

# Fizikai Szemle

## MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A Matematikai és Természettudományi Értesítőt az Akadémia 1882-ben indította  
A Matematikai és Fizikai Lapokat Eötvös Loránd 1891-ben alapította

LXIII. évfolyam

2. szám

2013. február

## PARRONDO-PARADOXON

### – AVAGY A KEVERT STRATÉGIÁK CSODÁJA

Nagy Péter – Kecskeméti Főiskola, GAMF Kar  
Tasnádi Péter – Eötvös Loránd Tudományegyetem, TTK

*Több dolgok vannak földön és égen,  
Horatio, mintsem bölcselmetek  
Álmodni képes.*

*W. Shakespeare: Hamlet*

Hétköznapjaink során, folyóiratokban, televízióban és rádióadásokban egyre gyakrabban találkozunk kockázatbecslésekkel, döntéshozatalt megkönnyítő játékelméleti következtetésekkel, valószínűségi becslésekkel. A természettudományos törvények egy része is valószínűségi megfogalmazásban jelenik meg, és a mindennapok döntéshozatalaiban valóban fontos szerepet játszanak a valószínűségi megfontolások. Emiatt a középiskolában és a felsőoktatás bevezető kollégiumaiban is meg kell mutatnunk tanítványainknak azokat a jellegzetes problémákat, amelyek megoldásakor érdemes valószínűségi megközelítéssel élni. E gondolatmenetek egyik legkézzelfoghatóbb és leglátványosabb megjelenése a játékelméletben található, ezért cikkünket játékelméleti bevezetéssel indítjuk. Olyan gondolatokat mutatunk be, amelyek alkalmazása mind a hétköznapi életben, mind a természettudományos következtetésekben meglepő eredményre vezet. A gondolatmenetek megértéséhez először tömören ismertetjük a játékelméleti stratégiákkal kapcsolatos fogalmakat.

A tömör leírást oldja a cikk színes, részletes matematikai számításokat tartalmazó elektronikus változata, amely megtalálható tematikus oldalunkon (<http://csodafizika.hu/parrondo>), ahol az anyagot sok kép, videóval, szimulációval és futtatható alkalmazásokkal illusztráljuk. A honlapon a témához kapcsolódó link-gyűjtemény is segíti a további tájékozódást.

### Egy kis játékelmélet, tiszta és kevert stratégiák

A legtöbb játék több lépésből áll, és a játékosoknak lépésenként kell újabb és újabb döntéseket hozniuk. Ha a játékos döntéseit valamilyen egyértelmű szabály alapján hozza meg, tehát ebből a szabályból adott helyzetben mindig ugyanaz a lépés következik, akkor a játékelmélet szerint tiszta stratégiát játszik. A nem tiszta stratégiák alkalmazásakor a döntéshozatal nem egyértelmű. Nem tiszta stratégiát választ például az a futballjátékos, aki ugyanabban a szituációban éppen akkori hangulata, megérzése szerint passzolja tovább a labdát. Kevert stratégiás játékmód esetében a játékos a játék folytatásának különböző lehetőségei között előre meghatározott valószínűséggel választ, azaz az általa meghatározott valószínűségek szerint véletlenszerűen hozza meg döntését.

A játékelmélet szerint minden játékos számára mindig létezik optimális kevert stratégia, amelyet az úgynevezett Nash-egyensúly határoz meg.<sup>1</sup>

A véletlenszerű kevert stratégia alkalmazása is jól illusztrálható egy labdarúgóval, aki csapata egyik tizenegyes-specialistája és minden edzésen sokat gya-

<sup>1</sup> Az elvet *John Nash* matematikus fedezte fel 22 éves doktoranduszként. A felfedezés körülményeinek legendája megnézhető a Nash életét feldolgozó *Egy csodálatos elme* című mozifilmről vett részleten, amely megtalálható honlapunkon.



