AZ IKERPARADOXON ÉS A GYORSULÁS

Bokor Nándor
BME Fizika Tanszék

A speciális relativitáselméletnek a mindennapi szemléletünk számára meglepő következményeit sok gondolatkísérlet illusztrálja. Az egyik fogalmi újítás az időtartam abszolút voltának elvetése. Ehhez kapcsolódik az ikerparadoxon, amely többek között drámai megfogalmazásának – ikertestvérek életkora különbözhet, ha két találkozás között egymástól eltérő mozgást végeztek – köszönheti népszerűségét.[1] A különböző életpályájú ikrek eltérő öregedése, mint problémafelvetés azonnal felkelti a diákok érdeklődését. A paradoxon feloldása egyértelmű, matematikailag egyszerű, sok diák azonban joggal valami többet, szemléletesebbet vár a formulák felírásánál. Mi *okozza* (fizikailag) az eltérő öregedést? Ennek szemléletessé tételére az egyes fizikakönyvek már többféle magyarázattal próbálkoznak, ezek némelyike inkább a zavart fokozza az olvasóban, mintsem a megértést segíti. Sajnos a magyar mérnökhallgatók által legszélesebb körben használt egyetemi tankönyvek [1, 2] éppen ilyenek. A jelen cikknek kettős célja van: (1) rámutatni az ikerparadoxon-magyarázatok némelyikének félreérthetőségére; (2) bemutatni a paradoxonnak néhány olyan változatát, amelyekben a látszólagos ellentmondás még élesebben mutatkozik meg, és így végső soron mélyebbé tehetik a diákok számára az effektus megértését.

A magyar mérnökhallgatók által legszélesebb körben használt fizikatankönyv [1] így fogalmaz:

„Nem lehet az ikertestvérek közül bármelyiket mozgónak vagy nyugvónak tekinteni, és így a helyzetet szimmetrikusnak felfogni? Nem bizony! Mert az utazó testvérnek valamiképpen gyorsulnia kell, hogy a visszatéréshez megváltoztassa a sebességét, a gyorsulás pedig csak az utazó iker vonatkoztatási rendszerével kapcsolatos! A gyorsulás abszolút, nem pedig relatív dolog, ezért az esemény nem szimmetrikus.”

Bár a könyv általában ügyel a pontos fogalmazásra, a diák a fenti részletet olvasva joggal érezheti úgy, hogy végre megértette az utazó iker lassabb öregedésének *fizikai hátterét:* az effektust valamiképp a gyorsulás *okozza.* Igaz, hogy a könyv siet a további magyarázatokkal: előbb lábjegyzetben említi, hogy „Kísérletileg (…) bebizonyították, hogy gyorsulások egészen a 10^{16} g értékig nem befolyásolják az órák járását. Csak a relatív sebességek teszik ezt.” Majd később leszögezi: „A [fordulópontnál jelentkező] gyorsulás ugyan nem változtatja meg az órák járásának ütemét, de drámaian megváltoztatja az egyidejűség skáláját az S' [az utazó iker nyugalmi rendszere] számára.” Ezek a kiegészítések azonban – összevetve az elsőnek leírt magyarázattal – inkább csak zavarosabbá teszik, mintsem tisztáznák az olvasóban a kérdést, hogy a gyorsulásnak végül is van-e szerepe, vagy nincs.[2]

Még rosszabb a helyzet egy másik, széles körben alkalmazott tankönyvvel [2], amely egyszerűen így fogalmazza meg a két iker nem szimmetrikus mozgását:

„Speedo, az űrutazó kénytelen egy sor gyorsulási szakaszt átélni utazása alatt, hiszen be kell kapcsolnia a rakétáit, hogy előbb lelassítsa az űrhajóját, majd visszainduljon a Föld felé. Így sebessége nem lesz végig állandó, következésképpen nem inerciarendszerben utazik.”

A könyv magyarázata itt gyakorlatilag abba is marad. Az olvasóban tehát ismét könnyen kialakul az a tévkép, hogy az effektusnak *dinamikai* oka van. Mintha az utazó iker attól öregedne kevésbé, hogy mozgása során erőlökéseknek van kitéve (és ez fiziológiai változásokat okoz a szervezetében).[3]

Az alapprobléma valószínűleg az, hogy a tankönyvek ikerparadoxon-változata szinte mindig egy *gyorsulásmentesen* (egyenes világvonal mentén) és egy *gyorsulva* (megtört vagy görbült világvonal mentén) mozgó iker életútját veti össze. Érthető persze ez a választás, hiszen ennek feltűnő aszimmetriáját (gyorsul – nem gyorsul) a diákok hamar átlátják. Másfelől éppen ez a feltűnő aszimmetria sodorja – még félrevezető magyarázatok nélkül is – szinte elkerülhetetlenül abba a képzetbe az olvasót, hogy a jelenségben a gyorsulás valamilyen fontos szerepet játszik.

