

ÜTKÖZÉSEK ELEMZÉSE ENERGIA-IMPULZUS DIAGRAMOKKAL II. – A RELATIVISZTIKUS RAKÉTA

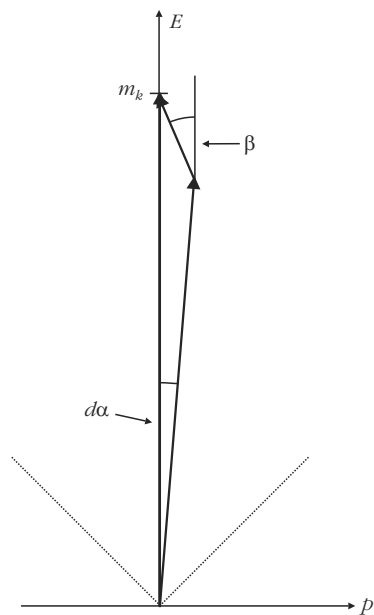
Bokor Nándor
BME Fizika Tanszék

Ebben a cikkben olyan járművet nevezek rakétának, amely állandó ütemben, magához képest állandó u sebességgel hajtógázt bocsát ki hátrafelé, és így hajtja magát előre. Egy rakéta akkor relativisztikus, ha a sebességek – a hajtógázé vagy a rakétáé vagy mindkettőé – a fénysebességgel összemérhetőek. (A cikk-

Köszönetemet fejezem ki *Hraskó Péter*nek hasznos javaslataiért.

ben végig $c = 1$ egységeket használok [1]. A sebességek ennek megfelelően dimenzió nélküli számok, amelyek csak (-1) és 1 közötti értékeket vehetnek fel; a tömeg, impulzus és energia pedig ugyanabban az egységben mérendő.)

A gyorsítási folyamat során a rakéta tömege folytonos ütemben csökken (hiszen hajtógáz formájában tömeget lövell ki). Az alapprobléma: meghatározni a



1. ábra

rakéta végsebességét adott kezdeti/végső tömegarány mellett. A probléma szokásos tárgyalásmódjában a gyorsítási folyamatot „időben visszafelé lejátszott rugalmatlan ütközések sorozataként” fogjuk fel. Minden kis „rugalmatlan ütközési” fázisban a rakéta kis sebességnövekményre tesz szert. Gondosan végzett összegzéssel – azaz integrálással – kapható meg a végsebesség [2].

Szemléltető erejénél fogva egy jó ábra gyakran sokkal jobban fejleszti fizikai intuíciónkat, mint egy hosszadalmas, tisztán algebrai számolás. Milyen szemléltetőeszközt nyújthat a rakéta probléma tárgyalásához az ütközések elemzésénél már hasznosnak bizonyult energia-impulzus diagram [1]? Hogyan lehet a rakéta gyorsuló mozgását ábrázolni egy ilyen diagramon?

Nézzük az 1. ábrát! Az m_k kezdeti tömeggel rendelkező, nyugalomban levő rakéta éppen elindul. Az első kis adag hajtógáz (amelynek energia-impulzus vektora a kis felső vektor) kilövellése által a rakéta tömege kicsit csökken (energia-impulzus vektora egy kisebb m értékű hiperbolára illeszkedik, ahogy az ábrán látható), és kis sebességnövekményre tesz szert (energia-impulzus vektora kicsit bedől az E -tengelyhez képest).

A 2. ábra a folyamat egy későbbi lépését ábrázolja. A rakéta ekkor már jóval kisebb tömegű (ezt megint abból lehet látni, hogy energia-impulzus vektora egyre kisebb m értékű hiperbolára illeszkedik), de már nagy sebességgel rendelkezik. Az ábráról le is olvasható ez a pillanatnyi sebesség:

$$V = \tan \alpha. \quad (1)$$

Kérdés: Mi a 2. ábrára felvázolt szaggatott görbe egyenlete? Azaz: milyen görbét ír le a gyorsítási folyamat közben a (csökkenő tömegű, növekvő sebességű) rakéta energia-impulzus vektorának csúcsa az E - p diagramon?

