

Fizikai Szemle

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A Matematikai és Természettudományi Értesítőt az Akadémia 1882-ben indította
A Matematikai és Physikali Lapokat Eötvös Loránd 1891-ben alapította

LIX. évfolyam

7–8. szám

2009. július–augusztus

A FIZIKA AXIOMATIZÁLÁSÁRÓL

Hraskó Péter
Pécsi Tudományegyetem,
Elméleti Fizika Tanszék

A geometria, majd pedig az aritmetika axiomatizálásának két és félezer éves története a tudománytörténet egyik legambiciózusabb vállalkozása volt, amelyre csak a legnagyobb tisztelettel nézhetünk fel. Miért van az, hogy a fizikusok mégis inkább bizalmatlanul, mint elismeréssel tekintenek azokra a kollégáikra, akik a fizikában is ezt az utat akarják követni?

Az ok a fizika és a matematika tárgyában, feladatában és – ennek következtében – módszereiben rejlő fundamentális különbségekben keresendő. Ez annak ellenére van így, hogy a fizika a legpéldaszerűbben matematizált ága a természettudományoknak. Az alábbiakban ezekre a mélyenfekvő különbözőségekre próbálok majd rámutatni.

Mielőtt azonban ehhez hozzáfognék hangsúlyoznom kell, hogy axiomatikus módszerrel nem csupán azt értjük, hogy feltevéseket teszünk, és ezekből korrekt matematikai eljárással következtetéseket vonunk le. Ezt természetesen a fizikában is így csináljuk. Az axiomatikus módszer lényege máshol van, abban például, hogy egy axiomatizált elméletben vizsgálni illik az axiómák egymástól való függetlenségét és a rendszer ellentmondás-mentességét, és az axiómákon valamint az axiómákból levezetett tételeken kívül semmit sem szabad a bizonyításnál felhasználni. Az ezzel járó tömör szűkszavúság az axiomatikus tárgyalásmód jellegzetes ismérve. Az axiomatizálást ellenző elméleti fizikusok szerint az így értett axiomatikus módszer az, aminek nincs helye a fizikában.¹

¹ C. W. Kilmister és J. E. Reeve *Rational Mechanics* című könyvükben (Longmans, 1966) a newtoni mechanikát hét kiinduló feltevése alapozzák. Ezeket axiómáknak nevezik, és az elnevezéshez a könyv 50. oldalán ezt a megjegyzést fűzik: „Az axiómák kiválasztásánál nem törekedtünk arra, hogy minimális számú egymástól független axiómánk legyen; még ha ez lehetséges lenne is, nem biztos, hogy különösebben hasznos volna. A fő szempontunk az volt, hogy az olvasók elfogadhatónak találják őket és a kívánt eredményre vezessenek.”

A fizika alapfeltevései nem tekinthetők axiómáknak

Mindenekelőtt arra a különbözőségekre mutathatunk rá, ami a matematikai és a fizikai ismeretek *legitimációjában* fedezhető fel (hogy ezt a divatos politológiai kifejezést használjuk). Ez a különbözőség abból származik, hogy a matematika sajátos tárgyát a gondolkodás törvényszerűségei, a fizikáét pedig a „külvilág” törvényszerűségei képezik. Ebből következően az ismeretek igazolási módja (vagyis azon kritériumok természete, amelyek alapján elfogadjuk őket), a matematikában *belső*, a fizikában *külső*. Úgy gondolom, ezek a jelzők elég világosan utalnak rá, mire gondolok, mégis hasznos lehet egy konkrét példa.

A 18–19. század folyamán egyre nagyobb pontossággal igazolták, hogy minden test súlyos és tehetetlen tömege – a test anyagi minőségétől függetlenül – egyenlő egymással. Egy piros és egy fehér biliárdgolyó tehetetlen tömege akkor egyenlő egymással, ha centrális ütközésnél a nyugvó piros golyó teljesen átveszi a fehér golyó sebességét, és ezért a fehér golyó az ütközés után megáll. A súlyos tömegük pedig akkor egyenlő, amikor a rugósmérleg mindkettőnél ugyanazt a súlyt mutatja. A két megfigyelés egymástól teljesen eltérő természetű, mégis mindig igaz, hogy ha az egyik kísérlet szerint a tömegek egyenlőnek bizonyultak, akkor a másik kísérlet szerint is egyenlők egymással.