Van olyan tankönyv [3], amely ugyan szintén a szokásos „gyorsul – nem gyorsul” ikerparadoxon-változatot tárgyalja, viszont – mivel tisztában van az így előálló csapdahelyzettel – hosszú, precíz magyarázattal tereli az olvasót a helyes fizikai kép felé:

„(…) szó sincs szimmetriáról: az ikerpár egyik tagja végig zavartalan sorsú, »szerencsétlen« testvére viszont mindenféle »zaklatásban« részesül. (…) Ugyanakkor arról sincs szó, hogy a kevésbé öregedésnek a »zaklatás« (gyorsulás) lenne az *oka.* A »szerencsétlen« sorsú testvérrel (…) csupán egyetlen egyszer történik valami »megrázó« (…), de nyilván nem ekkor és ettől »fiatalo-

[1] Nem csupán gondolatkísérletről van szó, gyakorlati kimutatása azonban a makrovilágban nem könnyű, mivel a szokásos – c-nél sokkal kisebb – sebességeknél az effektus az „ikrek” (a kísérletben atomórák) sajátidejének csak nagyon kicsi eltéréséhez vezet.

[2] Az utolsó mondat például, bár tagadja a gyorsulás szerepét az órák eltérő járásában, valamiképp mégis azt mondja, hogy a visszaforduláskor – a gyorsuláskor – *történik* valami lényeges.

[3] Ezzel kapcsolatban jó, ha a diákok előtt már az elején kihangsúlyozzuk, hogy az ikerparadoxon ténylegesen végigszámolt esetei mind *ideális órákra* vonatkoznak, amelyeknek a szerkezetét nem lehet mechanikai igénybevétellel (például ütés) tönkretenni, és amelyek egy-egy ilyen igénybevétel után ugyanolyan pontos ütemben járnak, mint előtte.

dott meg« hirtelen. Arról sincs szó, hogy az egyik testvér lassabban öregedne, mint a másik. (…) a két testvér nem különböző ütemben, hanem a téridő különböző *irányában* kezd öregedni. (…) Az eltérő időtartamoknak globális, téridő-geometriai oka van. (…) Az ikerparadoxon lényege tehát fizikai szempontból a következő: a téridő két eseménye között különböző világvonalakon mérve különböző (saját)időtartamok telnek el, méghozzá úgy, hogy a két eseményt egyenes világvonallal összekötve telik el a legtöbb idő.”

A fenti magyarázat szemléletes és – a matematikai részletek elkerülése mellett is – teljesen precíz. Az eltérő öregedésért tehát nem a gyorsulás a felelős. Mégis, az olvasóban tovább motoszkálhat a kérdés: ha egyszer az ikrek sorsa feltűnő módon mégiscsak abban tér el, hogy az egyiket „zaklatják”, a másikat „zavartalanul hagyják”, akkor ez a különbség *miben* nyilvánul meg? Van-e a gyorsulásnak *bármilyen* szerepe az eltérő öregedéssel kapcsolatban, vagy teljesen kihagyható a diszkusszióból?

1912-ben *von Laue* a következőket írta [4]: a gyorsulás az effektusban egyáltalán nem játszhat szerepet, hiszen az oda-vissza utazó iker világvonalán „az egyenletes mozgás szakaszainak időtartamát tetszőlegesen nagyobbra választhatjuk, mint a gyorsulási szakaszokét”. Ez a mondat azonban önmagában még nem meggyőző, hiszen – adott sebességváltozás mellett – minél kisebbre választjuk a gyorsulási szakasz *időtartamát,* annál nagyobbá válik a gyorsulás *számértéke.* Egyáltalán nem magától értetődő tehát, hogy ezzel a trükkel kiküszöböltük a gyorsulás szerepét a problémából.

Végül megemlítek egy olyan tankönyvet [5], amely az ikerparadoxon tömör megfogalmazását adja, úgy, hogy a gyorsulás szó használatát teljesen elkerüli:

„A trajektória $t_1 \leq t \leq t_2$ szakaszám eltelt sajátidőt az alábbi integrál adja meg:

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} < t_2 - t_1 . \qquad (1)$$

Ez a képlet írja le az *ikerparadoxon* néven ismert jelenséget. Tekintsünk két különböző tömegpontot, a-t és b-t, mindegyiket a saját órájával (…). Tegyük fel, hogy a t_1 és a t_2 ($>t_1$) pillanatokban találkoznak egymással. (…) Ha [a fenti képlet] segítségével mindkettőre kiszámítjuk a két találkozás között eltelt sajátidőt, a $v_a(t)$ és a $v_b(t)$ függvények különbözősége miatt általában két különböző $\Delta\tau_a$, $\Delta\tau_b$ értéket kapunk.”