1. ábra

korolja a tizenegyesrúgást. Tapasztalata szerint a legbiztosabb, legerősebb, az egyéni rúgótechnikájához legjobban illeszkedő lövése a bal alsó sarokra csavartan meglőtt labda, de alig rosszabb hatásfokkal működik a középére a lécs alá „csőrrel” tisztán megrúgott lövése is. Természetesen máshova is jól lövi a labdát (például a jobb felső sarokba), de azért mégsem olyan pontossággal és megbízhatósággal, mint a bal alsó sarkos lövést. Hova rúgja adott, éles szituációkban a tizenegyeset? Világos, ha mindig a legjobb lövését választja, akkor hamar kiismerik (manapság természetesen, hogy az ellenfeleket videón tanulmányozzák) és a kapusok eleve a bal alsó sarokra vetődnek majd. Ezért érdemes néha máshova lőnie, még ha azok a lövések kissé rosszabbak is. Kiderül, hogy az optimális stratégia valami ilyesmi: a játékos a büntető rúgás előtt titokban feldob egy húszoldalú „kockát”, ha az 1–14 számok valamelyike jön ki (azaz 70% valószínűséggel), akkor a bal alsó sarokra csavarja a labdát, ha a 15–19 számok valamelyikét kapja (tehát 25% valószínűséggel), akkor középére a lécs alá „csőrrel” tisztán megrúgott lövését választja, ha pedig 20 adódik (5% valószínűséggel), akkor a jobb felső sarkot célozza meg.

A fenti fiktív példa helyett a büntetőrúgások több európai bajnokságból összegyűjtött statisztikájából adódó eredményeket tárgyaljuk a cikk elektronikus változatának függelékében az [1] tanulmány alapján.

A tudomány számtalan konkrét szituációban – a fizikától kezdve a biológiáig, a közgazdaságtól a szociológiáig – megmutatta, hogy adott helyzetben mindig valamilyen véletlenszerű kevert stratégia az optimális. Például az állatok táplálékkeresési mozgására irányuló megfigyelések azt mutatják, hogy egyes állatfajok (például ragadozó halak, albatroszok, majmok) nem egyszerű (Brown-eloszlású) bolyongással, hanem az úgynevezett Lévy-eloszlást követve mozognak: ebben az eloszlásban a rövidtávú véletlenszerű bolyongást ritkán előforduló hosszabb lépések bontják meg (1. ábra). Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a táplálékkeresők véletlenszerű kevert stratégiát alkalmaznak: a lokális, rövid távon végzett bolyongást (kicsiny terület átfésülését) véletlenszerűen váltogatják a nagyobb léptékű,

határozottabb irányultságú mozgással (területváltás). A mikro-rendszereket leíró kvantumállapot a rendszer makroszkopikusan (klasszikus fizikai szituációkban) mérhető tulajdonságaihoz rendelhető állapotainak lineáris kombinációja, komplex amplitúdókkal súlyozott kevert állapot (izgalmas és lényegi eltérés az, hogy a kimeneteli valószínűségeket ezen amplitúdók négyzetei adják). Egyértelműen kijelenthető, hogy a kevert stratégiák a tudományokban és a mindennapi életben egyaránt kiemelt jelentőséggel bírnak.

## A paradoxon

A kevert stratégiákra vonatkozóan *Juan Parrondo*, a madridi egyetem fizikusa igen különös és döbbenetes felfedezést tett, ami erősen foglalkoztatja a legkülönbözőbb tudományterületek (például fizika, biológia, közgazdaságtan és szociológia) képviselőit. Azt a ma már Parrondo-paradoxon néven ismertté vált – e helyen játékelméleti megfogalmazásban interpretált – állítást bizonyította, hogy *léteznek olyan stabilan veszteséges stratégiák, amelyeket keverten játszva – akár véletlenszerű kevert stratégiával, akár valamilyen fix minta szerint keverve – az eredmény folyamatos, nagy nyereség lehet.*