A newtoni fizika nem nyújtott semmiféle magyarázatot erre a meglepő tapasztalati tényre, a rejtélyt csak *Einsteinnek* sikerült tisztáznia. Einstein megoldása az volt, hogy *posztulálta* a kétfajta tömeg egyenlőségét, erre a posztulátumra felépített egy teljesen új gravitációelméletet, amelynek struktúrája olyan, hogy a testeknek *egy és ugyanazon* paramétere jelenik meg mindkét kísérlet leírásában. Az új elmélet nézőpontjára

ból ezért fel sem merülhet annak lehetősége, hogy ez két paraméter – a newtoni fizika súlyos és tehetetlen tömege – különbözzön egymástól.

Állítsuk most párhuzamba ezt a valódi fizikus-történetet egy kitalált matematikus-történettel. A súlyos és a tehetetlen tömeg egyenlőségének még megoldatlan problémáját feleltessük meg annak az „empirikus” ténynek, hogy bármely páros szám felbontható két prímszám összegére (*Goldbach-sejtés*). Tegyük fel most, hogy valaki úgy oldja meg ezt a rejtélyt, ahogy Einstein tette a kétfajta tömeggel: *posztulálja*, hogy minden egész szám felírható két prímszám összegeként. Ezután annak érdekében, hogy ez biztosan ne mondjon ellent az aritmetikának, az aritmetika Peano-féle axiómarendszerét sikeresen helyettesíti egy másik ugyancsak ellentmondásmentes axiómarendszerrel, amelynek egyik axiómája éppen az, hogy az egész számok között nincsenek olyanok, amelyek nem állíthatók elő két prímszám összegeként.

A példa matematikai része mesterkéltséget, de úgy gondolom, tényleg van hasonlóság a valódi fizikai és a kitalált matematikai szituáció között. Azonban biztosan lényegesen különböznek abban, hogy mikor tekintjük a javasolt megoldást elfogadhatónak.

Az általános relativitáselmélet esetében az olyan tapasztalati tények perdöntőek, mint a Merkúr perihélium-vándorlása, a fénysugár elhajlása a Nap körül, és természetesen az, hogy a feltevésnek nincs egyetlenegy olyan következménye se, amely végzetesen ellentmondana a tapasztalatnak.

A matematikai példában a javaslat mellett vagy ellen nem lehet érvelni azzal, hogy tapasztalatilag igaz-e vagy sem, mert ez a kritérium axiómákra nem alkalmazható. Itt csak arról lehet szó, hogy elég érdekes és tartalmas séma építhető-e fel az új axiómákra ahhoz, hogy a matematikusok cikkeket írassanak róla. Gondoljunk csak meg: amikor *Bolyai* és *Lobachevskij* az euklideszi V. posztulátumot az ellenkezőjével cserélte fel, nem azért teremtett ezzel „új világot”, mert kiderült, hogy fizikai világunkban az új geometria érvényes. Az új világnak csak a *logikai lehetőségét* mutatták meg, mégis méltán nevezhetjük felfedezésüket korszakalkotónak, teljesen függetlenül attól, hogy a fizikai világ geometriája euklideszi vagy sem. Ma úgy tudjuk, hogy a Világegyetem nagyléptékű geometriája *lehet* Bolyai-geometria,² de erre végső soron a súlyos és a tehetetlen tömeg tapasztalati egyenlősége vezetett rá.