Az (1) képlet azt is mutatja, hogy – összhangban von Laue fenti érvelésével – egy gyorsulási szakasz *időtartamát* nullához közelítve, bár a gyorsulás *számértéke* korlátlanul nő, a gyorsulási szakasz alatti sajátidő-járulék zérushoz tart:

$$\Delta\tau_{gy} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{t}^{t+\varepsilon} dt \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} = 0, \qquad (2)$$

hiszen az integrálandó függvény korlátos (1-nél kisebb).

Az ár, amit a fenti pontos, kvantitatív tárgyalásért fizetünk, a szemléletes geometriai kép hiánya. Néhány példával és geometriai analógiával azonban még egyértelműbbé és érthetőbbé lehet tenni, hogy a gyorsulás az ikerparadoxonban valóban *nem* játszik szerepet. A legmeggyőzőbbek ebből a szempontból az olyan példák, amelyekben az ikrek (1) *ugyanúgy* gyorsulnak, mégis *eltérően* öregednek, vagy (2) *különbözőképpen* gyorsulnak, mégis *ugyanúgy* öregednek. Az alábbiakban ilyen ikerparadoxon-változatokat vizsgálok.

Az ikrek azonos gyorsulásokat élnek át, mégis eltérően öregednek

1. példa

Az alábbi változat szövege részletesen beszél az ikrek által átélt gyorsulásokról. Mivel a gyorsulások teljesen szimmetrikusak, a szövegből nehéz tetten érni, mi vezethet az eltérő öregedéshez:

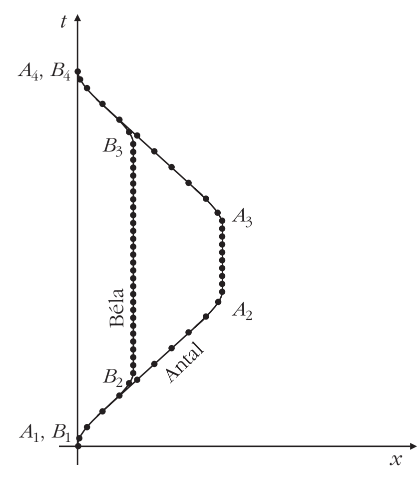
„Antal és Béla egy ikerpár, egy űrállomáson élnek. Mindketten beülnek űrhajójukba, és egyszerre elindulva a gyorsulással v sebességet érnek el. Hamarosan $-a$ lassulással megállnak. Végül $-a$ gyorsulással visszaindulnak (a végsebességük ezúttal $-v$), majd az űrállomás közelébe egyszerre érve a lassulással megállnak. Béla sokkal többet öregedett, mint Antal. Hogyan lehetséges ez?”

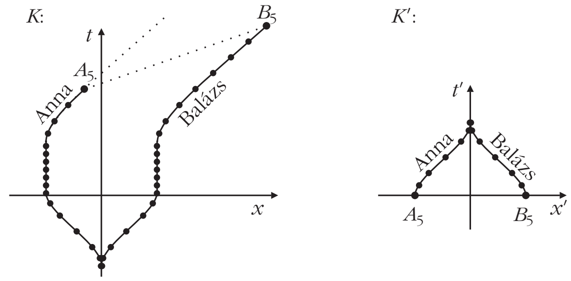
Az *1. ábra* mutatja az egyszerű magyarázatot. A két iker világvonala feltűnően különbözik, így az eltérő öregedésben nincs semmi meglepő, holott az A_1, A_2, A_3, A_4, illetve a B_1, B_2, B_3, B_4 gyorsulási-lassulási szakaszok – így az ikreket ért erőlökések is – teljesen megegyeznek.

Az ikrek öregedését kiszámíthatjuk, ha az (1) képletet alkalmazzuk először az egyik, majd a másik világvonalra (a kvalitatív szemléltetéshez elég, ha – mint az *1. ábrá*n – a világvonalakra rajzolt pontokkal jelezzük az egyenlő sajátidő-tartamokat, például hónapokban mérve).

A feladat megszövegezésében a „csalást” nyilvánvalóan ott követtem el, hogy hallgattam arról: az ikrek visszafordulását eredményező fékezési, illetve gyorsulási manőverek az ikreknek nem ugyanannyi idős korában történtek.

1. ábra





2. ábra

2. példa

Lássunk egy másik, hasonló példát ([6] nyomán), ahol a szöveg többször kitér arra is, hogy a gyorsulási szakaszok *mikor* zajlottak (sajátidőben mérve), így talán még nehezebb észrevenni, hol jelenik meg a mozgás aszimmetriája:

„Két ikertestvér, Anna és Balázs, egy űrbázis közepén élnek. Az űrbázis mérete 1 fényév.[4] 20. születésnapjuk előtt egy nappal beülnek űrhajójukba, és elindulnak ellentétes irányban az űrbázis két széle felé: Anna balra indul, Balázs jobbra. A két űrhajó tökéletesen ugyanolyan, és a két iker vezetési stílusa is megegyezik, azaz a két mozgás tökéletesen szimmetrikus. Olyan gyorsan haladnak, hogy a 0,5-0,5 fényévnyi távolságot az űrbázis két széléig 1 nap alatt megteszik (saját órájukon mérve). Mindketten tehát 20. születésnapjukon érnek az űrbázis két szélére: Anna a bal, Balázs a jobb szélére. Még aznap elindulnak egy hosszú űrutazásra, mindketten jobbra. Ráérősen gyorsulnak fel; űrhajóik ismét pontosan ugyanúgy viselkednek, ezért Anna és Balázs mindig pontosan ugyanannyi idős korukban érnek el egy-egy adott sebességértéket. Éppen 30. születésnapjuk előtt egy nappal, amikor pontosan v = 0,999 c a sebességük, mindketten egy másik űrbázis mellé érnek. Ezen űrbázis sebessége is éppen 0,999 c, azaz hozzájuk képest nyugalomban van. Ki lehet szállni a száguldó űrhajóból, és egyszerűen lelépni a „száguldó” űrbázisra. Ezt mindketten meg is teszik még aznap, 30. születésnapjuk előtt egy nappal. Kiderül, hogy ez az űrbázis éppen olyan hosszú, hogy Anna a bal szélére, Balázs a jobb szélére lépett le. Az űrbázis közepén, félúton van egy étterem. Az ikerpár ott akar találkozni, hogy élményeiket megbeszéljék. El is indulnak egymás felé, mégpedig egyszerre (azaz olyan módon időzítve az indulást, hogy – azonos sebességű űrhajóikon egymás felé haladva – éppen egyszerre érjenek el az űrbázis közepén levő étteremhez). Annyira nagy sebességgel utaznak, hogy az út az űrbázis közepéig mindkettejük óráján csak 1-1 napot vesz igénybe. Anna tehát pontosan 30 éves, amikor az étteremhez egyszerre odaérnek. Meglepve látja, hogy egy sokkal idősebb férfi siet feléje: Balázs 52 éves!”

Az ikrek által átélt gyorsulási szakaszok, „rázkódások” ismét pontosan ugyanolyanok. Az egyetlen aszimmetria ott jelent meg, hogy jobbra indultak útnak, nem pedig balra (akkor Anna öregedett volna többet).

[4] Néhány számérték irrealitásától vonatkoztassunk el.

Az aszimmetriát mutatja, és a kvalitatív tárgyalásban segít a *2. ábra* (K a kiindulási űrbázis nyugalmi rendszere, K' a végállomás nyugalmi rendszere, és A_5 és B_5 jelzi azt a két eseményt, amikor Anna, illetve Balázs egyszerre elindult az űrbázis közepén levő étteremhez). A feladat végigszámolását az olvasóra bízom.

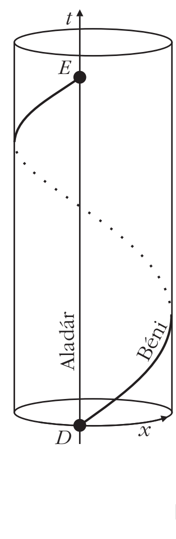
3. példa

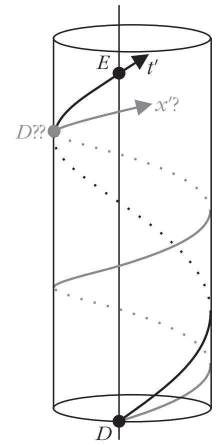
Mennyire *tartozik hozzá* egyáltalán a gyorsulás az ikerparadoxonhoz? Lehet-e olyan példát konstruálni, amikor *egyik iker sem gyorsul, mégis eltérően öregednek?* Ez első látásra (legalábbis sík téridőben) képtelenségnek tűnik, hiszen még ha az egyik iker gyorsulásmentesen mozog (vagy helyben marad) is, a másiknak el kell távolodnia, majd vissza kell fordulnia, hogy ismét találkozhassanak. Ez a kifogás azonban az alábbi ötlettel [7] kicselezhető: legyen a téridő továbbra is *sík* (ahol a speciális relativitáselmélet uralkodik), de *zárt,* ahogy a *3. ábra* mutatja. A két iker – Aladár és Béni – *eltérő* világvonalakon jut el a D eseményből az E eseménybe, úgy hogy közben mindketten végig *állandó sebességgel* mozognak.

