméletet egyszerűen Mie-elméletnek nevezik.

A fizika számos területén felmerülő szórási problémának a matematikai részletei meglehetősen bonyolultak, ezért itt azokat nem ismertetjük. A Mie-elmélet matematikai részletei számos helyen megtalálhatók, mint például Born és Wolf könyvében [29], de egy tömör és jól követhető levezetés található Weiner és társai cikkében [30] is. A Mie-elmélet alapjairól magyar nyelvű összefoglalót László István tanulmányában [31], illetve a Mészáros Ernő által szerkesztett könyvben [32] találhat az olvasó. Az elmélet alapgondolata a következő: a forrásmentes esetben érvényes Maxwell-egyenleteket kielégítő  $\mathbf{E}$  elektromos és  $\mathbf{B}$  mágneses tereket kifejezhetjük egy  $\Psi$  skalárfüggvénnyel, amely teljesíti az alábbi Helmholtz-egyenletet:

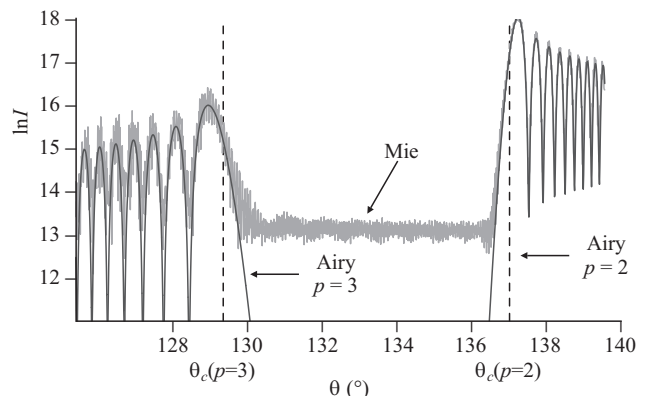
$$\nabla^2 \Psi + n^2 k^2 \Psi = 0. \quad (28)$$

A bejövő elektromágneses síkhullámot, a vízcsepp által szórt és a vízcseppben belüli elektromágneses tereket a problémához jobban illeszkedő gömbhullámok szerint sorfejtve, a sorfejtési együtthatókat a vízcsepp határfelületén érvényes peremfeltételekből határozhatjuk meg. A gömbhullámok szerinti sorfejtésről bővebben például Jackson könyvében [33] találhat az olvasó. Ismerve a sorfejtési együtthatókat (Mie-együtthatók), a tér bármely pontjában felírhatjuk az elektromos és a mágneses teret. Az eredmény egy végtelen sor összegeként áll elő. Ezt a megoldást tekintjük az egzakt megoldásnak. Az elektromágneses tér ismeretében kiszámíthatjuk az energiaáram-

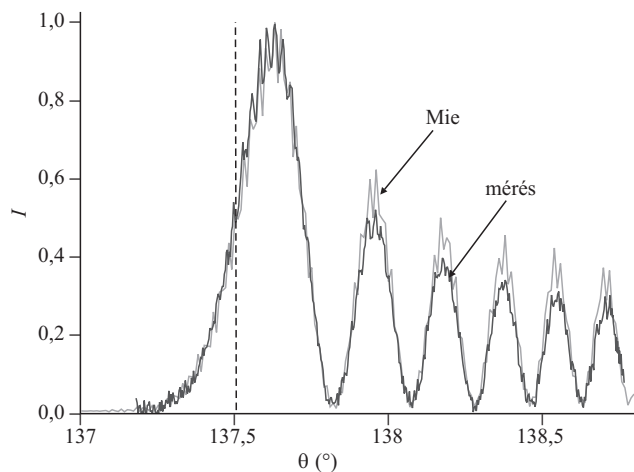
lásra jellemző Poynting-vektort, ebből pedig a szórt fény intenzitásának szögfüggését, illetve a differenciális szórási hatáskeresztmetszetet, ami különbözik az I. rész *A klasszikus szórási hatáskeresztmetszet* című alfejezetében ismertetett klasszikus differenciális szórási hatáskeresztmetszettől.

Annak ellenére, hogy a megoldás elvileg egzakt, numerikus szempontból csak az utóbbi évtizedekben, a számítógépes lehetőségek javulásával sikerült kezelni a problémát. Ennek fő oka, hogy a terek kiszámításához tipikusan  $kR$  számú, igen bonyolult tagot tartalmazó sort kell összegezni, amely ráadásul nagyon lassan konvergál. Ezért a nagyméretű vízcseppek numerikus vizsgálata gyakorlatilag lehetetlen volt hatékony számítógépek nélkül. Nem csoda, hogy a Mie-elmélet korábban nem kapott kellő figyelmet, illetve csak közelítő megoldások alkalmazására szolgált alapul. Ezeket a közelítő megoldásokat lényegében a Mie-elméletből nyert sor átrendezésével kaphatjuk. A szivárvány jelenségének jobb megértésében a közelítő módszerek és eredmények komoly szerepet játszottak és játszanak ma is. A számítógépek sokat segítettek, sőt talán nem merész az az állítás, hogy ezzel együtt az analitikus vizsgálatok egyre jobban háttérbe szorulnak. Nehéz megtalálni a bölcs középutat a két kutatási irányvonal között, hiszen sok esetben a számítógépes eredmények inspirálják a másik vonalon történő kutatásokat. A szivárványnak a Mie-elmélet alapján történő numerikus vizsgálatában számos próbálkozás történt a számítógépek megjelenése óta, melyek közül az egyik legfontosabb Wang és van de Hulst munkája [34]. Az ötletes numerikus módszerek alkalmazásával sikerült megbízhatóan pontos eredményeket kapniuk viszonylag kis gépidő mellett akár  $kR = 50000$  értéknél is. Így megnyílt az út a hatékony nu-