Ez az oka annak, hogy a súlyos és a tehetetlen tömeg einsteini feltételezését semmiképpen sem tekinthetjük axiómának, ha nem akarunk ezzel a kifejezéssel visszaélni, vagyis teljes jelentés-udvarával (összes konnotációjával) együtt fogjuk fel. Az axióma fogalmába *ma már* beletartozik, hogy szabadon választható, mert nem meghatározott objektumok tulajdonságát fejezi ki, azaz nincs *jelentése*. *Eukleidész*nél még

volt, de ez a felfogás mára már teljesen elavult. Az axiomatikában ma már nem sajátos tárgyak természetéről, hanem a bizonyítások struktúrájáról, *bizonyítás-elméletéről* van szó. *Bertrand Russel* frivol megjegyzése szerint „a tiszta matematika olyan tudomány, amelyben sem azt nem tudjuk, hogy miről beszélünk, sem azt, hogy igaz-e, amit mondunk.”³

Egy fizikai kijelentés ezzel szemben csak akkor érdekes, ha tudjuk, mire vonatkozik, és következményei falszifikálhatók (vagyis létezik olyan kísérlet, amelynek alapján eldönthető, hogy igaz-e). *Ezért* súlyosan félrevezető axiomatizálást ígérni a fizikában a szó teljes értelmében.⁴

A fontosság mérlegelésének szükségessége

Az axiomatizálás kérdéskörével szorosan összefügg, hogy a fizikában az alapfeltevésekkel egyenlően fontos szerepet játszik a *feltevések alkalmazhatóságának mérlegelése* a különböző konkrét esetekben.⁵ Nem arról van szó, hogy a rendszerint kis számú felkínálható feltevés közül melyiket válasszuk, hanem arról, hogy egy konkrét alapfeltevés alkalmazható-e a szóbanforgó fizikai szituációban vagy sem. Vagyis arról kell folyamatosan dönteni, hogy a körülmények kusza halmazában melyik az a néhány összetevő, ami *fontos*.

A bizonyításelméletben ilyesmi nem fordulhat elő. Azon természetesen el lehet gondolkozni, hogy egy bizonyítás adott szakaszában melyik axiómát célszerű alkalmazni, de arról szó sem lehet, hogy szubjektív mér-

³ Mint már szó volt róla, az axiomatikus módszerhez nemcsak az tartozik hozzá, hogy csak az lehet tétel, amit az axiómákból lehet levezetni a transzformációs szabályok alapján, hanem az ellentmondás-mentesség analízise is. Ennek egyik legfontosabb eljárása a *modellezés*. Ha objektumok egy halmazáról sikerül megmutatni, hogy realizálják az axiómarendszer összes axiómáját, akkor az axiómarendszer nem lehet önellentmondó, mert ezek a tárgyak léteznek, és *a létezőben nincs ellentmondás*. A matematikában ennek a módszernek a hatékonysága elég korlátozott, mert az igazán érdekes esetekben nem lehet „tárgyakkal” realizálni egy axiómarendszert, hanem csak legfeljebb egy másik axiómarendszerrel. De még így is érdekes eredményeket lehet kapni. *Klein* és *Poincaré* ezzel a módszerrel mutatta meg, hogy a Bolyai-geometria ellentmondásmentes, ha az euklideszi az, *Hilbert* pedig a Bolyai-geometria ellentmondás-mentességét az aritmetika ellentmondás-mentességére vezette vissza.

A fizika számára a „létezőben nincs ellentmondás” elvből az következik, hogy ha a fizika a tapasztalat folyamatos kontrollja alatt fejlődik, vagyis a kísérleti eredmények „visszaigazolják” az elgondolások helyességét, akkor nem szükséges még külön gondoskodni az ellentmondás-mentességről, hiszen ekkor a természet maga az elmélet létező modellje.

⁴ A fizikai feltevéseket legfeljebb a *posztmodern* (teljesebb nevén az *ismeretelméleti szkeptícizmus*) nézőpontjából tekinthetjük önkényesen választható axiómáknak. Ez az ókorig visszanyúló felfogás ugyanis azt vallja, hogy a természet minden lehetséges „olvasata” egyenértékű egymással. A modern tudomány *módszertani szkeptícizmus*a azonban megcáfolja ezt a véleményt.

⁵ Lehet-e a földgolyót pontszerűnek tekinteni? A fizikában még ezt is teljesen abszurd feltételezést is elfogadjuk annak érdekében, hogy a Kepler-törvényeket levezethessük a newtoni gravitációelméletben vagy az általános relativitáselméletben. De ha a Föld forgástengelyének lassú precesszióját is meg akarjuk érteni, akkor már nem tekinthetjük a Földet tömegpontnak. Akkor pedig végképp nem tehetjük ezt meg, ha Buda egyik végéből Pest másik végébe kell utaznunk.

