Fizikai Szemle

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A Mathematikai és Természettudományi Értesítőt az Akadémia 1882-ben indította
A Mathematikai és Physikai Lapokat Eötvös Loránd 1891-ben alapította

LXII. évfolyam 4. szám 2012. április

A LORENTZ-INGA

Hraskó Péter
PTE Elméleti Fizika Tanszék

Lorentz kérdése az I. Solvay-konferencia résztvevőihez

1863-ban a 25 éves *Ernst Solvay* belga vegyész kidolgozta az ipari szódagyártás technológiáját és hatalmas vagyonra tett szert. De nem csak a szóda érdekelte. *Lorentz* szerint „Belgiumnak ez a legnemeslelkűbb állampolgára mélyen meg volt róla győződve, hogy a természet és a társadalom törvényszerűségeinek alaposabb megismerése az emberiség boldogulását segíti elő”. Solvay jelentős összegeket áldozott a tudományra. Többek között pszichológiai, szociológiai, kémiai intézeteket alapított. 1911-ben *W. H. Nernst* javaslatára Brüsszelben összehívta az I. Nemzetközi Solvay-konferenciát, amelyen a kor legnevesebb 22 fizikusa (közöttük *H. Poincaré, M. Planck, W. Wien, A. Sommerfeld, E. Rutherford, A. Einstein*) vett részt, és a további Solvay-kongresszusok szervezését 1 millió frank alaptőkével létrehozott Nemzetközi Fizikai Intézetre bízta.

1911 arra az időszakra esett, amikor a fizika mélységes – de mint később kiderült, rendkívül termékeny – válságban volt. Lorentz, a konferencia elnöke, bevezetőjében azt mondta, hogy „ma messze vagyunk a szellemi kielégültségnek attól az állapotától, amelyet a fizikai elmélet húsz, vagy akár csak tíz évvel ezelőtt nyújtani tudott. Nem szabadulhatunk attól a gondolattól, hogy zsákutcába kerültünk: a régi elméletek egyre kevésbé képesek eloszlatni a homályt, amely minden oldalról körülvesz.” Majd így folytatta: „Planck esszéje az energiakvantumokról »valóságos fénysugár« ebben a ködben, és most az a feladat, hogy olyan mechanikát dolgozzunk ki, amelyből Planck felfedezése következményeként adódik.” Mint jól tudjuk, Planck úgy tudta megmagyarázni a fekete sugárzás spektrumát, ha feltételezte, hogy a harmonikus lineáris oszcillátor energiája csak a $h\nu = \hbar\omega$ kvantum egész számú többszöröse lehet.[1]

[1] Planck a Kirchhoff-tételnek abból a következményéből indult ki, hogy a hőmérsékleti sugárzás spektruma független az üreg falának anyagi minőségétől, ezért – legegyszerűbb lehetőségként – a falat minden frekvencián egy-egy elektromosan töltött harmonikus oszcillátorral helyettesítette.

A lineáris harmonikus oszcillátor egyik legegyszerűbb példája a matematikai inga. Lorentznek ez szöget ütött a fejébe és a következő kérdéssel fordult a konferencia résztvevőihez: A matematikai inga körfrekvenciája

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\,.$$

Planck szerint az energiája csak $\hbar\omega$ egész számú többszöröse lehet, vagyis $E = n\hbar\omega$-val egyenlő $n = 0, 1, 2\ldots$ mellett. Mármost, ha az inga fonalát a két ujjunkkal összecsippentve az inga hosszát folyamatosan csökkentjük, akkor az ω körfrekvencia folyamatosan nő. Hogyan képzelhető el, hogy eközben az energiája állandóan $\hbar\omega$ egész számú többszöröse marad?