18. ábra. Az egzakt Mie- és az Airy-elmélet összehasonlítása főszivárvány ( $p = 2$ ) és mellékszivárvány ( $p = 3$ ) esetén. A számítás polarizálatlan, vörös színű fényre ( $\lambda = 650$  nm,  $n = 1,33$ ) és  $R = 1$  mm-re vonatkozik ( $kR = 9666,5$ ). A két függőleges vonal a (8) képletből számolt  $\theta_c(p=2) = 137,5^\circ$  és  $\theta_c(p=3) = 129,9^\circ$  szórési szögeknek felelnek meg a kétféle szivárványra. A jobb áttekinthetőség érdekében az intenzitások logaritmusát ábrázoltuk. Az intenzitást a 15. ábra feliratában adott egységekben számoltuk.



Az egyenletek, ábrák, táblázatok és irodalom számozása a többi részeken belsőkre való egyértelmű hivatkozás érdekében folyamatos.

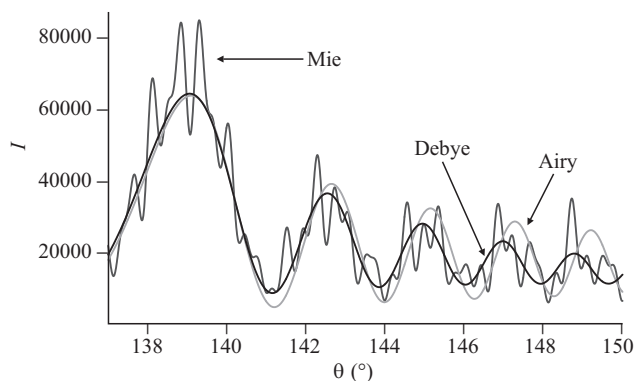


19. ábra. A mérési eredmény és az egzakt Mie-elmélet összehasonlítása főszivárvány ( $p = 2$ ) esetén. A számítás és a mérés polarizálatlan, vörös színű fényre ( $\lambda = 650 \text{ nm}$ ,  $n = 1,33$ ) és  $R = 1,82 \text{ mm}$ -re vonatkozik ( $kR = 17593$ ). A függőleges vonal a (8) képletből számolt  $\theta_c(p=2) = 137,5^\circ$  szórási szögnek felel meg. A mért és a számolt intenzitást az első csúcs intenzitásának egységében adtuk meg.

merikus vizsgálatok előtt, és azóta többféle programot is kifejlesztettek. Ma már egyszerű személyi számítógéppel is percek alatt kaphatunk eredményeket még  $kR > 50000$  esetén is. Egy ilyen programot már korábban használtunk [25] a 15. ábra kapcsán.

A 18. ábrán összehasonlítottuk az egzakt Mie- és az Airy-elmélet alapján kapott intenzitás szögfüggését fő- és mellékszivárványra, viszonylag nagyméretű vízcsepp esetén figyelembe véve a (13) polarizációs tényezőt is. Az ábrán a tájékozódás céljából berajzolt két függőleges vonal a (8) egyenlet alapján, a Descartes-elméletből számolt szórási szögeknek felelnek meg. Látható, hogy az Airy-közelítés nagyon jól egyezik az egzakt eredménnyel. Azonban két dolog szembetűnő az ábrán. Egyrészt az egzakt intenzitásgörbe az Airy-közelítésből nyert, sima szögfüggést mutató görbe körül gyorsan „oszcillál”. Másrészt az egzakt eredményhez tartozó intenzitás – ellentétben az Airy-elmélettel – véges (azaz nem zérus) értéket vesz fel az Alexander-féle sötét sávban. Igaz, hogy ez az érték körülbelül öt nagyságrenddel kisebb a főszivárvány első csúcsához tartozó intenzitáshoz képest, és így a gyakorlatban ez a tartomány valójában sötétnek tekinthető. Megmutatható, hogy az egzakt eredményben tapasztalható gyorsan oszcilláló viselkedés a 2. ábrán látható, a vízcsepről közvetlenül visszaverődő ( $p = 0$ ) és a főszivárvány kialakulásában szerepet játszó ( $p = 2$ ) fénysugarak interferenciájának a következménye [25, 35]. Az Alexander-féle sötét sávban megfigyelt véges nagyságú intenzitás is a  $p = 0$  fénysugarak szóródásából adódik, melynek magyarázatára a következő szakaszban térünk ki.

Összességében megállapíthatjuk, hogy viszonylag nagy méretű vízcseppek esetében az Airy-elmélet (eltekintve az Alexander-féle sötét sávot) jól írja le a fő- és mellékszivárványt és azok járulékos íveit. A két elmélet összehasonlításával kapcsolatos további részleteket például Lee munkájában találhat az olvasó [36]. Végül megjegyezzük, hogy ma már a kísérleti eredményeket nem az Airy-elmélet jóslataival, hanem az egzakt Mie-elmélettel vetik össze, és jó egyezést találtak [30].



20. ábra. Az egzakt Mie-, a Debye- és az Airy-elmélet összehasonlítása főszivárvány esetén ( $p = 2$ ). A számítás polarizálatlan, vörös színű fényre ( $\lambda = 650 \text{ nm}$ ,  $n = 1,33$ ) és  $R = 0,05 \text{ mm}$ -re vonatkozik, a polarizációs tényezőt is figyelembe véve. Ebben az esetben  $kR = 483,3$ . Az intenzitást a 15. ábra feliratában adott egységekben számoltuk.