² A ma elfogadott álláspont szerint a megfigyelések az euklideszi teret favorizálják a két másik lehetőséggel, a háromdimenziós gömbbel és a háromdimenziós Bolyai-térrel szemben.

legelés alapján döntsük el, mikor érvényes egy axióma, mikor nem. Egy olyan axióma ugyanis, amely nem tartalmazza egyértelműen alkalmazhatóságának feltételeit, hiányosan van megfogalmazva (nem axióma).

A fizika alapfeltevéseivel viszont mindig pont ez a helyzet, mert lehetetlen egyértelműen körülhatárolni azokat a természeti körülményeket, amelyek mellett egy feltevés érvényes. Ezt minden esetben mérlegelni kell, és a döntés nem mindig könnyű. Meggyőződés, hogy a mérlegelés aktusában van redukálhatatlan összetevő, és ennek következtében a természettudomány működése nem formalizálható. Ezért amikor valaki azt állítja magáról, hogy axiomatikus fizikát űz, ezzel akarva-akaratlanul azzal hiteget, hogy megszabadít a fontosság mérlegelésének kényszerétől, ez pedig semmiképpen sem lehet igaz (és ráadásul egyáltalán nem is vonzó perspektíva, hiszen a mérlegelés a fizikusság egyik legélvezetesebb tevékenysége).

Folyamodjunk megint egy fizikatörténeti példához. 1824-ben jelent meg *Sadi Carnot* könyve a „Carnot-ciklusról”. Carnot a perpetuum mobile lehetetlenségének meggyőződéses híve volt, de még a hőanyagelmélet (kalorikum) talaján állt. Ez a korszakalkotó munkája is a hőanyagelméleten alapult.

Carnot elméletének fő eredménye az volt, hogy a hőerőgépek működtetéséhez két hőtartályra van szükség: egy magas és egy alacsony hőmérsékletűre. Így érvelt: ha egy hegyi tó potenciális energiájának egy részét mozgási energiává akarjuk átalakítani, lehetővé kell tennünk, hogy a víz alacsonyabb szintre zuhanjon. Ha a lezúdult víz potenciális energiája a magasabb szinten U_1 volt, az alacsonyabb szinten pedig U_2 , akkor maximálisan $U_1 - U_2$ mozgási energiára tehetünk szert, tehát a maximális hatásfok $(U_1 - U_2)/U_1$ -gyel egyenlő.

Carnot „mérlegelte ezt a dolgot” és úgy találta, hogy ez a mechanikai képlet alkalmazható a hőanyagra is, ha potenciális energián a hőmérsékletet értjük, és ezzel felfedezte a termodinamika máig érvényes formuláját, amely szerint a hőerőgépek maximális hatásfoka $(T_1 - T_2)/T_1$.

Huszonöt évvel később *William Thomson* (a későbbi *Lord Kelvin*) is „mérlegelte a dolgot” és még mindig a hőanyagelmélet alapján rámutatott, hogy Carnot kihagyott egy fontos (!) szempontot. Amikor a víz lezúdul a hegyről és közben vízimalmot hajt, kisebb sebességgel érkezik a völgybe, mint amikor nincs ott a vízimalom. Carnot elképzeléséből ez az elem hiányzik, ezért rosszul „mérlegelte a helyzetet”, analógiája sántít. Thomson kritikája helyénvalónak bizonyult, Carnot gondolatmenete ma már csupán fizikatörténeti kuriózum.

Egy bizonyításméleten csiszolódott elme ebből a történetből könnyen levonhatja azt a következtetést, hogy a fizika egyszerűen összevissza beszéd, amire csak a gyengeelméjűségnek kijáró elnézéssel lehet tekinteni, vagy – legjobb esetben – tragikomédia.⁶ De ez súlyos félreértés. Ami itt történt, az *maga volt a*

⁶ C. A. Truesdell: *The Tragicomical History of Thermodynamics, 1822–1854*. New York: Springer-Verlag, 1980.

működő fizika, Ember és Természet birkózásában a „fogáskeresés” stádiuma, amely elkerülhetetlen kezdeti szakasz a természettudományban, amikor új területre merészkedik.⁷ Ha sikerülne megtisztítani a fizikát ettől a „termékenyen zavaros” gondolkozásmódtól, akkor biztosan a halálát okoznánk.