A fizikai elvek, amelyeket a kérdés megválaszolásához felhasználunk, a következők:

1. az energia- és impulzus-megmaradás minden kis hajtógázadag kilövellésekor (ezt már ki is használtuk az 1. és 2. ábrák konstruálásakor, hiszen két vektor összegeként szerkesztettük meg a hajtógázadag kilövellése előtti teljes energia-impulzus vektort).

2. a hajtógáz a rakétához képest állandó sebességgel távozik; a külső megfigyelő (akinek nézőpontját az E - p diagram tükrözi) a relativisztikus sebesség-transzformációt kell hogy használja a hajtógáz sebességének megállapításához.

A 2. pontban leírtak szerint az éppen kilövelt kis hajtógázadag $u = \tan \beta$ sebességét a relativisztikus sebesség-transzformációs képlet adja meg:

$$\tan \beta = \frac{u' - V}{1 - u' V} = \frac{u' - \tan \alpha}{1 - u' \tan \alpha}, \quad (2)$$

ahol u' (= konstans) a hajtógáz rakétához képest mért – másképpen: a rakétával éppen együttmozgó inerciarendszerben mért – sebessége.

(Az egyszerűbb geometriai áttekinthetőség kedvéért mind α -t, mind β -t pozitív számértékűnek választottam. Ennek megfelelően u' -t is pozitív számnak vettem. E választásnak csak annyi következménye lesz, hogy az alább szereplő (4) differenciálegyenletben megjelenik egy negatív előjel.)

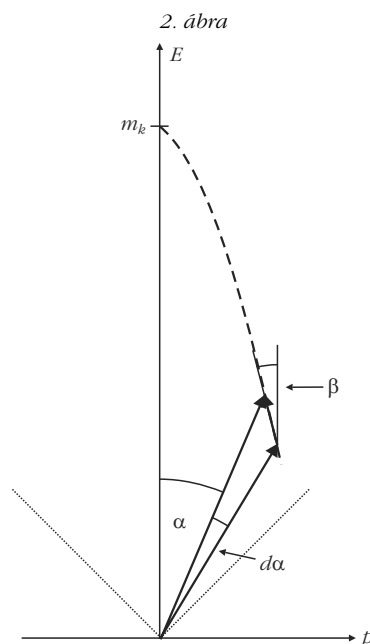
A 2. ábra szaggatott görbéjére teljesül, hogy

$$\tan \alpha = \frac{p}{E}, \quad (3)$$

valamint

$$\tan \beta = - \frac{dp}{dE}. \quad (4)$$

A (3) és (4) összefüggéseket (2)-be behelyettesítve explicit alakban megkapjuk a keresett $E(p)$ görbe differenciálegyenletét:



$$-\frac{dp}{dE} = \frac{u - \frac{p}{E}}{1 - u \frac{p}{E}}. \quad (5)$$

A görbe analitikus alakja az (5) differenciálegyenlet $E(p=0) = m_k$ kezdőfeltétel melletti megoldásával lenne megkapható, azonban, sajnos az (5) differenciálegyenletnek nincs analitikus megoldása.

Próbálkozzunk másképp: térjünk át (R, α) polárkoordinátákra, a 2. ábra jelölései szerint:

$$\begin{aligned} E &= R \cos \alpha, \\ p &= R \sin \alpha. \end{aligned} \quad (6)$$

(A polárkoordinátákra való áttérés azért is kézenfekvő gondolat, mert a végsebesség csak az α szögtől függ.)

Két megjegyzés:

a) Az R mennyiségnek – és a (6) transzformációs összefüggéseknek – *nincs* fizikai tartalmuk, csupán matematikai segédeszközt nyújtanak a 2. ábra szaggatott görbéjének analitikus felírásához.

b) Bár az energia-impulzus diagramok szokásosan nem az euklideszi, hanem a Minkowski-féle hiperbolikus geometriának engedelmeskednek (ez fontos eltéréseket eredményez például „szakaszosság” kiszámításánál, a „Pithagorasz-tétel” felírásánál stb.), a fenti (6) koordináta-transzformációnál nyugodtan alkalmazhatjuk az euklideszi geometriát (így például R az ábrán euklideszi értelemben mérhető távolságot jelöl!), hiszen célunk a szaggatott görbe egyenletének megtalálása az ábra (euklideszi) síkján.