A 16. ábrán látható mérési elrendezés alkalmas vízcseppeken történő fény szórásának a mérésére is. A kísérleteket Hubn Andrásné végezte el. A mérési eredmény és a Mie-elmélet összehasonlítása a 19. ábrán látható.

## A Debye-sor

A fejezet bevezetőjében említettük, hogy Debye is tanulmányozta a Maxwell-egyenletek alapján a fény szóródását, csak ő hengeres szóró testre végezte el a számításait. Természetesen azóta már kidolgozták a Debye-elméletet gömb alakú közegre is. A matematikai részleteket illetően Hovanec és Lock [37], illetve Rubinow [38] cikkét ajánlhatjuk. A legfontosabb különbség a Mie-elmélet és Debye eredménye között az, hogy Debye az intenzitás szögfüggését egy *kettős* sor alakjában adta meg. A Debye-sorban az egyik összegzés a Mie-elméletben is szereplő gömbhullámokra, míg a másik összegzés a vízcseppben belüli hurok  $p$  számára történik. Az első összeg a Mie-elmülethez hasonlóan lassan konvergál, de a  $p$  szerinti összeg, fizikailag is várható módon, gyorsan konvergál minden gömbhullámra. A Mie-elmélet és a Debye-sor azonos eredményt ad, ha az összegzést minden  $p$ -re elvégezzük. A Debye-sor előnye, hogy azonosítani lehet a különböző  $p$ -hez tartozó járulékokat, és így jobban megérthetjük a szórási mechanizmust. Numerikusan ezeket a járulékokat például Philip Laven programjával tanulmányozhatjuk [25]. A programot használva a 20. ábrán látható az egzakt Mie-elmélet, és  $p = 2$  esetben a Debye-sor, illetve az Airy-közelítés alapján számolt intenzitás szögfüggése  $R = 0,05 \text{ mm}$  sugarú vízcseppre. Jól látszik, hogy  $kR < 500$ -ra az Airy-közelítés a szórási szög növekedésével már jelentősen eltér az egzakt Mie-elmélet eredményétől. Ugyanígy látható, hogy a Debye-sor  $p = 2$  tagja sem elegendő az egzakt eredmény reprodukálásához. Az Airy-közelítés eltérései kisméretű vízcseppekre abból adódnak, hogy a  $p > 2$ -nek megfelelő szórási folyamatokat az elmélet elhanyagolja.

Hasonló módon, a program alapján könnyen megmutathatjuk, hogy egyrészt a Debye-sor  $p = 0$  tagja állandó értéket ad az intenzitás szögfüggésére az Alexander-féle sötét sávban, másrészt ez a konstans érték a megfelelő paraméterek mellett megegyezik a 18. ábrán tapasztalt

véges nagyságú intenzitással (eltekintve az egzakt eredményben látható kis oszcillációktól). A következő két szakaszban a szivárvánnyal kapcsolatos két fontos optikai jelenséget értelmezzük a Debye-sor alapján.

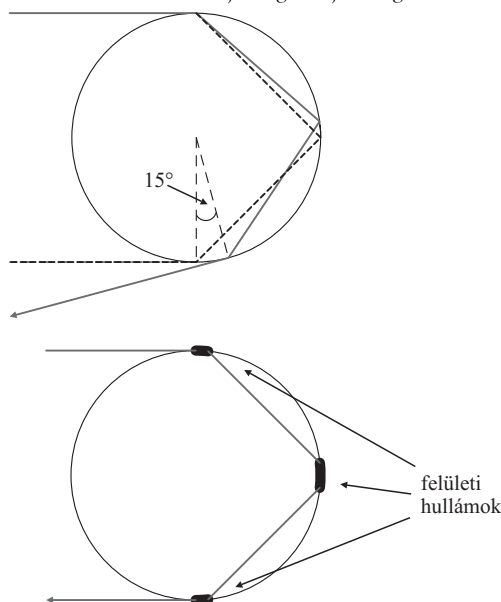
### A koszorú mint fényelhajlási jelenség

A koszorújelenséget (angolul *corona*) akkor figyelhetjük meg, ha a Nap (vagy a Hold) vékony felhőrétegen süt át. A koszorúról például [39] internetcímen találunk kitűnő felvételt. A Nap körül egy fényes, kör alakú udvart látunk, melyet gyakran további színes gyűrűk vesznek körül. A koszorú a viszonylag kis méretű vízcseppeken ( $R < 0,01$  mm) vagy más szórócentrumokon való kis szórási szögnek ( $\theta < 10^\circ$ ) megfelelő fényszóródás következménye. Ekkor a Naptól érkező fénysugarak a vízcsepp mint akadályon elhajlanak. A Nap körüli koszorút szabad szemmel nem láthatjuk (illetve nem is célszerű a szemünk óvása érdekében), mert a Nap közvetlen fénye elnyomja a koszorút. De ha kitarjuk a koszorú középső részét, vagy ha az egésznek egy vízfelületről visszaverődő képét nézzük, akkor a gyűrűk már könnyebben megfigyelhetők. A Hold esetében a gyengébb fényerő miatt a megfigyelés sokkal egyszerűbb („udvara” van a Holdnak).

A jelenség hasonló a fénysugaraknak kör keresztmetszetű akadályon történő elhajlásához, melynek matematikai részletei megtalálhatók például *Jackson* könyvében [33], illetve a Landau-sorozat II. kötetében [21]. Minél kisebb a szórócentrum mérete, annál nagyobb a koszorú átmérője. Ismeretes, hogy a nagyobb hullámhosszú fény nagyobb szögben hajlik el. Ezért a koszorú belső gyűrűje kékes színű, míg kívül barnás.