Einstein, aki ismerte *P. Ehrenfest* idevágó munkáit, kapásból válaszolt Lorentz kérdésére: a mechanika törvényei szerint a hossz *lassú* növelésével vagy csökkentésével az energia úgy változik, hogy az E/ω hányados közben állandó maradjon; a folyamat során tehát Planck képlete folyamatosan érvényes lesz ugyanazzal az n értékkel. Lorentz ezekkel a szavakkal nyugtázta Einstein magyarázatát: „Ez a rendkívül meglepő eredmény megoldja az általam felvetett problémát. Általában is az energiakvantumok hipotézise érdekes kérdésekhez vezet minden olyan esetben, amikor a frekvencia önkényesen változtatható.”

A konferencia jegyzőkönyve szerint senki sem vetette fel, mi van akkor, ha ω-t gyorsan változtatjuk: mindenkit lenyűgözött az a tény, hogy a klasszikus mechanika a lassú változás esetében ilyen csodálatos harmóniában van az energiakvantum-hipotézissel.

Mai ismereteink fényében Einstein válasza a kvantummechanika ma is érvényes fontos tételének első megfogalmazása: amikor egy fizikai rendszer határozott kvantumállapotban van és közben lassan változtatjuk egy vagy több paraméterét, a rendszer folyamatosan megmarad az ugyanazokkal a kvantumszámokkal jellemzett állapotában. Ha a paraméterek az eredeti értékükre állnak vissza, a rendszer is visszakerül eredeti állapotába: a körfolyamat során nincs munkavégzés.

Amikor azonban a változás gyors, a rendszer közben gerjed. Ha például eredetileg alapállapotban volt, akkor hiába állítjuk vissza a paraméterek korábbi értékét, bizonyos valószínűséggel gerjesztett állapotban marad vissza.

Az E/ω állandóságának igazolása

Az E/ω állandóságának igazolásához azt kell megmutatnunk, hogy ezen arány időderiváltja nullával egyenlő. Az olyan mechanikai rendszerek esetében, amelyek E energiája a K kinetikus és az U potenciális energia összegével egyenlő, és csak U tartalmazza a változó paramétert, az E időderiváltja az

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} \tag{1}$$

képlet alapján számítható ki. A bal oldalon teljes derivált áll, mert számításba kell venni minden okot – a koordináták és a sebességek megváltozását csakúgy, mint a külső körülményekét – ami az energia értékét megváltoztathatja. A teljes időderiváltat a szokásoknak megfelelően gyakran fogjuk ponttal jelölni. A jobb oldalon a parciális időderivált jelzi, hogy itt csak az *explicit időfüggés* (vagyis a körülmények időbeli változása) veendő figyelembe. Az (1) magában foglalja az energiamegmaradás tételét, amely azt mondja ki, hogy amikor a körülmények időben állandók, a rendszer energiája nem változik.

Egy szabadsági fok esetében, amikor

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x),$$

az (1) igazolása különösen egyszerű:

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial t} = \left(m\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x}\right)\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t},$$

mert

$$m\ddot{x} = F = -\frac{\partial U}{\partial t}.$$

Lineáris harmonikus oszcillátorra

$$U = \frac{D}{2}x^2,$$

ezért

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\dot{D}x^2, \tag{2}$$

ahol D a direkciós „állandó”, amely most függ az időtől. Ha ez a függés olyan gyenge, hogy a rezgés T periódusa alatt a D megváltozása elhanyagolhatóan kicsi, akkor a (2) egyenletet a t időpont körül átlagolhatjuk az éppen aktuális $T(t)$ periódusidőre. Az x^2 ezalatt egy teljes periódust változik, és a négyzetének az átlaga a mozgás t-beli $A(t)$ amplitúdó négyzetének felével egyenlő:

$$\overline{x^2} = \frac{A^2}{2}.$$

Az átlagolás után ezért (2) a

$$\frac{d\bar{E}(t)}{dt} = \frac{1}{4}\dot{D}(t)\,A^2(t) \tag{3}$$

képletbe megy át, amelyben $\bar{E}(t)$ az energia átlaga a t pillanat körüli egy periódusnyi időintervallumra. Mikor a D változása olyan lassú, hogy egy periódus alatt eltekinthetünk tőle, $\bar{E}(t)$ ugyanúgy függ $A(t)$-től, mint amikor a D konstans:

$$\bar{E}(t) = \frac{D(t)}{2}A^2(t).$$

Mivel $D = m\omega^2$, ezért konstans m-nél a körfrekvencia is gyengén függ az időtől, és így $\dot{D} = 2\,m\,\omega\,\dot{\omega}$, valamint

$$A^2 = \frac{2\bar{E}}{D} = \frac{2\bar{E}}{m\omega^2}.$$

Ezt a két képletet (3)-ba írva az

$$\dot{\bar{E}} = \frac{\bar{E}\dot{\omega}}{\omega}$$

összefüggésre jutunk, amely az $\bar{E}/\omega$ arány időbeli állandóságát kifejező

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{E}}{\omega}\right) = 0$$

képlettel ekvivalens. Az $I = \bar{E}/\omega$ arányt Ehrenfest – Einstein javaslatára – *adiabatikus invariánsnak* nevezte el. Ezt a terminológiát (és az I jelölést) használjuk általában a dinamikai mennyiségekből képzett olyan kifejezésekre, amelyek a rendszer paramétereinek *lassú* változtatásakor megtartják állandó értéküket.

A matematikai ingára áttérve azt látjuk, hogy az inga

$$E = \frac{1}{2}m r^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m g r\phi^2 \tag{4}$$

lengési energiájának mindkét tagja függ az inga r hosszától, amely a feladat lassan változó paramétere, és így

$$\frac{dE}{dt} = (m r^2\ddot{\phi} + m g r\phi)\,\dot{\phi} + m r\dot{r}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m g\dot{r}\phi^2.$$

A mozgásegyenlet most $\dot{L} = K$, ahol $L = m r^2\dot{\phi}$ a perdület (impulzusnyomaték), $K = -m g r\sin\phi \approx m g r\phi$ pedig a forgatónyomaték. A $\dot{\phi}$-t szorzó zárójelre a mozgásegyenletből most nem nullát, hanem az

$$m r^2\ddot{\phi} + m g r\phi = -2\,m r\dot{r}\dot{\phi}$$

képletet kapjuk. Ennek következtében

$$\frac{dE}{dt} = -m r\dot{r}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m g\dot{r}\phi^2. \tag{5}$$

A gondolatmenet további része ugyanolyan, mint a lineáris harmonikus oszcillátoré. Ha a lengés amplitúdója Φ, akkor az energiája

$$E = \frac{1}{2} m g r \Phi^2.$$

Az egy periódusra történő átlagolás eredménye pedig

$$\overline{\phi^2} = \frac{1}{2}\Phi^2 = \frac{\bar{E}}{m g r} \quad \text{és} \quad \overline{\dot\phi^2} = \frac{\omega^2}{2}\Phi^2 = \frac{\bar{E}}{m r^2}, \tag{6}$$

mert, mint tudjuk,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}. \tag{7}$$

Mindezt behelyettesítve az átlagolt (5) formulába, az

$$\dot{\bar{E}} = -\frac{\bar{E}\dot r}{2 r}$$

képletre jutunk, amely

$$\frac{d\left(\bar{E}\sqrt{r}\right)}{dt} = 0$$

alakba írható át és az $\bar{E}\sqrt{r}$ szorzat adiabatikus invarianciáját fejezi ki.

A (7) alapján az $\bar{E}\sqrt{r}$ adiabatikus állandósága azonban egyenértékű az $\bar{E}/\omega$ hányados adiabatikus invarianciájával. Ezt kellett igazolnunk.

Az adiabatikus invariáns és az energiamegmaradás

Képzeljünk el egy fonálingát, amely a mennyezetről lóg le, és a szál egy lyukon keresztül felmegy a padlásra, ahol egy ember tartja. Tegyük fel, hogy az ember elkezdi nagyon lassan felfelé húzni (vagy lefelé engedni) az ingát. Mekkora ΔW munkát végez, miközben az inga fonálhossza r_1-ről r_2-re változik?