A (6) koordináta-transzformáció segítségével könnyen megkapható az (5) differenciálegyenlet polárkoordinátás alakja:

$$\frac{\frac{dR}{d\alpha} \tan \alpha + R}{R \tan \alpha - \frac{dR}{d\alpha}} = \frac{u' - \tan \alpha}{1 - u' \tan \alpha}. \quad (7)$$

Ez egyszerű átalakítással az

$$R(1 - 2u' \tan \alpha + \tan^2 \alpha) = \frac{dR}{d\alpha} (u' \tan^2 \alpha - u') \quad (8)$$

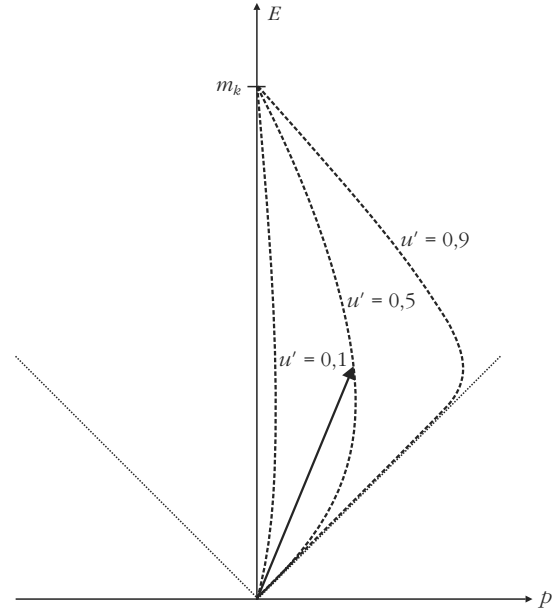
alakra hozható. A (8) differenciálegyenlet (a kezdőfeltételeket az integrálási határokbá foglalva) közvetlen integrálással megoldható:

$$\int_{m_k}^R \frac{1}{R} dR = \int_0^\alpha \frac{1 - 2u' \tan \alpha + \tan^2 \alpha}{u' (\tan^2 \alpha - 1)} d\alpha, \quad (9)$$

amelyből az

$$R(\alpha) = m_k \frac{(1 - \tan \alpha)^{\frac{1-u'}{2u'}}}{(1 + \tan \alpha)^{\frac{1+u'}{2u'}}} (1 + \tan^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

analitikus megoldást kapjuk.



3. ábra

A (10) egyenlettel felírt görbéknek nevezhetjük „rakétagörbéknek”: egy m_k kezdeti tömegű rakéta energia-impulzus vektora a gyorsítási szakasz során egy-egy ilyen görbén fut végig az $E-p$ diagramon. (Hogy melyiken, az az u' hajtógázsebességtől függ.) A 3. ábrán három ilyen rakétagörbét tüntettem fel, amelyek háromféle hajtógázsebességnek felelnek meg ($u' = 0,1, 0,5$, illetve $0,9$).

A rakéta pillanatnyi energia-impulzus vektorát úgy kapjuk, hogy az origót összekötjük a rakétagörbe megfelelő pontjával (a 3. ábra illusztrálásképpen mutat egy ilyen energia-impulzus vektort, az $u' = 0,5$ esetre). A rakéta pillanatnyi sebessége ezután közvetlenül leolvasható, mint az energia-impulzus vektor (E -tengelyhez képesti) meredeksége.

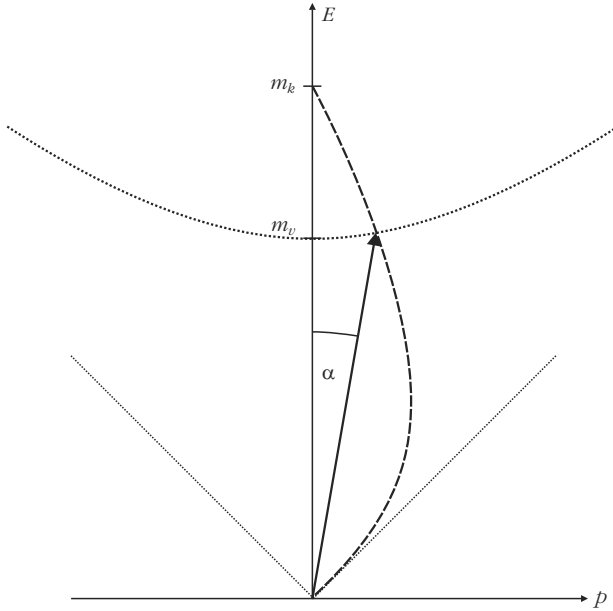
Az ábrából látszik az az (intuíciónkkal is egyező) eredmény, hogy nagy rakétasebességek úgy érhetőek el, ha a hajtógázsebességet nagyra választjuk, illetve ha a rakéta minél több hajtógázt bocsát ki. Az ábra azt is szemléletesen mutatja, hogy a rakéta sebessége minden körülmények között a fénysebességnél kisebb marad.