A Debye-sor segítségével megérthetjük a koszorújelenséget. A sor  $p = 0$  tagja nemcsak a 2. ábrán látható, a vízcsepről közvetlenül visszaverődő fénysugarak járulékát,

21. ábra. A felső ábrán a szaggatott vonalnak megfelelő sugármenet a geometriai optika szerint tiltott. Ugyanakkor a folytonos vonallal jelölt sugármenetre a  $\theta^* = 165^\circ$  szórási szög nem adhat lényeges járulékot a glória létrejöttéhez. Az alsó ábrán a vízcsepp felülete mentén haladó felületi hullámokkal értelmezhetjük a glória jelenségét.



hanem a vízcseppben történő elhajlást is tartalmazza [37]. Numerikus számításokkal megmutatható, hogy a koszorújelenség intenzitásának szögfüggésében a Debye-sor  $p = 0$  és  $p = 1$  tagjai adják a legjelentősebb járulékat [25, 35]. *Nussenzweig* terjedelmes, kétrészes cikkében [40] részletes számításokkal is kimutatta, hogy a koszorújelenség jó közelítéssel leírható e két tag figyelembevételével. Azonban a matematikai részletek meglehetősen bonyolultak.

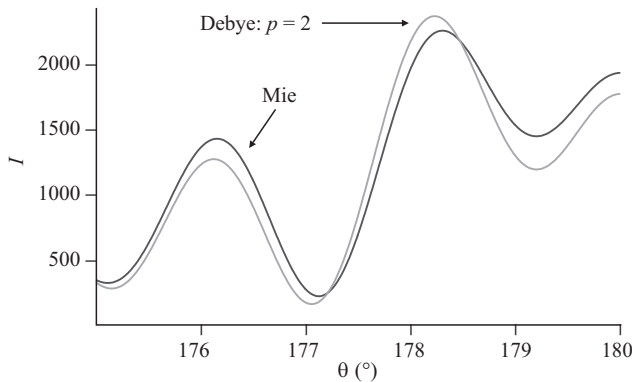
Mivel a koszorú jó közelítéssel egy elhajlási jelenség, a koszorú a szórócentrum anyagától függetlenül is kialakulhat. Nem függ a törésmutatótól sem, és nem szükséges, hogy a szórócentrum átlátszó legyen. A szórócentrum lehet például kicsi jégzemcse, pollen, vulkáni por vagy más szennyező részecske is. Az egyik legismertebb koszorújelenséget a Krakatau vulkán 1883-as kitörése után lehetett megfigyelni, a sztratoszférába került, és ott több éven át lebegő, nagy mennyiségű vulkáni por következtében. A gyűrűk feltűnően nagyméretűek ( $15^\circ$ ) és különösen színpompásak voltak. További részleteket a koszorújelenségről az olvasó a fent említett hivatkozásokból tudhat meg.

### A glória, avagy a felületi hullámok

A glória egy másik gyakran megfigyelt légköri fényjelenség. A glóriáról számos kitűnő felvétel található az interneten [41]. A fénysugaraknak vízcseppben történő szórásakor a glória körülbelül a  $170^\circ < \theta < 180^\circ$  szórási szögterületben figyelhető meg. A glória mint légköri optikai jelenség akkor tapasztalható, ha a megfigyelő egy magas ponton áll (például hegy tetején), és nézi a saját árnyékát, amely az előtte lévő felhőre vetődik. Ekkor a fejének árnyéka körül egy fényes, esetleg több, színes gyűrűt lát. Ha több megfigyelő áll egymás mellett, akkor mindenki csak a saját fejének árnyéka körül látja a glóriát, de a szomszédjában már nem. Ez is azt jelenti, hogy a glória a  $180^\circ$  szórási szög körül alakul ki.

A glóriáról az első feljegyzés a spanyol *Antonio de Ulloa* kapitánytól származik 1735-ből, aki tudományos expedíciót vezetett Peruban az Andok hegységben. Ilyen jelenség megfigyelésénél  $kR$  átlagos értéke tipikusan 200, és így a vízcseppek átlagos sugara  $R = 0,02$  mm. A gyűrűk színének sorrendje azonos az előző szakaszban tárgyalt koszorúban lévőhöz. Manapság repülőgépen számos olyan fényképfelvétel készült, amelyen a gép árnyéka körüli színes gyűrűk, a glória jól kivehető. Örömmel állíthatom, hogy legutóbbi repülőgépes utamon néhány pillanatig magam is láttam ilyen glóriát.

A glóriát csak a 21. ábra bal felén látható szaggatott vonallal jelölt, elképzelt sugármenettel magyarázhatnánk, de ez a geometriai optika alapján nem lehetséges. Az ábrán a folytonos vonalnak megfelelő, érintőleg bejövő sugármenetre a szórási szög az (5) képlet alapján  $n = 1,33$  törésmutató esetén és a sugármenet egyszeres belső visszaverődése mellett  $\theta^* = 165^\circ$ . Ez a szögérték  $15^\circ$ -kal kevesebb a teljes visszaszóráshoz szükséges  $180^\circ$ -os szögnél, ami a szaggatott vonallal jelölt sugármenetnek felel meg. Így ez a sugármenet nem adhat magyarázatot a glória jelenségére. A megoldást a *felületi hullámok* jelentik. A felületi hullámok jól ismertek például az elektromágneses



22. ábra. Az egzakt Mie-elméletből és a Debye-sor  $p = 2$  tagjából számolt intenzitás szögfüggése a glóriának megfelelő szögtartományban. A számítás polarizálatlan, vörös színű fényre ( $\lambda = 650$  nm,  $n = 1,33$ ) és  $R = 0,01$  mm-re vonatkozik, a polarizációs tényezőt is figyelembe véve. Ebben az esetben  $kR = 96,7$ . Az intenzitást a 15. ábra felirátában adott egységekben számoltuk.

hullámok terjedésekor [33], de hangterjedésnél is megfigyelhetők. A 21. ábra jobb felén látható, a vízcsepp peremén haladó, felületi hullámok révén a sugármenet szórási szöge már elérheti a glóriához szükséges  $180^\circ$ -os szöget. A felületi hullámok éppen a teljes visszaverődés határszögének közelében a legerősebbek. Ezért lehetséges, hogy az ábrán látható sugármenet lényeges járulékot eredményezhet a teljes visszaszórás folyamatában.