Tekintsük Aladár nézőpontját, pontosabban megfogalmazva azt a *globális inerciarendszert* – nevezzük ezt K_A-nak; (x, t) koordinátatengelyeit feltüntettem a *3. ábrá*n –, amelyben Aladár nyugalomban van. A jelenséget ebben az inerciarendszerben leírva Béni állandó v sebességgel jobbra halad, majd egyszercsak – mivel a téridő zárt – Aladár bal oldala felől visszajut a kiinduló pontba. Mivel inerciarendszerről van szó, alkalmazhatjuk az idődilatáció képletét, amelyből kiderül: az E-ben való találkozáskor *Aladár idősebb, mint Béni.*

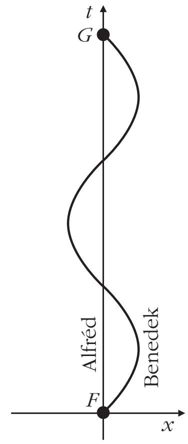
A helyzet azonban most *valóban* szimmetrikusnak tűnik, hiszen egyik iker sem gyorsul! Ha Béni végig állandó sebességgel mozgott, akkor miért ne írhatnánk le ugyanígy a jelenséget abban az globális inerciarendszerben – nevezzük ezt K_B-nek –, amelyben *Béni van nyugalomban,* és amelyből nézve Aladár „tesz egy kört”, v sebességgel *balra* indulva? Világos, hogy K_B-ben – mivel globális inerciarendszer – az idődilatáció képlete *éppúgy alkalmazható,* mint K_A-ban. Csakhogy a képlet most az ellenkező eredményt adja: a találkozáskor *Béni lesz idősebb, mint Aladár!*

3. ábra





4. ábra



5. ábra

Hol az aszimmetria, amely a paradoxon feloldását lehetővé teszi? A válasz megtalálásához tekintsük a *4. ábrá*t, amelyre a K_B globális inerciarendszer (x', t') koordinátatengelyeit próbáltam berajzolni. A t'-tengely megegyezik a K_B origójában nyugvó Béni világvonalával; az x'-tengely pedig ezzel szimmetrikusan helyezkedik el, ahol a szimmetriatengely egy D-ből jobbra indított fényjel világvonala. Több – egymással összefüggő – súlyos gond van azonban ezzel a konstrukcióval:

(1) Mint az ábrából is látható, a két koordinátatengely *végtelen sokszor metszi egymást*. Ez megengedhetetlen, hiszen azt jelentené, hogy téridőnek végtelen sok „origója van” (Béni az útja során periodikus időközönként a D indulási eseménybe jutna).

(2) K_B-ben az órák fényjelekkel való szinkronizálása megoldhatatlan, mert – mint az ábrába könnyen berajzolható – ha Béni egyszerre küld jobbra és balra egy-egy fényjelet, a jobbra küldött fény előbb érkezik vissza hozzá, mint a balra küldött (aminek alapján – ha elfogadná nagy távolságokra is helyes hosszmérési eljárásnak ezt a módszert – Béni kénytelen lenne megállapítani, hogy zárt univerzumának kerülete balra mérve nagyobb, mint jobbra mérve!).

A hibát ott követtük el, hogy automatikusan feltételeztük: a *3. ábrá*n szereplő zárt téridő lefedhető olyan globális inerciarendszerrel (ezt neveztük K_B-nek), amelyben Béni nyugalomban van. Most láthatjuk, hogy ilyen *globális* inerciarendszer nem létezhet. Ebben a téridőben – bár sík! – van egy *abszolút, kitüntetett* nyugalmi rendszer; K_A az egyetlen Minkowski-koordinátarendszer, amely a *teljes* téridőt lefedheti. A K_A-beli leírás helyes, a viszontlátáskor valóban Aladár lesz az öregebb. A K_A-hoz képest – akár állandó sebességgel – mozgó megfigyelők nem tudják megkonstruálni a méterrudak és szinkronizált órák olyan rendszerét, amely a teljes téridőt lefedi, és amely az idődilatáció képletének tetszőlegesen nagy téridőtartományra kiterjedő használatát jogossá tehetné.[5]

Szoros geometriai analógia: egy hengerfelület geometriai értelemben sík ugyan – hiszen egy sík lap torzításmentesen felcsavarható hengerré –, mégis fontos különbség van egy kiterített sík lap és egy hengerfelület között. A kiterített sík lap végtelen sok, egymáshoz képest elforgatott, derékszögű koordinátarendszerrel globálisan lefedhető, ez azonban a hengerre már nem igaz. Ha egy négyzetrácsos papírlapot feltekerünk hengerré, a négyzetrácsok csak akkor adnak értelmes koordinátavonalakat a hengeren is, ha a sík lapot „egyenesen”, a koordinátavonalak mentén tekertük fel.

Csak az egyik iker gyorsul, mégis azonos mértékben öregednek

Ebben a példában az ikerpár egyik tagja, Alfréd, nyugalomban van, a másikuk, Benedek viszont – Alfréd nyugalmi rendszeréből nézve – szinuszosan ide-oda mozog az x-tengely mentén [8], ahogy az *5. ábra* mutatja. Az írásom elején idézett, félreérthető ikerparadoxon-magyarázatok olvasói ezúttal azt mondhatják: Benedek, mivel folytonosan erőlökéseknek van kitéve, kevésbé öregszik mint Alfréd. De valóban így van-e ez?