Amikor az inga hossza r-ről $(r+dr)$-re változik, az ember által végzett munka

$$d W = -F_k\, dr \tag{8}$$

-rel egyenlő. Az F_k a kötélerő nagysága, pozitív szám. Mivel az inga lengésben van, a kötélerőhöz az $mg\cos\phi$ súlyerőn kívül az $m r \dot\phi^2$ centrifugális erő is járulékot ad:

$$\begin{aligned} F_k &= m r \dot\phi^2 + m g \cos\phi \approx \\ &\approx m g + m r \dot\phi^2 - \frac{1}{2} m g \phi^2. \end{aligned} \tag{9}$$

A feltevés szerint az ember olyan lassan húzza (vagy engedi) a kötelet, hogy teljesül az adiabatikusság feltétele: az inga egy lengési periódusa alatt a kötélhossz változása elhanyagolhatóan kicsi. A kötélerő egy periódusra történő átlagolását (9) alapján könnyen elvégezhetjük, mert a jobb oldalon fellépő átlagokat a (6)-ban már kiszámítottuk. Eszerint

$$\bar{F}_k = m g + \frac{\bar{E}}{2 r}, \tag{10}$$

következésképpen

$$d\bar{W} = -m g\, dr - \frac{\bar{E}}{2 r}\, dr. \tag{11}$$

A ΔW kiszámításához ezt a képletet kell integrálni r_1-től r_2-ig. A lengés $\bar{E}$ egy periódusra átlagolt energiája azonban függ r-től, ezért az integráláshoz ismernünk kell az $\bar{E}(r)$ függvényt.

Adiabatikus esetben az $\bar{E}\sqrt{r}$ szorzat állandósága az integrálást valójában triviálissá teszi. A (11) ekkor ugyanis

$$d\bar{W} = -m g\, dr + \bar{E}\sqrt{r}\, d\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)$$

alakban írható, amelynek integrálja

$$\Delta W = -m g\left(r_2 - r_1\right) + \bar{E}\sqrt{r}\left(\frac{1}{\sqrt{r_2}} - \frac{1}{\sqrt{r_1}}\right).$$

Az $\bar{E}\sqrt{r}$ a folyamat során nem változik, ezért helyettesíthetjük akár

$$\bar{E}_2\sqrt{r_2}\text{–vel, akár } \bar{E}_1\sqrt{r_1}\text{–gyel.}$$

Amikor $1/\sqrt{r_2}$ -vel szorzódik az első, amikor pedig $1/\sqrt{r_1}$ -gyel, a második lehetőséget választjuk. Így

$$\Delta W = -m g\left(r_2 - r_1\right) + \left(E_2 - E_1\right).$$

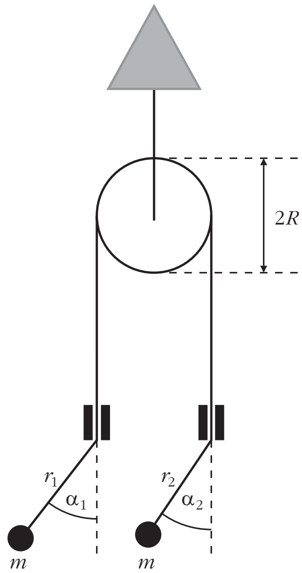
Ez a képlet biztosan korrekt, mert az energiamegmaradást fejezi ki az ingából és a kötelet húzó emberből álló rendszerre a Föld nehézségi erőterében. Ezzel demonstráltuk, hogy a matematikai ingánál $E\sqrt{r}$ adiabatikus invarianciája összhangban van ezzel a tétellel.

A csigainga[2]

A csigainga olyan állócsiga, amelynek kötélvégei fonálingává vannak kiképezve (*1. ábra*). Ez egy három szabadsági fokú rendszer, amelynek a helyzetét a két inga α_1, α_2 kitérése, valamint a csiga φ elfordulási szöge jellemzi. Ez utóbbi helyett azonban célszerűbb a

$$\xi = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} \tag{12}$$

[2] A csigainga részletes matematikai elmélete a *Kettős adiabatikus inga* című dolgozatomban található meg a honlapomon (hrasko.com/peter). Korábban ezt az érdekes objektumot tudomásom szerint még nem tanulmányozták.