A Mie-elmélet alapján kiszámolhatjuk az intenzitás szögfüggését a glória esetében is, de ez nem ad magyarázatot a jelenség okára. Azonban a Debye-sor segítségével ellenőrizhetjük, hogy vajon a fenti fizikai magyarázat helytálló-e. A 22. ábrán összehasonlítottuk az egzakt Mie-elmélet alapján számolt intenzitás szögfüggését, és a Debye-sor  $p = 2$  tagjából adódó járulékot a  $175^\circ < \theta < 180^\circ$  szórési szögtartományban. Jól látható, hogy a két eredmény elég jól egyezik a maximumok és minimumok helyét illetően. Még jobb egyezés érhető el, ha figyelembe vesszük a  $p > 2$  tagokat is a Debye-sorban. Numerikus vizsgálatokból kiderül, hogy ebben a szögtartományban az intenzitáshoz a legnagyobb járulékok a Debye-sor  $p = 0, 2, 6, 7, 11$  tagjaiból származnak. Ahogy korábban említettük, a Debye-sorban minden  $p$ -nek megfelelő tag tartalmaz még egy gömbhullámok szerinti összegzést, és ez az összeg felel meg esetünkben a felületi hullámoknak. Az ábra alapján látható, hogy a felületi hullámokra alapozott fizikai kép kielégítően magyarázza a glória jelenségét.

Nussenzeig analitikusan is tanulmányozta a glóriát a korábban már idézett két cikkében [40]. Hovanec és Lock részletesen elemezték a szivárványnál fellépő felületi hullámok szerepét [37, 38]. Laven munkáiban még további részletek és szép, színes képek találhatók a glóriáról [25, 35].

## A szivárvány és a kvantummechanika kapcsolata

A kvantummechanikai szórásproblémát a *Schrödinger-egyenlet* megoldásával kezelhetjük. Speciálisan választott szórópotenciál esetén a Schrödinger-egyenlet alakja megegyezik az elektromágneses tér szórását meghatározó (28) egyenlettel. Tekintsünk egy  $R$  sugarú és  $V_0$  „mélységű”

gömb-szimmetrikus „potenciálgödört” (ez egy olyan potenciál, amelyre  $V = 0$ , ha  $r > R$ ;  $V = -V_0$ , ha  $r < R$ )! Ekkor könnyen beláthatjuk, hogy a  $k$  hullámszámú síkhullámmal jellemzett,  $m$  tömegű és  $E = \hbar^2 k^2 / (2m)$  energiájú részecske szórását meghatározó Schrödinger-egyenlet és a (28) egyenlet azonos, ha az utóbbi esetben a közeg törésmutatóját az alábbi módon választjuk meg:

$$n = \sqrt{1 + \frac{2mV_0}{\hbar^2 k^2}}. \quad (29)$$

A kvantummechanikai szórás egyik alapvető feladata, a klasszikus szórási problémához hasonlóan, a hatáskelesztmetset meghatározása. A  $\psi = e^{ikz}$  síkhullámmal adott,  $z$  irányban terjedő szabad részecske hullámfüggvénye a szórócentrumon történő szóródás után, a szórócentrumtól távol, aszimptotikusan a következő alakú

$$\psi \approx e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr}, \quad (30)$$

ahol  $f(\theta)$ -t *szórásamplitúdó*-nak nevezzük, és a második tag egy kifutó gömbhullámnak felel meg. Ekkor a differenciális szórási hatáskeresztmetszet  $d\sigma/d\theta = 2\pi \sin\theta |f(\theta)|^2$  [42]. Így a problémát visszaveztük az  $f(\theta)$  szórásamplitúdó meghatározására. Az egzakt  $f(\theta)$  szórásamplitúdó kifejezhető parciális gömbhullámok szerinti sor összegeként. A sor tagjait a Schrödinger-egyenlet megoldásából kaphatjuk meg, ami azonban a legtöbb esetben meglehetősen nehéz feladat. A kvantummechanikai szórásról kitűnő fejezet található a Landau-sorozat III. kötetében [42].

Síkhullámok szórásakor gyakran találkozunk azzal az esettel, amikor létezik egy  $\theta_c$  szórési szög, amelynél a differenciális szórási hatáskeresztmetszet hirtelen változik. Ekkor klasszikus esetben, a szivárványhoz hasonlóan, beszélhetünk „megvilágított” tartományról, illetve „árnyéktartományról”. Az ilyen kvantummechanikai szórás, a szivárványnál fellépő fényszórással való hasonlóság miatt, gyakran *szivárványszórás*-nak is nevezik. Az egzakt  $f(\theta)$  szórásamplitúdó sora rendkívül lassan konvergál a  $\theta_c$  szórési szög közelében, ezért közelítésekre van szükség a hatáskeresztmetszet kiszámításához. A vizsgált  $\theta$  szórési szögtől függően három, alapvetően különböző közelítés ismert a szivárványszórásra: i) a *klasszikus*, ii) a *kváziklasszikus* és iii) az *Airy-közelítés*.