Benedek kitérése, sebessége és gyorsulása az idő függvényében (Alfréd inerciarendszeréből nézve):

$$x_B(t) = \frac{v_{B\max}}{\omega} \sin \omega t, \tag{3}$$

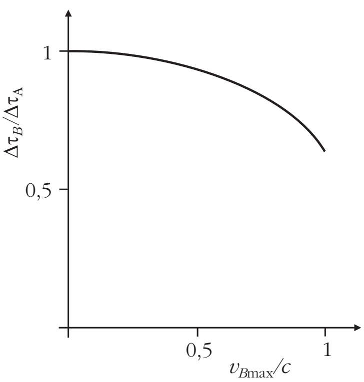
$$v_B(t) = v_{B\max} \cos \omega t, \tag{4}$$

$$a_B(t) = -\omega\, v_{B\max} \sin \omega t = -a_{B\max} \sin \omega t, \tag{5}$$

ahol ω Benedek mozgásának körfrekvenciája, $v_{B\max}$ és $a_{B\max}$ pedig sebességének, illetve gyorsulásának a csúcsértéke a nyugvó rendszerben mérve.[6]

[5] A precízebb tárgyalás külön foglalkozna azzal, hogy K_A-ban az események x-koordinátáját periodikus változó írja le, ez azonban teljesen hasonló az (r, φ) síkbeli polárkoordinátarendszer φ koordinátájának viselkedéséhez, és semmiféle problémát nem okoz.

[6] Megjegyzés: a Benedek által *átélt* gyorsulásnak, azaz *saját*gyorsulásának maximális értékét – mivel a maximális gyorsulás pillanataiban Benedek pillanatnyi nyugalmi rendszere éppen az (x, t) rendszer – szintén $a_{B\max}$ adja meg.



6. ábra

Tegyük fel, hogy az F eseménytől a G eseményig Benedek n félperiódust tesz meg jobbra, illetve balra. Alfréd öregedése egyenlő a két esemény között eltelt koordinátaidő-tartammal:

$$\Delta\tau_A = n\frac{\pi}{\omega}, \tag{6}$$

míg Benedek öregedése az (1) idődilatációs képlet alapján írható fel:

$$\Delta\tau_B = n\int_0^{\pi/\omega} dt \sqrt{1-\left(\frac{v_{B\max}}{c}\right)^2\cos^2\omega\, t}. \tag{7}$$

A (7) integrált $\theta = \omega t$ új változóval átírva, és (7)-et (6)-tal elosztva a két testvér öregedésének arányára a következő összefüggést kapjuk:

$$\frac{\Delta\tau_B}{\Delta\tau_A} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta \sqrt{1-\left(\frac{v_{B\max}}{c}\right)^2\cos^2\theta}, \tag{8}$$

amely $v_{B\max}/c$ függvényében a *6. ábrá*n látható.

A (8) képlet és a *6. ábra* legfontosabb tanulsága, hogy az öregedések aránya független az ω-tól. Ez viszont, mivel $a_{B\max} = \omega\, v_{B\max}$, azt jelenti, hogy $v_{B\max}$-ot kellően kicsinek választva a két testvér öregedésének arányát tetszőlegesen közel tarthatjuk 1-hez, miközben Bertalan maximális gyorsulását, ω-t alkalmasan nagyra állítva, tetszőlegesen naggyá tehetjük!

Összefoglalva: ebben a példában tehát a két iker közül az egyik nyugalomban van, a másik pedig tetszőlegesen nagy mértékben gyorsulhat, mégis – legalábbis határesetben – azonos mértékben öregednek.

Záró megjegyzések és geometriai analógiák

Az összes eddigi példa illusztrálja, hogy nem az átélt gyorsulás (vagy annak hiánya) az ikerparadoxon megoldásának kulcsa.

Tekintsünk ugyanakkor egy olyan helyzetet, amikor az indulási és érkezési események között nem csak két iker, hanem *tetszőlegesen nagyszámú* megfigyelő utazik. Az ilyen probléma tárgyalásában a gyorsulás fogalma ismét felbukkanni látszik. A maximális öregedés elvének [9] szokásos megfogalmazása szerint ugyanis a két esemény között azon utazó számára telik el a *leg*több sajátidő, aki szabadon, *gyorsulásmentesen* mozgott.

Hogyan illik bele ez az eddig elmondottakba? Van-e szerepe legalább a *leg*többet öregedő iker kiválasztásában a gyorsulásnak (illetve a hiányának)? A fenti *5.* és *6. ábra* példája azt mutatja, hogy végső soron *nincs*. Ebben a körmönfont példában láthattuk, hogy nem csak a gyorsulásmentesen mozgó Alfréd, hanem a szinuszosan ide-oda mozgó, gyorsulásokat átélő Benedek is a *lehető legtöbbet* öregedik az F és G események között. Világvonalukat végső soron nem a gyorsulás megléte vagy hiánya teszi különlegessé, hanem az, hogy mindkettő *egyenes* (illetve Benedek esetében tetszőleges pontossággal közelíti azt).