1. ábra. A csigainga.

változó használata, amellyel r_1, r_2 így fejezhető ki:

$$r_1 = r_0(1+\xi), \quad r_2 = r_0(1-\xi). \tag{13}$$

Az r_0 az r_1 és az r_2 félösszege, amely állandó érték. A φ és a ξ között a

$$\varphi = \frac{r_0}{R}\xi$$

képlet adja meg a kapcsolatot, amely a nyilvánvaló $dr_1 = -dr_2 = R d\varphi$ következménye. A rendszer nem integrálható, egyetlen mozgásintegrálja az energia, ezért arra kell számítanunk, hogy a mozgása kaotikus. Csak annyit lehet róla mondani, hogy a nyugalmi állapota közömbös egyensúlyi helyzet: a legkisebb lökésre a kötél leszalad a csigáról.

Tegyük fel azonban, hogy bizonyos kezdőfeltételekhez tartozó mozgás során a csiga forgása olyan lassú ($\dot{\xi}$ olyan kicsi), az ingák lengése pedig olyan gyors, hogy az r_1, r_2 fonálhosszak változása adiabatikusnak tekinthető. Ebben az esetben a ξ *ingadozni fog* egy minimális és maximális érték között. Ez abból következik, hogy az

$$I = \bar{E}\sqrt{r}$$

adiabatikus invariáns állandósága miatt (6) következtében a centrifugális erő annál kisebb, minél hosszabb a szál:

$$m\,r\overline{\dot{\phi}^2} = \frac{\bar{E}}{r} = \frac{I}{r^{3/2}}.$$

Amikor például r_1 nő, akkor az 1. ingára ható centrifugális erő csökken, a 2. ingára ható pedig nő, és ez a tendencia a csiga forgásirányának megfordulásához vezethet. Ekkor az ingák lengése stabilizálja a rendszert.

Amikor az adiabatikusság teljesül, a rendszer integrálhatóvá válik. Ez az energiaképlet alapján látható be. A csigainga energiája három tagot tartalmaz: a két inga lengése, valamint az ingadozás energiáját (a potenciális energiával nem kell törődnünk, mert konstans: $mg(r_1+r_2) = 2\,mg\,r_0$):

$$E_1 = \frac{1}{2}m\,r_1^2\,\dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2}m\,g\,r_1\,\alpha_1^2 \quad (\alpha_1 \ll 1) \tag{14}$$

$$E_2 = \frac{1}{2}m\,r_2^2\,\dot{\alpha}_2^2 + \frac{1}{2}m\,g\,r_2\,\alpha_2^2 \quad (\alpha_2 \ll 1) \tag{15}$$

$$K_\xi = \frac{1}{2}m\,\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m\,\dot{r}_2^2 + \frac{1}{2}\Theta\dot{\varphi}^2 = L\,m\,r_0^2\,\dot{\xi}^2, \tag{16}$$