A klasszikus közelítésnél az egzakt hatáskeresztmetszet kifejezésében a gyorsan oszcilláló tagok sima részét véve visszakapjuk a klasszikus hatáskeresztmetszetnek a (9) képlettel adott alakját. A matematikai részletek iránt érdeklődő olvasónak a Landau-sorozat III. kötetében a 127. fejezetet ajánljuk [42]. Az egzakt hatáskeresztmetszet klasszikus közelítése  $|\theta - \theta_c|$  nagy értékeire érvényes, és a hatáskeresztmetszet szinguláris a  $\theta_c$  szórési szögnél. Fényszórás esetén a klasszikus közelítés a Descartes-elméletnek felel meg. Kváziklasszikus közelítésben a részecske de Broglie-hullámhossza nem változik jelentősen a vele azonos nagyságrendű távolságokon [42]. A hatás-

keresztmetszet ugyancsak szinguláris a  $\theta_c$  szórési szög-nél, és a közelítés nagy  $|\theta - \theta_c|$  értékekre jó. Az Airy-közelítést szivárványszórásra először Ford és Wheeler alkalmazták [43]. Ez akkor ad jó eredményt, ha  $|\theta - \theta_c|$  csak néhány fok. A hatás keresztmetszet kiszámításánál a kváziklasszikus közelítésből indultak ki, és az  $f(\theta)$  szórásamplitúdót  $\theta$  szerint a  $\theta_c$  szórési szög körül harmadrendig sorfejtve közelítették. A hatás keresztmetszetet végül egy Airy-függvénnyel lehet kifejezni a korábban látott fényszóráshoz hasonlóan. Innen ered az Airy-közelítés elnevezés. A számítás menete magyarul is megtalálható a Landau-sorozat III. kötetében a 612. oldalon a 2. kidolgozott feladat kapcsán [42].

A fentiekben vázolt eltérő közelítések oka, hogy a  $\hbar \rightarrow 0$  klasszikus határesetben az  $f(\theta)$  szórásamplitúdó aszimptotikusan  $\hbar^{1/2}$  hatványai szerinti sor, ha  $|\theta - \theta_c|$  nagy, míg  $\hbar^{1/3}$  hatványai szerinti sor, ha  $|\theta - \theta_c|$  kicsi. Felmerült az igény egy olyan közelítésre, amelyik minden szórési szögre jól használható. Ezt a közelítést *uniform közelítésnek* nevezik. A differenciálegyenletek közelítő megoldásaira az uniform közelítés már ismert volt, és a fizikában gyakran előforduló differenciálegyenletekre a formulák megtalálhatók az irodalomban [23]. A kvantummechanikai szórás esetén az  $f(\theta)$  szórásamplitúdó kifejezhető egy komplex síkon értelmezett integrállal. Ebben az esetben az  $f(\theta)$  függvény uniform közelítésére először Berry vezetett le általános formulákat [44]. Optikai szivárványra, a kvantummechanikai szóráshoz hasonlóan, Khare és Nussenzevig alkalmazta először az uniform közelítést [45]. Kiderült, hogy mind a kvantummechanikai, mind az optikai szórás problémájában az uniform közelítésből számolt hatás keresztmetszet minden szórési szögre nagyon jól egyezik az egzakt számolásból kapott eredményekkel. Végezetül megemlítjük, hogy az optikai esetben ismert koszorú- és glóriajelenségekhez hasonlóan a kvantummechanikában is létezik ez a szórástípus, és *glóriaszórásnak* nevezik. Kváziklasszikus közelítésből kiindulva Ford és Wheeler tanulmányozta először a glóriaszórást [43], de a számítás lépései megtalálhatók a Landau-sorozat III. kötetében a 613. oldalon a 3. kidolgozott feladatban is [42].

## Összefoglalás

Arisztotelész óta több neves fizikus tanulmányozta az egyik legismertebb és legszebb légköri jelenséget, a szivárványt. A szivárvánnyal kapcsolatos jelenségek egzakt tárgyalása nem nélkülözheti mindazt a tudást, amit a fényről tudunk. Az optika tudományának fejlődésében mindig nagy szerepet játszottak az újabb elméletek alkalmazásai a szivárvány leírásában. De fordítva is igaz, a szivárvány jelenségének pontosabb értelmezése is befolyásolta optika fejlődését.

Ebben a munkában a szivárvány fizikájának legfontosabb elméleteit ismertettük. Az első fejezetben a *Descartes*-tól származó első, alapjaiban helyes, geometriai optikára épülő elméletet taglaltuk. A második fejezetben ismertettük *Young* és *Airy* elméleteit, amelyek egyrészt további bizonyítékokat szolgáltattak a fény hullámtermé-

zetére, másrészt a szivárvány mélyebb megértésében is nagy szerepet játszottak. A következő fejezetben a szivárvány egzakt, úgynevezett Mie-elméletét vázoltuk, és a különféle közelítésekről, a koszorú-, illetve glóriajelenségekről adtunk egy áttekintést. Az utolsó fejezetben rámutattunk a szivárvány és a kvantummechanikai szórás közti hasonlóságra.

A szakmai részletek mellett történetileg is megpróbáltuk követni a századok során elért eredményeket. Természetesen nem gondolhatjuk, hogy a témát teljesen kimerítettük. Arra törekedtünk, hogy a bemutatott anyag megfelelő válogatással felhasználható legyen mind a középiskolai, mind az egyetemi képzésben. Külön ki szeretnénk emelni, hogy tudásunk szerint például az Airy-elmélet részletei hiányoznak a hazai irodalomból (még az egyetemi oktatásban sem említik!). Az egzakt Mie-elmélet is csak összefoglaló jelleggel szerepel a hazai meteorológusképzésben [32].