Jól megvilágítja ezt az alábbi geometriai analógia:

1. Sík papírlap[7]

Két pont között húzunk egy vonalat, majd ugyanazt a két pontot egy másik vonallal is összekötjük. Az egyik vonal rövidebbre sikerült. Melyik?

(1) „Amelyikben kevesebb a »kunkor«, a görbület.” Ez nyilvánvalóan rossz válasz (a fentiek alapján az olvasó könnyen kigondolhat, és lerajzolhat ellenpéldákat).

(2) Ha előzőleg négyzethálóval bekoordinátáztuk a papírlapot, és a két végpont egyaránt az y-tengelyre esik, akkor esetleg kísértésbe eshetünk, hogy így fogalmazzuk meg a választ:

„Amelyik vonal szorosabban halad az y-tengelyhez.” Ez azonban félrevezető állítás, hiszen egy speciális koordinátarendszert választ ki, holott a helyes válasznak koordinátarendszer-függetlennek kell lennie. (Elforgatott (x', y') tengelyek esetén például a két pont már nem kerül rá az y'-tengelyre, és a fenti magyarázat nem lesz igaz.)

(3) Sajnos a legjobb válasz, amit találhatunk, ez: „Amelyik vonal $s = \int_1^2 ds$ összhossza kisebb.” Ez persze triviális válasz. Szerencsére azonban alkothatunk egy olyan geometriai fogalmat, az *egyenesség* fogalmát, amely – ha megfelelőképpen definiáljuk – szemléletesebb választ is lehetővé tesz a kérdésre. Mi legyen az egyenesség *mértékének* definíciója? Milyen értelemben nevezzük egyenes*ebb*nek egy vonalat egy másiknál? Az biztos, hogy nem elég, ha egy vonal egyenesnek *néz ki* (gondoljunk például arra a nevezetes álbizonyításra, amely egy derékszögű háromszög befogóit – feltördelve, de a hosszukat változatlanul hagyva – levetíti az átfogóra, és mivel a rengeteg darabra feltördelt vonal láthatóan „rásimul” az átfogóra, kijelenti, hogy $a + b = c$).

Az egyenesség mértékének definíciója: két pont között az a vonal az egyenesebb, amelyre s kisebb szám.

A sík lefedhető globális Descartes-koordinátarendszerrel („négyzethálóval”). Ilyen koordinátarendszert használva, az adott görbe $y(x)$ alakját ismerve a következő képlet alkalmazható *s kiszámítására:*

[7] „Igazi síklapról” van szó, a hengerré felcsavart lap esetét most nem tekintjük.

$$s = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \left[= \int_{x'_1}^{x'_2} dx' \sqrt{1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2} \right]. \quad (9)$$

A (9) képlet szögletes zárójeles kiegészítése arra hívja fel a figyelmet, hogy a kiszámított számérték koordinátarendszer-független. Pontosabban: ha a sík adott tartományát – amely elég nagy ahhoz, hogy a végpontokat és a két görbét magában foglalja – az (x, y) négyzethálóhoz képest elforgatott (x', y') négyzethálóval fedjük le, az új koordinátarendszerben felírva az adott görbe $y'(x')$ alakját, ismét *pontosan ugyanolyan alakú* képlet alkalmazható s kiszámítására. Az, hogy globális Descartes-koordinátarendszerek használhatók, amelyekben a koordinátakülönbségek (9)-es képletbeli kombinációja invariáns (ugyanaz a vesszőtlen és a vesszős koordinátarendszerben), az euklideszi sík legfontosabb sajátossága.[8]

2. Sík téridő[9]

Két esemény között halad két részecske, két különböző világvonalon. Az egyik részecske öregedése nagyobb. Melyiké?

(1) „Amelyikben kevesebb lesz a »kunkor«, a gyorsulási szakasz.” Ez nyilvánvalóan rossz válasz (lásd a cikkben szereplő példákat).

(2) Ha előzőleg úgy választottunk koordinátarendszert, hogy a két esemény egyaránt a t-tengelyre esik (azaz ugyanazon a helyen, a térbeli origóban játszódik), akkor esetleg kísértésbe eshetünk, hogy így fogalmazzuk meg a választ:

„Amelyik világvonal közelebb halad a t-tengelyhez.” Azaz: amelyik világvonal „összességében” kisebb sebességű mozgást képvisel; ezt a konklúziót látszólag az (1) egyenlet is megerősíti: minél kisebb $v(t)$, annál nagyobb az integrál értéke. Ez azonban félrevezető állítás, hiszen egy speciális koordinátarendszert választ ki, holott a helyes válasznak koordinátarendszer-függetlennek kell lennie. (Ha egy állandó sebességű űrhajó megfigyelője – amelynek az (x', t') tengelyei a téridőnek más irányába állnak, mint az (x, t) tengelyek – számolja ki az időtartamokat, a fenti magyarázat a t'-tengelyhez való közelségről és a kis sebességről már nem lesz igaz.)