Tény azonban, hogy éppen a termodinamika az a területe a fizikának, ahol talán a legerősebb volt a törekvés az axiomatizálásra. A hő, ami a kalorikum helyébe lépett, a hőanyagnál sokkal nehezebben felfogható entitás. A hőanyaggal ellentétben ugyanis a testekben nincs meghatározott mennyiségű hő, a termodinamikában mégis folyamatosan ennek a nemlétező valaminek a változásáról van szó. Vagy vegyük a reverzibilis folyamat fogalmát, ami alapvető, csak éppen nem lehet megvalósítani.

Teljesen érthető az a remény, hogy az axiomatikus módszer bevetésével esetleg nagyobb világosságot lehet teremteni. Folyamatosan történtek ilyen próbálkozások. Az első és talán legismertebb a *Constantin Carathéodory* (1909), amelyet később *Max Born* népszerűsített. Ha azok a másodlagos források, amelyekből erről a próbálkozásról olvastam, igazat beszélnek, Carathéodory nagyon különös módon fogott hozzá a feladatához.

Azt a kérdést tette fel, hogy vajon hogyan jutnának el a hő és a hőmérséklet fogalmához a „disztermiás” gondolkozó lények, akiknek egyáltalán nincs hőérzetük. Ezután megmutatja, milyen kísérletek azok, amelyek – logikus gondolkozást föltéve – végül is elkalauzolják őket ezekhez a fogalmakhoz.

Disztermiás fizikusaink véletlenül rájöhetnek, hogy ha speciális falú edényt készítenek, amely dugattyúval van ellátva, akkor az edénybe töltött gáz nyomása nem változik meg, akármilyen közegbe mártják is bele: akár forrásban levő vízbe (nem tudják, hogy nagyon meleg!), akár olvadó jégbe (nem tudják, hogy nagyon hideg!). Aztán készítenek hasonló edényt olyan anyagból is, amelyben a gáz nyomása függ attól, hogy milyen közegbe tették. Az első edényt elnevezik adiabatikusnak, a másodikat diatermikusnak... Carathéodory megmutatta, hogy ezen az úton is el lehet jutni a termodinamikához.

Biztosan igaza volt, de milyen általános érvényű tanulság vonható le mindebből? Az, hogy érzékszerveink csak akadályoznak abban, hogy a természetet megértsük? Esetleg az optikát is akkor értenénk meg jobban, ha vakok lennénk? A fizikában valójában rengeteg olyan entitással van dolgunk, amelyek az érzékszerveink számára hozzáférhetetlenek, ezért a Carathéodory által elképzelt szituáció nagyon is gyakori. Az elektromos és a mágneses tér közvetlen érzékelése nincs alkalmas érzékszervünk, mégis van elektrodinamikánk. Vajon nehezebb lett volna a Maxwell-

⁷ Ugyanezt a „fogáskeresést” figyelhetjük meg a maghasadás felfedezésének a történetében is (lásd az *Epizódok a maghasadás felfedezésének történetéből* című cikkemet a *Természet Világa* 2004. I. különszámában).

egyenleteket megtalálni, ha a költöző madarakhoz hasonlóan mi is tudnánk közvetlenül érzékelni a mágneses teret?

Talán helyénvaló, ha idézek abból a magnós interjúból, amelyet *Frenkel Andor* készített 2004-ben *Tisza László*val Bostonban. Az interjú idején Tisza volt az egyedüli olyan élő szemtanú, aki a 20-as évek második felétől kezdve közelről figyelhette a fizika nagy eseményeit. 1934 és 1937 között Harkovban „inaskodott” *Lev Davidovics Landaun*ál (aki egyébként egy évvel fiatalabb volt nála). Ezzel az inaskodással kapcsolatban tette fel Tiszának Frenkel a kérdést, hogy választott-e Harkovban magának egy konkrét problémát, amin dolgozott. Tisza válasza ez volt⁸:

„A témaválasztásnak rituális rendje volt. Először is mindenkinek le kellett vizsgáznia a »teorminimum«-ból, amelyet később »Landau-minimum«-nak neveztek. Erre egy tematikai összefoglaló alapján készülhettünk fel. Kérhettem volna, hogy tegyenek velem kivételt, de nem kértem. Landau minden sikeres vizsgázó pályáját figyelemmel kísérte. Az élete végéig vezetett listán az ötödik vagyok – az egyetlen külföldi. Az anyagot részterületekre osztották, és mindegyikből szóbeli vizsgát kellett tenni Landaunál. Matematikából és klasszikus mechanikából felmentett, az első vizsgát termodinamikából kellett letennem. Rögtön bajba kerültem. Mint már említettem, Max Born-tól tanultam termodinamikát. Landau felfogása nem is különbözhetett volna jobban Bornétól. Born Carathéodory szellemében fektette le az alapokat. Önéletrajzából tudjuk, hogy az alapelvet ő javasolta Carathéodorynak. Mint már említettem, úgy találta, hogy Carathéodory dolgozata túlságosan elvont a fizikusok számára, és három cikkből álló sorozatot írt, amelyben az elméletet emészthetőbbé tette. Ezt a változatot adta elő azon a kurzuson, amelyikre jártam.

Born szerint a termodinamika gyönyörű, de a fizikának tökéletesen kidolgozott ága volt; Landau úgy látta, hogy folyamatosan fejlődik. Ennek megfelelően Landau lebontotta azokat a határokat, amelyeket Born emelt, amikor ezt a területet mindentől el akarta választani. A Born-féle termodinamika klasszikus, és nem kapcsolódik sem a statisztikus fizikához, sem a kvantummechanikához. Landau szerint a termodinamika statisztikus és kvantum, fejlődésben lévő diszciplína. A vizsgán fogalmam sem volt, miről beszél, meg is buktam. A csoport egyik tagja, *Pjatigorszkij* megszánt, és kölcsönadta a Landau-féle termodinamika rövid összefoglalóját. El voltam ragadtatva tőle, és le is tettem a vizsgát.”

David Hilbert

David Hilbert nemcsak a matematikában képez külön fejezetet, hanem a fizika axiomatizálásának területén is.

Az elméleti fizika rengeteget köszönhet a matematikus Hilbertnek. Kettőt emelnék ki ezek közül. Elő-

ször is a lineáris integrálegyenletek elméletében elért eredményeit, ezen belül a Hilbert-tér fogalmának megalkotását, amely a kvantumelmélet matematikai apparátusának alapját képezi. A másik terület a variációs elvek és módszerek. Itt Hilbert talán legjelentősebb eredménye a fizika számára az általános relativitáselmélet téregyenletének származtatása egy egyszerű variációs elvből.

Hilbert körülbelül két évtizeden keresztül, nagyjából 1900 és 1920 között folyamatosan foglalkozott fizikával, rendszeresen tartott egyetemi kurzusokat a fizika különböző ágairól. Előtte a geometria axiomatizálásának területén publikált jelentős eredményeket (az euklideszi axiómarendszert öntötte modern formába), utána pedig a bizonyításelmélet róla elnevezett formalista felfogását dolgozta ki. Egyáltalán nem meglepő, hogy közben a fizika axiomatizálására is jelentős erőfeszítéseket tett.

Egy Tel Aviv-i tudománytörténész, *Leo Corry* az utóbbi tízegynéhány évben kritikai vizsgálat alá vette Hilbertnek a fizika axiomatizálásával foglalkozó dolgozatait. A konklúzióit 2004-ben egy könyvben publikálta.⁹ Az alábbiakban Corry következtetéseit foglalom össze dióhéjban.