Nem szoltunk az ég kék színét magyarázó *Rayleigh-szórásról* annak ellenére, hogy a jelenséget a Mie-szórás egy speciális esetének tekinthetjük. A Rayleigh-szórás olyan jelenségeket ír le, amelyben a szórócentrum mérete kisebb a fény hullámhosszánál. Kitűnő összefoglaló található a témával kapcsolatban Jackson könyvében [33] és a Landau-sorozat VIII. kötetében [16].

A valóságban megfigyelhető szivárvány létrejöttében több olyan tényező is szerepet játszhat, amelyekkel az itt felsorolt elméletek egyike sem számol. Ilyen például az, hogy a Nap nem pontszerű fényforrás, a látószöge körülbelül  $0,5^\circ$ . A vízcseppek mérete különböző, sőt alakjuk eltérhet az ideális gömbalaktól. A vízcseppek mérete és alakja összetett módon befolyásolja a szivárvány színeinek erősségét és ívének alakját. A nagy és lapos vízcseppek okozta szivárványt annak ívének alján látjuk fényesebbnek, míg a szivárvány tetejéről jövő fénysugarak a kicsi, gömb alakú vízcseppeken való szóródásból származnak. Kérdéses a víz törésmutatójának a fény hullámhosszától való függése is. Bizonytalanságot jelent a napsugárzás intenzitásának hullámhosszfüggése is. Nem részleteztük a szivárvány színességével kapcsolatos problémákat sem. A fenti problémák legtöbbjét laboratóriumi körülmények között ki lehet küszöbölni. A szivárvány kísérleti vizsgálatának is nagy az irodalma, és ezek közül is több cikk foglalkozik olyan demonstrációs kísérletek ismertetésével, amelyek felhasználhatók az oktatásban is [14, 30, 46, 47]. Nem beszéltünk a ködben, erdő fái közt megfigyelhető, vagy a vízfelszínről visszatükröződő szivárványokról. Ezeket a hiányosságokat pótolandó, összegyűjtöttünk néhány internetcímet, ahol mindezekről, illetve a szivárványról sok-sok színes képpel illusztrált anyagot, további részleteket találhat az érdeklődő olvasó [25, 48].

## Köszönetnyilvánítás

Köszönetemet szeretném kifejezni *Dávid Gyulának*, *Geszti Tamásnak*, *Gnädig Péternek*, *Haiman Ottónak*, *Horváth Gábornak*, *Huhn Andrásnének*, *Kis-Szabó Krisztiánnak*, *Pályi Andrásnak*, *Pollner Péternek*, *Tichy Gézának* és *Weidinger Tamásnak* a kézirat olvasása után javasolt hasznos tanácsaikért. Hálas vagyok Philip Lavennek a levelezésünk nyomán nyújtott segítségéért. Külön köszönöm, hogy *Les Cowley*, *Jonathan Lansey*, *Richard Fleet*, *Karl Kaiser*, *Matt Spinetta* engedélyt adott a hátsó borítón látható képek megjelenésére.

## Irodalom

26. L.V. LORENZ: *Upon the Light Reflected and Refracted by a Transparent Sphere* – Vidensk. Selsk. Skrifter 6 (1890) 1–62, dán nyelvű.
27. G. MIE: *Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen* – Ann. Phys., Leipzig 25 (1908) 377–445
28. P. DEBYE: *Der Lichtdruck auf Kugeln von beliebigem Material* – Ann. Phys., Leipzig 30 (1909) 57–136
29. M. BORN, E. WOLF: *Principles of Optics* – Pergamon Press, New York, 1989 (6. javított kiadás)
30. I. WEINER, M. RUST, T.D. DONNELLY: *Particle size determination: An undergraduate lab in Mie scattering* – American Journal of Physics 69 (2001) 129–136
31. LÁSZLÓ I.: *A részecskék sugárzás-szórásának fizikai törvényszerűségei* – Meteorológiai Tanulmányok 33 (1979) 27
32. BENCZE P., MAJOR GY., MÉSZÁROS E.: *Fizikai Meteorológia* (szerk.: Mészáros E.) – Akadémiai Kiadó, Budapest, 1982.
33. J.D. JACKSON: *Klasszikus elektrodinamika* – Typotex, Budapest, 2004.
34. RU.T. WANG, H.C. VAN DE HULST: *Rainbows: Mie computations and the Airy approximation* – Applied Optics 30 (1991) 106–117
35. P. LAVEN: *Simulation of rainbows, coronas and glories by use of Mie theory* – Applied Optics 42 (2003) 436–444
36. R.L. LEE, JR.: *Mie theory, Airy theory, and the natural rainbow* – Applied Optics 37 (1998) 1506–1519
37. E.A. HOVENAC, J.A. LOCK: *Assesing the contributions of surface waves and complex rays to far-field Mie scattering by use of the Debye series* – J. Opt. Soc. Am. A 9 (1992) 781–795
38. S.I. RUBINOW: *Scattering from a penetrable sphere at short wavelengths* – Annals of Physics, N. Y. 14 (1961) 305–332
39. <http://www.sundog.clara.co.uk/droplets/corona.htm>
40. H.M. NUSSENZVEIG: *High-frequency scattering by a transparent sphere. I. Direct reflection and transmission; High-frequency scattering by a transparent sphere. II. Theory of the rainbow and glory* – Journal of Mathematical Physics 10 (1969) 82–124; 125–176
41. <http://www.sundog.clara.co.uk/droplets/glory.htm>  
<http://www.sundog.clara.co.uk/droplets/gloim1.htm>
42. L.D. LANDAU, E.M. LIFSHITZ: *Elméleti Fizika III (Kvantummechanika)* – Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
43. K.W. FORD, J.A. WHEELER: *Semiclassical description of scattering* – Annals of Physics, N. Y. 7 (1959) 259–286
44. M.V. BERRY: *Uniform approximation for potential scattering involving a rainbow* – Proc. Phys. Soc. 89 (1966) 479–490
45. V. KHARE, H.M. NUSSENZVEIG: *Theory of the Rainbow* – Physical Review Letters 33 (1974) 976–980
46. H.A. DAW: *A 360° rainbow demonstration* – American Journal of Physics 58 (1990) 593–595
47. A.J. COX, A.J. DEWEERD, J. LINDEN: *An experiment to measure Mie and Rayleigh total scattering cross sections* – American Journal of Physics 70 (2002) 620–625
48. <http://www.sundog.clara.co.uk/atoptics/phenom.htm>  
<http://my.unidata.ucar.edu/content/staff/blynds/rnbw.html>  
[http://www.usna.edu/Users/oceano/raylee/RainbowBridge/Chapter\\_8.html](http://www.usna.edu/Users/oceano/raylee/RainbowBridge/Chapter_8.html)  
<http://hjem.get2net.dk/Hemmingsen/Rainbow/>  
<http://www.phy.ntnu.edu.tw/java/Rainbow/rainbow.html>  
<http://www.rfleet.clara.net/gbh/gbhindex.html>