(3) Sajnos a legjobb válasz, amit találhatunk ismét a triviális válasz: „Amelyik világvonal mentén eltelt $\tau = \int_1^2 d\tau$ sajátidőtartam nagyobb.” Szerencsére itt is alkalmazhatjuk a világvonal *egyenességének* szemléletes geometriai fogalmát, feltéve hogy itt is gondosan definiáljuk ezt a fogalmat. Milyen értelemben tekintsünk egyenesebbnek egy világvonalat egy másiknál? Az ismét nem elég, ha egy világvonal egyenesnek *néz ki*. (Gondoljunk például egy olyan, az *5. ábrá*hoz hasonló esetre, amikor a szinuszos mozgás helyett egy fénysugár pattog jobbra-balra az origó közelében, és így jut el az F eseményből a G eseménybe. A fordulók számának növelésével a fény töredezett világvonala tetszőlegesen „belesimítható” a t-tengelybe. A fénysugár számára eltelt sajátidő – a világvonal hossza – mégis *drasztikusan* különbözik Alfréd és Benedek világvonalainak hosszától: az utóbbiak megegyeznek, és a leghosszabb sajátidőt képviselik, a fény sajátideje viszont a lehető legrövidebb, tudniillik zérus.)

Az egyenesség mértékének definíciója: két esemény között az a világvonal az egyenesebb, amelyre τ nagyobb szám.

A sík téridő lefedhető globális Minkowski-koordinátarendszerrel. Ilyen koordinátarendszert használva, az adott világvonal $x(t)$ alakját ismerve a következő képlet alkalmazhatót τ kiszámítására:

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \left[= \int_{t'_1}^{t'_2} dt' \sqrt{1 - \left(\frac{v'}{c}\right)^2} \right]. \quad (10)$$

A (10) képlet szögletes zárójeles kiegészítése arra hívja fel a figyelmet, hogy a kiszámított számérték koordinátarendszer-független. Pontosabban: ha a téridő adott tartományát – amely elég nagy ahhoz, hogy a két szélső eseményt és a két világvonalat magában foglalja – az (x, t) inerciarendszerhez képest mozgó (x', t') inerciarendszerben írjuk le, az új koordinátarendszerben felírva az adott világvonal $x'(t')$ alakját, ismét pontosan ugyanolyan alakú képlet alkalmazható τ kiszámítására. Az, hogy globális Minkowski-koordinátarendszerek használhatók, amelyekben a (10)-es képletalak invariáns – ugyanaz a vesszőtlen és a vesszős koordinátarendszerben – *a sík téridő legfontosabb (tisztán geometriai) sajátossága*.[10]

Irodalom

1. A. Hudson, R. Nelson: *Útban a modern fizikához.* Inok Kft., 2005.
2. R. A. Serway: *Physics for Scientists and Engineers.* 4th ed., Saunders College Publishing, 1996.
3. Erostyák J., Kürti J., Raics P., Sükösd Cs.: *Fizika III.* Nemzeti Tankönyvkiadó, 2006.
4. M. von Laue: Zwei Einwände gegen die Relativitätstheorie and ihre Widerlegung. *Phys. Z. 13* (1912) 118–120.
5. Hraskó P.: *Relativitáselmélet.* Typotex, 2002.
6. S. P. Boughn: The case of the identically accelerated twins. *Am. J. Phys. 57/9* (1989) 791–793.
7. C. H. Brans, D. R. Stewart: Unaccelerated-returning-twin paradox in flat spacetime. *Phys. Rev. D 8/6* (1973) 1662–1666.
8. R. P. Gruber, R. H. Price: Zero time dilation in an accelerating rocket. *Am. J. Phys. 65/10* (1997) 979–980.
9. E. F. Taylor, J. A. Wheeler: *Exploring Black Holes.* Addison Wesley Longman, 2000.

[8] Vigyázat: *henger* esetén a „ferdén feltekert” négyzetháló – mint fent említettem – nem ad értelmes koordinátavonalakat a teljes felületen, ezért az ilyen (x', y') „koordinátákkal” felírt (9) képlet csak olyan kis tartományokban alkalmazható egy görbedarab hosszának kiszámításához, amelyben az (x', y') értékek egyértelműen értelmezhetők.

[9] „Igazi” sík téridőről van szó, a *3.* és *4. ábra* zárt téridejének esetét egyelőre nem tekintjük.

[10] Vigyázat: a *3.* és *4. ábra* zárt *térideje* esetén Béni mozgó (x', t') „rendszere” – mint fent szerepelt – nem ad értelmes koordinátarendszert a teljes téridőben. Ezért Béni *nem alkalmazhatja* a (10)-es képletet olyan, a téridő nagy tartományát lefedő világvonalak sajátidejének kiszámítására, mint például Aladáré.