Hilbert axiomatizálási törekvései kiterjedtek a fizika összes fontos területére (mechanika, statisztikus fizika, termodinamika, elektrodinamika). Valószínűleg Born és Carathéodory is innen merítették az indítást a termodinamika axiomatizálására. Hilbert, amikor a fizika axiomatizálásáról írt vagy beszélt, ezt a kifejezést az axiomatikus módszer matematikában elfogadott értelmében használta, és úgy állította be a dolgot, hogy a fizikában pontosan ugyanolyan cél vezet, mint az euklideszi geometria sikeres axiomatizálásánál. Corry konklúziója szerint azonban a két axiomatizálás semmiképpen sem mérhető össze egymással. Hilbert ezt sohasem ismerte el, pedig sokszor kényszerült rá, hogy a bírálatok hatása alatt az axiómáit átfogalmazza. Az is előfordult, hogy a későbbi séma ellentmondott a korábbinak, de Hilbert ezt következetesen tagadta.

A bírálatok időnként igencsak hevesek voltak. Ez különösen a hőmérsékleti sugárzás axiomatizálása kapcsán dokumentálható. 1913-ban Hilbert úgy ítélte meg, hogy *Kirchhoff* nevezetes törvényének¹⁰ igazolása nem üti meg a szigorúság elvárható mértékét, és azt állította, hogy axiomatikus alapon szigorú bizonyítást adott rá.

Hilbert bizonyítása azonban indulatos reakciót váltott ki annak a berlini kísérleti csoportnak a tagjaiból, akiknek a mérései alapján vezette be bő tíz évvel korábban *Max Planck* a róla elnevezett *b* állandót. A

⁹ Leo Corry: *Hilbert and the Axiomatization of Physics (1898–1918)*. Dordrecht: Kluwer, 2004.

¹⁰ Emlékeztetek a Kirchhoff-törvényre: minden test elnyeli a rá eső elektromágneses sugárzás egy részét és maga is képes ilyen sugárzást kibocsátani. Ezeket a tulajdonságokat két koeficienssel, az *A* abszorpció és az *E* emissziós koeficienssel lehet jellemezni, amelyek anyagról anyagra erősen változnak. *Arányuk* azonban univerzális, és csak a hőmérséklettől valamint a hullámhossztól függ.

⁸ *Természet Világa* 2004/4.

csoport véleményét *Ernst Pringsheim* fogalmazta meg cikk formájában. A bíráló lényege az volt, hogy Hilbert olyan feltevéseket fogad el axiómaként, amelyeket a fizikusok szerint bizonyítani kell,¹¹ és ugyanakkor olyan irányban általánosít, ami a fizikusok szerint érdektelen. Mint látható, a vita tényleg arról szólt, hogy a jelenségekben ki mit tart *fontosnak*. A fizikában ez elkerülhetetlen, és aláaknáz minden axiomatizálási kísérletet.

Volt Hilbert fizikájának egy csendes bírálója is, aki csak magánlevélben tett elmarasztaló észrevételeket: Albert Einstein. Már említettem, hogy Hilbertnek maradandó érdemei vannak az általános relativitáselmélet variációs elvként történő megfogalmazásában. Van egy kitűnő könyv, *A modern gravitációelmélet kialakulása* (szerzője *V. P. Vizgin*, magyarul is megjelent *Illy József* fordításában), amely mintaszerűen elemzi Hilbert hozzájárulását az általános relativitáselmülethez.¹² Itt most a kérdésnek csak egyetlen aspektusát emelem ki: Vizgin megerősíti Einstein véle-

¹¹ Például azt, hogy a sugárzás külön-külön minden hullámhosszon egyensúlyban van önmagával. Kirchhoff törvénye az előző lábjegyzetben idézett formájában erre az esetre vonatkozik. Amikor a falak szórják a fényt és/vagy fluoreszkálnak, a Kirchhoff-törvény gyengébb formában érvényes (lásd Landau, Lifsic: *Statistikusi fizika* kötetében a *Fekete sugárzás* című fejezetet).