# EINSTEIN ELŐADÁSAI A STATISZTIKUS MECHANIKÁRÓL 1917 ŐSZÉN – JEGYZETEK EGY KÉZIRAT MARGÓJÁRA

Hajdu János

Kölni Egyetem, Elméleti Fizikai Intézet, Németország

*Albert Einstein* az 1917/18-as téli félévben csütörtökönként előadásokat tartott a berlini egyetemen *Statistikus Mechanika* címmel. A feltehetően tizenöt hétre tervezett kurzus utolsó harmada Einstein megbetegedése miatt elmaradt. A megtartott tíz előadást egy Berlinben éppen katonai szolgálatot teljesítő – és később ott mint gimnáziumi tanár tevékenykedő – hallgató, *Walter Zabel* (1892–1968), gyorsírással rögzítette. Az alábbi széljegyzetek az ebből készült, az interneten hozzáférhető [1] kézírathoz kapcsolódnak.

## Történelmi és személyi körülmények

1917 őszen és 1918 tavaszán a központi hatalmak a nyugati frontokon ugyan kisebb térnyeréseket vívtak ki, de tartalékaik messzemenően kimerültek. Sem a „kiélesített” búvárhajóharc (az „utolsó adu”), sem az oroszországi forradalmat követő fegyverszünet a keleti fronton nem váltotta be a hozzá fűzött stratégiai reményeket. 1918. augusztus 14-én a legfelső katonai vezetés kinyilatkoztatta, hogy a háború folytatása reménytelen [2]. Einstein, miután 1913-ban a porosz tudományos akadémia rendes tagjává választotta és az (1911-ben alapított) Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft egy újonnan alapítandó fizikai intézet igazgatójának nevezte ki, 1914 tavaszán (családját hátrahagyva) Zürichből Berlinbe költözik [3]. Mint kutatóprofesszor előadásokat tart az ottani egyetemen, és rendszeres résztvevője a híres berlini fizikai kollokviumnak.

A háború kitörése pillanatától aktív pacifista: nyilvánosan elítéli a háborút, támogatja a háborúellenes mozgalmakat [4]. A nyomozó körülmények dacára tudományos alkotóereje töretlen, sőt most éri el csúcspontját: 1916–17-ben publikálja alapvető értekezéseit az általános relativitáselméletéről, illetve ennek kozmológiai alkalmazásáról, valamint a fény spontán és indukált emissziójáról (Einstein-koeficiensek). 1917. december végén megbetegszik (sárgaság, gyomorfekély), s 1920-ig tart, míg visszanyeri egészségét. Unokanővére – későbbi második felesége – ápolja. Talán neki köszönheti, hogy életben marad [5]. Orvosai szigorú diétát írnak elő, ami a fővárosban, ahol súlyos élelmiszer- (és tüzelőanyag-) hiány uralkodik, csak a vidéki ismerősök segítségével teremthető elő. Élelmiszercsomag érkezik Münchenből is, *Arnold Sommerfeld*-től [6]. Ha kellemes is lehetett a betegágy melege a rosszul fűtött lakásban, Einstein minden bizonnyal nyugtalankodott a sürgős elintézésre váró feladatok miatt; az 1917-ben megnyílt fizikai intézet kutatómunkájának beindítása, *Max Planck* 60. születésnapjára (1918. április) tervezett ünnepségek megszervezése (ami reá mint a német fizikai társulat búcsúzó elnökére hárult) és a zürichi egyetemen vendégprofesszorként tartandó előadásainak (1918–20) kidolgozása.

Úgy tűnik, Einstein szerteágazó tevékenységei miatt az 1917/18-as *Statistikus Mechanika* kurzus valamelyest a háttérbe szorult. Erre utalnak különböző hiányosságok, különösen az irodalom feldolgozása terén. Einstein álláspontjának explicit szembesítésére *Boltzmann* és *Gibbs* felfogásával sajnos szintén nem került sor.

A következőkben a statisztikus mechanika kibontakozásának és Einstein idevágó munkáinak rövid összefoglalása után ismertetjük az 1917/18-as kurzus jegyzetét és kísérletet teszünk Einstein akkori álláspontjának körvonalázására.