## A Parrondo-játék prototípusa

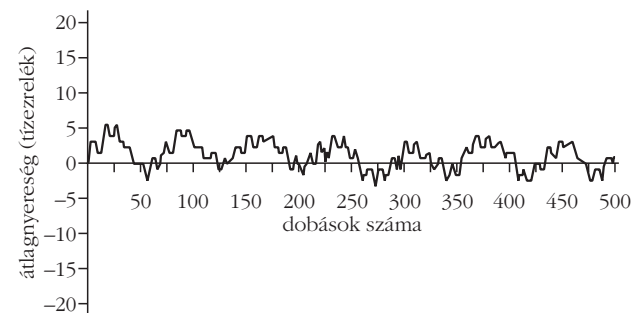
Tekintsünk két pénzfeldobásos szerencsejátékot, amelyekben minden egyes pénzfeldobásnál legyen a tét egységnyi. Mindkét játék során a nyereményt az határozza meg, hogy mit dobunk egy pénzérmével: fej esetén egységnyi a nyereségünk (+1), írás esetén egységnyi a veszteségünk (–1).

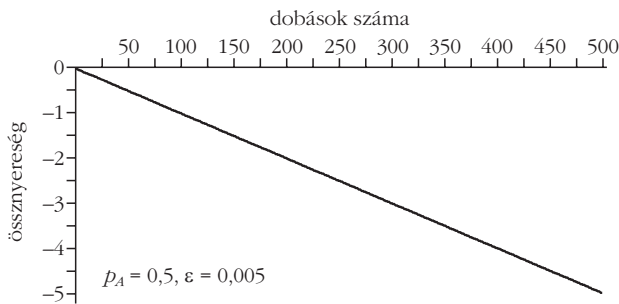
Az *A* játék során csak egy pénzérmét használunk.

Ha a pénzérme szimmetrikus (azaz a fej és írás azonos eséllyel jön ki), akkor a játék dobásonkénti várható nyeresége nyilvánvalóan 0, azaz sok játékot lejátszva a nyeremény értéke közel nulla marad. A 2. ábra a játék számítógépes szimulációját mutatja (a szimulációs ábrákon minden esetben több futtatás, azaz sok lejátszott játék átlagos eredményét jelenítjük meg).

Ha a pénzérme nem szimmetrikus, mondjuk  $(p_A - \epsilon) \neq 0,5$  valószínűséggel fej,  $(1 - p_A + \epsilon)$  valószínűséggel pedig írás jön ki, akkor *az egy dobásra eső nyereség*

2. ábra. Forrás: <http://www.datagenetics.com/blog/august22012/index.html>





3. ábra. Forrás: <http://www.datagenetics.com/blog/august22012/index.html>

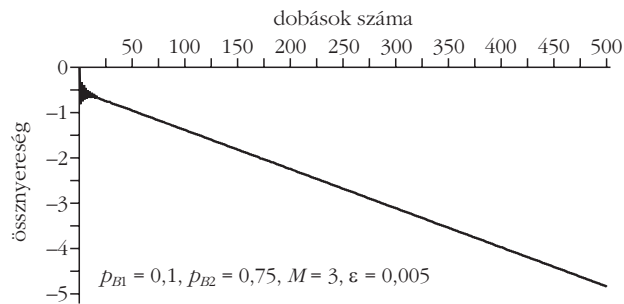
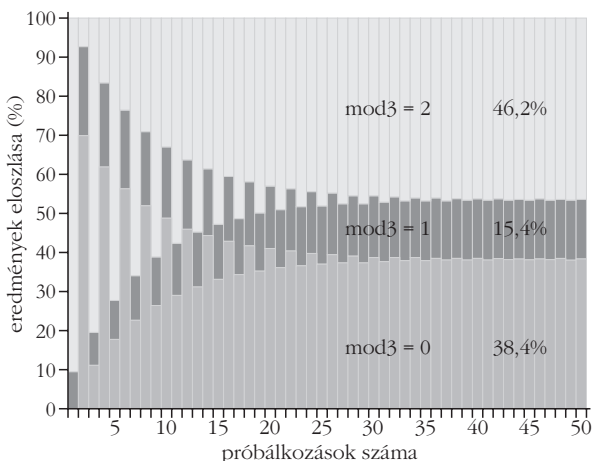
várható értéke nem nulla, például  $p_A = 0,5$  és  $\epsilon = 0,005$  esetén a játék hosszú távon nyilvánvalóan veszteséges, a nyereség várható értéke  $\langle n y_1 \rangle^{(A)} = -0,01$  (az  $\epsilon$ -nal megadott aszimmetria bevezetése talán indokolatlannak tűnik, de a szakirodalom egyfajta kontrollparaméterként használja). A játék szimulációját a 3. ábra mutatja.