ahol Θ a csiga tehetetlenségi nyomatéka, és

$$L = \frac{m + \dfrac{\Theta}{2R^2}}{m}. \tag{17}$$

Adiabatikus közelítésben azonban

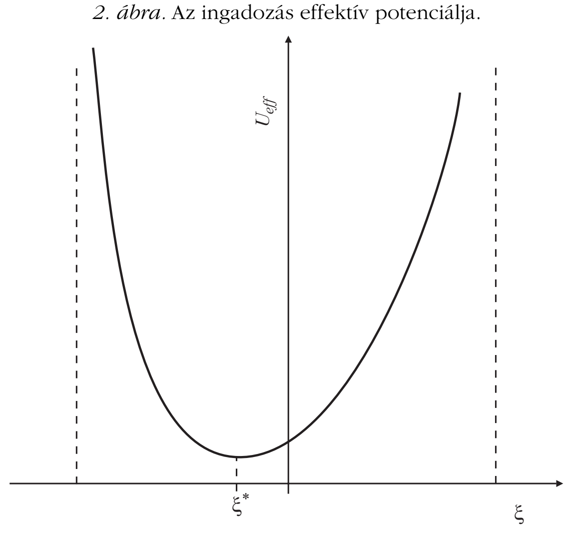
$$E_1 = \frac{I_1}{\sqrt{r_1}} = \frac{I_1/\sqrt{r_0}}{\sqrt{1+\xi}} \equiv \frac{I_1'}{\sqrt{1+\xi}}, \quad E_2 = \frac{I_2}{\sqrt{r_2}} = \frac{I_2/\sqrt{r_0}}{\sqrt{1-\xi}} \equiv \frac{I_2'}{\sqrt{1-\xi}}. \tag{18}$$

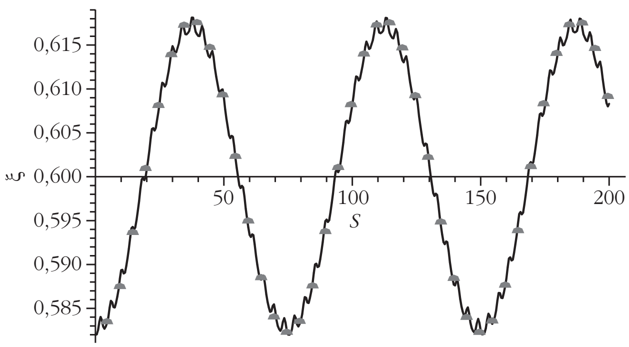
Ezekben a képletekben az I_1', I_2' mennyiségek konstansok, amelyeket a kezdőfeltételek határoznak meg. A rendszer energiájára ebben a közelítésben tehát az $E = K_\xi + U_{eff}(\xi)$ képletet nyerjük, amely egy 1-szabadsági fokú objektum mozgását írja le az

$$U_{eff}(\xi) = \frac{I_1'}{\sqrt{1+\xi}} + \frac{I_2'}{\sqrt{1-\xi}} \tag{19}$$

effektív potenciálban (*2. ábra*).

2. ábra. Az ingadozás effektív potenciálja.





3. ábra. A ξ ingadozása ($\omega_2/\omega_1 \approx 2$).

Az ilyen típusú feladatok mindig megoldhatók. A függőleges tengely E pontján keresztül párhuzamost rajzolunk a vízszintes tengellyel. Ez a ξ_{min} és a ξ_{max} pontokban metszi az $U_{eff}(\xi)$ görbét. Ennek következtében az adott E energián az ingadozás a $\xi_{min} \le \xi \le \xi_{max}$ tartományban fog történni. Az ingadozás periódusidejének felét úgy számíthatjuk ki, hogy az

$$E = L\, m\, r_0^2 \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + U_{eff}$$

képletet megoldjuk dt-re és integráljuk az ingadozás tartományára:

$$T = 2\, L\, m\, r_0^2 \int_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} \frac{d\xi}{\sqrt{E - U_{eff}(\xi)}}. \qquad (20)$$

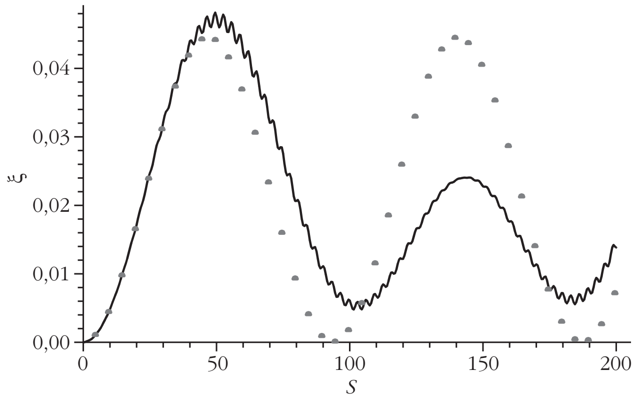
Mint látjuk, az ingadozás annál „lomhább”, minél nagyobb az L paraméter, amelyet emiatt a rendszer *lomhaságának* nevezhetünk. Az adiabatikus közelítés annál jobb, minél lassúbb az ingadozás, vagyis minél nagyobb az L.