¹² *W. Isaacson* nemrég megjelent Einstein-életrajzában (Alexandra, 2009) újonnan előkerült dokumentumokat is felhasznál arra, hogy tisztázza Hilbert szerepét az általános relativitáselmélet létrejöttében.

ményét, hogy Hilbert – miközben tökéletesen megértette a probléma matematikai oldalát – az elmélet fizikai tartalmát súlyosan félreértette. Vizgin (és egyébként Corry is) hivatkozik Einstein 1916-ban *Hermann Weyl*hez írott leveléből az alábbi sorokra, amelyeket az utolsó mondat miatt idézek:

„Gyerekesnek tűnik Hilbertnek az anyagra vonatkozó föltevése, olyan gyerekre gondolok, aki nem ismeri a világ álnokságát... Semmiképp sem lehet helyeselni, hogy a relativitási posztulátumból következő komoly megfontolásokat az elektron vagy az anyag fölépítésére vonatkozó ily kockázatos és alaptalan föltevésekkel zavarjanak össze. Készséggel elismerem, hogy az elektron szerkezetére vonatkozó alkalmas föltevés, illetve Hamilton-függvény felkutatása ma az elmélet egyik legégetőbb feladata. Az »axiomatikus módszer« azonban aligha segíthet.”



Befejezésül újra aláhúzom, hogy a fizikában az egyes törvények alkalmazását mindig megelőzi annak mérlegelése, hogy a vizsgált jelenség szempontjából a megfigyelés konkrét körülményei között milyen hatásokat kell lényegesnek, illetve lényegtelennek tekinteni. Az axiomatizálás erről eltereli a figyelmet, mert az egzaktság illúzióját nyújtja. Ezzel fontos igényt elégít ki: a *bizonyosság* utáni vágyat. Lehet, hogy gyakran ezért élük meg az axiómarendszerek kidolgozói *inzultusként* a bírálatot. Ez a reakció még egy Hilbert méretű zseninél is megfigyelhető.

KVANTUM FŐNIX – HULLÁMCSOMAG-DINAMIKA AZ INTERNETEN

Vancsó Péter, Biró László Péter, Márk Géza István
MTA Műszaki Fizikai és Anyagtudományi Kutatóintézet
Nanoszerkezetek Osztály

A kvantummechanika ismerete alapvető fontosságú, hogy megértsük a körülöttünk lévő természetet, annak működését. Az elektronok mozgásának, az atomok és molekulák tulajdonságainak leírásához a klasszikus fizika törvényei (már) nem elegendők. Habár az a mikroszkopikus méret- és időtartomány, amelyben a kvantummechanika törvényei érvényesek, távol esik emberi világunk méret- és időskálájától, ez a tudomány mégsem csupán a kutatók birodalma. A 21. század elején az embereket a mindennapokban körülvevő modern technikai eszközök [1] – például tranzisztor, lézer – működésének megértésénél is nélkülözhetetlenek a kvantummechanikai ismeretek. Ezeknek az ismereteknek az átadása az oktatás feladata, legyen szó középiskolai vagy egyetemi szintű oktatásról [2].

A kvantummechanika oktatása az egyik legnehezebb feladat a fizika tanítása folyamán, mivel a diákok túl absztraktnak, matematikailag túl bonyolultnak tartják [3]. Ez érthető is, ha végiggondoljuk, hogy a

klasszikus fizika fogalmkörének és törvényeinek megértésénél segítségünkre vannak mindennapi tapasztalataink, mindenki által könnyen elvégezhető kísérletek. Ezzel szemben a kvantummechanika mérettartományában végzett mérések többnyire közvetettek és nehezen értelmezhetők.

Matematikai szempontból ahhoz, hogy klasszikus mechanikai leírását adjuk egy részecske (tömegpont) mozgásának, 6 paramétert kell megadnunk: $\mathbf{r}(t)$ és $\mathbf{p}(t)$, azaz a hely és a lendület x , y és z komponensét az idő függvényében. Ezek határozzák meg a többi dinamikai változót, például az energiát. A Newton-törvények ismeretében kiszámíthatjuk az $\mathbf{r}(t)$ és $\mathbf{p}(t)$ függvények értékeit minden pillanatra, ha ismerjük a függvények értékét valamely tetszőleges t_0 kezdeti pillanatban, azaz adottak az $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ és $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(t_0)$ kezdeti hely- és lendületértékek, továbbá ismerjük a részecskére ható erőket. A kvantummechanikai leírás mód ennél bonyolultabb. A részecske állapotát t pillanatban egy hullámfüggvény adja meg, $\Psi(\mathbf{r}, t)$, amely