A rakéta m_k kezdeti tömege a gyorsítási szakasz folyamán csökken, végső értéke m_v . Mekkora az elért végsebesség? Nincs más dolgunk, mint meghatározni a rakétagörbe és az m_v végső tömeghez tartozó hiperbola metszéspontját [1]: ez a pont adja meg a rakéta energia-impulzus vektorát a gyorsítási szakasz végén. A 4. ábra illusztrálja a geometriai eljárást ($m_v/m_k = 0,7$ és $u' = 0,5$ mellett).

Most nézzük a számolást! Az m_v -hez tartozó hiperbola egyenlete:

$$E^2 - p^2 = m_v^2. \quad (11)$$

A hiperbola egyenletét azonban szintén polárkoordinátás alakban keressük. Felhasználva a (6) koordináta-transzformációs képleteket, valamint a



4. ábra

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \quad (12)$$

trigonometrikus azonosságokat, a hiperbola polárkoordinátás egyenletére

$$R(\alpha) = m_v \frac{(1 + \tan^2 \alpha)^{\frac{1}{2}}}{(1 - \tan^2 \alpha)^{\frac{1}{2}}} \quad (13)$$

adódik. Mivel $\tan \alpha$ éppen a rakéta V pillanatnyi sebessége, mind a rakétagörbe (10) egyenlete, mind a hiperbola (13) egyenlete közvetlenül átírható a rakétesebség függvényére:

m_k -ből induló rakétagörbe:

$$R(V) = m_k \frac{(1 - V)^{\frac{1 - u'}{2u'}}}{(1 + V)^{\frac{1 + u'}{2u'}}} (1 + V^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (14)$$

m_v -hez tartozó hiperbola:

$$R(V) = m_v \frac{(1 + V^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 - V^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (15)$$

(14) és (15) jobb oldalát egyenlővé téve a következő kifejezés adódik a két görbe metszéspontjára:

$$m_k (1 - V)^{\frac{1}{2u'}} = m_v (1 + V)^{\frac{1}{2u'}}, \quad (16)$$

amiből a rakéta V végsebességére a jól ismert

$$V = \frac{\exp\left[u' \ln\left(\frac{m_k}{m_v}\right)\right] - \exp\left[-u' \ln\left(\frac{m_k}{m_v}\right)\right]}{\exp\left[u' \ln\left(\frac{m_k}{m_v}\right)\right] + \exp\left[-u' \ln\left(\frac{m_k}{m_v}\right)\right]} = \tanh\left[u' \ln\left(\frac{m_k}{m_v}\right)\right] \quad (17)$$

képletet kapjuk.

A tangens-hiperbolikus függvény a $\pm\infty$ -ben ± 1 -hez tart, az ilyen (1-hez közelire választott u' és nagyra választott m_k/m_v tömegarány mellett megközelíthető) esetet nevezhetjük ultrarelativisztikusnak.

A jól ismert nemrelativisztikus formulát akkor kapjuk vissza, ha a tangens-hiperbolikus argumentumában szereplő kifejezés kicsi: ilyenkor a tangens-hiperbolikus függvény magával az argumentummal közelíthető, ezért

$$V \approx u' \ln\left(\frac{m_k}{m_v}\right). \quad (18)$$

klasszikus kifejezést kapjuk.

Irodalom

1. Bokor N.: Ütközések elemzése energia-impulzus diagramokkal. *Fizikai Szemle* 61 (2011) 54.
2. E. F. Taylor, J. A. Wheeler: *Téridőfizika*. Typotex 2006.