A lengések körfrekvenciája az ingadozás következtében folyamatosan nő és csökken valamilyen konstans ω_1 és ω_2 érték körül. Ezeket az értékeket is a kezdőfeltételek határozzák meg. Az adiabatikussághoz az kell, hogy ezek sokkal nagyobbak legyenek, mint az ingadozás

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}$$

körfrekvenciája.

Amikor az adiabatikusság feltételei teljesülnek, az inga valóban periodikus ingadozásokat végez a (20) által meghatározott periódusidővel. A *3. ábrá*n[3] a folytonos görbe a pontos mozgásegyenlet alapján történő számítás eredménye, amelyre szorosan illeszkednek az adiabatikus közelítés pontjai. A vízszintes tengelyen $s = \omega_0 t$ a dimenziótlanított idő ($\omega_0 = (g/r_0)^{1/2}$). Mint látható, az ingadozás tényleg periodikus és a periódus megegyezik a (20)-ból számítható értékkel. A görbe csipkézettsége az ingák lengésének következménye. Az adiabatikus közelítés ezt kisimítja. Azt



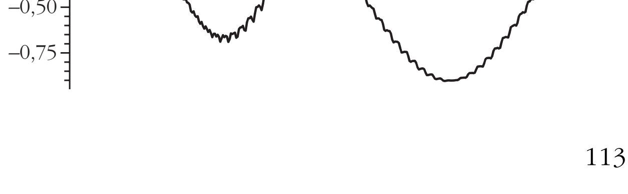
4. ábra. A ξ ingadozása ($\omega_2/\omega_1 \approx 1$).

várnánk, hogy az ingadozás szigorú periodikussága, amely egy közelítő eljárás, az adiabatikus approximáció következménye, az idő előrehaladtával fokozatosan elromlik, de a pontos mozgásegyenletek numerikus megoldásában ennek semmi jele.

Választhatók azonban olyan kezdőfeltételek, amelyeknél szintén elvárható volna az adiabatikusság teljesülése, a pontos mozgásegyenletek megoldása mégsem periodikus. Ilyen esetre vonatkozik a *4. ábra,* amelyen szintén a folytonos görbe a pontos megoldás, a pontok pedig az adiabatikus közelítés. A magyarázat valószínűleg az ω_2/ω_1 arányban keresendő. A *4. ábra* esetében ez az arány 1-gyel egyenlő és ez azt sugallja, hogy *rezonáns kölcsönhatás* léphet fel a két inga között, amely elrontja az ingák I_1, I_2 adiabatikus invariánsainak időbeli állandóságát. A részletesebb analízis azt bizonyítja, hogy ebben az esetben az ingadozásnak megfelelő időskálán lassú „lebegés” jön létre a két invariáns között (lásd az *5. ábrá*t, amelyek dimenziótlanított invariánsokra vonatkoznak). Amikor $\omega_2/\omega_1 = 2$, az ingák kölcsönhatása – úgy látszik – nem vezet az adiabatikus invariánsok szisztematikus változásához.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy az inga mozgása, az előzetes várakozással ellentétben, nem mindig kaotikus, mert adott paraméterek mellett a kezdőfeltételek bizonyos tartományában a két adiabatikus invariáns két új mozgásállandó szerepét tölti be az energia mellett. Noha ezek bizonyos értelemben csak közelítően mozgásállandók, ezt a funkciójukat a várhatónál sokkal sikeresebben teljesítik. Érdekes lenne meghatározni e tartomány határait a fázistérben.

5. ábra. Az adiabatikus invariánsok lebegése ($\omega_2/\omega_1 \approx 1$).



[3] Ezt és a következő grafikonokat a 2. lábjegyzetben idézett dolgozatomból vettem át.