A B játék kicsit bonyolultabb. Itt két pénzérmét használunk, és meghatározott szabály szerint dobunk vagy az egyikkel, vagy a másikkal. Az egyik (B1) érmét „rossz” érmének nevezzük, mert feldobva  $(p_{B1} - \epsilon)$  valószínűséggel ( $p_{B1} \leq 0,5$  és  $0 \leq \epsilon$ ) jön ki fej és  $(1 - p_{B1} + \epsilon)$  valószínűséggel írás, a másikat (B2) pedig „jó” érmének, mert vele dobva  $0,5 \leq (p_{B2} - \epsilon)$  valószínűségű a fej, és  $(1 - p_{B2} + \epsilon)$  valószínűségű az írás. A játék során a B1 érmével akkor dobunk, ha a játék kezdete óta felhalmozott nyereségünk az  $M$  ( $M$  tetszős szerint választott) egész számmal osztható, a B2 érmével pedig akkor, ha nem osztható.

Példaként tekintünk az  $M = 3$ ,  $p_{B1} = 0,1$ ,  $p_{B2} = 0,75$  és  $\epsilon = 0,005$  klasszikus Harmer–Abbott féle (továbbiakban H–A) esetet [2]. Noha nem annyira nyilvánvaló, mint az A játék esetén, a B játék is hosszú távon mindenképpen veszteséges.

Első – kézenfekvőnek tűnő – gondolatunk szerint a B1 érmével történő dobás valószínűsége  $p(B1) = 1/3$ , a B2-vel történő pedig  $p(B2) = 2/3$ , amivel az egy dobásra jutó nyereség várható értékére (viszonylag könnyű számolással)  $+0,05668$  adódik, tehát a játék hosszútávon nyereséges lenne. Azonban számítógé-

5. ábra. Forrás: <http://www.datagenetics.com/blog/august22012/index.html>



4. ábra. Forrás: <http://www.datagenetics.com/blog/august22012/index.html>

pes szimulációval játszva a játékot egészen más tapasztalunk (4. ábra).

Világosan látható, hogy a játék veszteséges, az egy játékra eső átlagos nyereség az egyenes meredekségéből becsülhető: például 50 játék után mintegy  $-0,95$  egység, míg 450 játék után nagyjából  $-4,45$  egység, így a meredekség, azaz a játékankénti várható nyereség körülbelül

$$\frac{(-4,45) - (-0,95)}{450 - 50} = -0,00875!$$

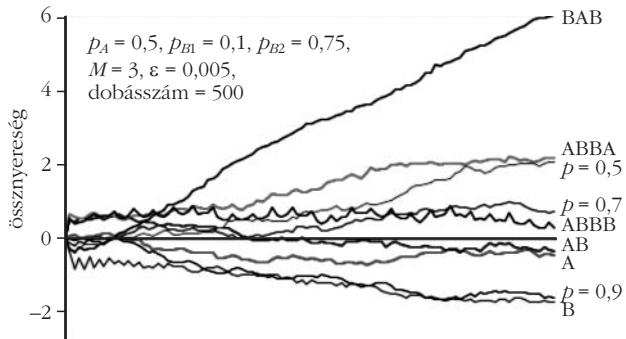
Ennek oka az, hogy a játék során az egyes (0, 1 és 2) maradékot adó „össznyeremény-állapotok” nem azonos ( $1/3$ ) valószínűségűek, hanem hosszú távon nem-egyenletes egyensúlyi eloszláshoz tartanak (a játékmenetek sztochasztikus Markov-folyamatok, amelyek egyensúlyi határeloszlásait a honlapunkon kipróbálható javascript alkalmazással numerikusan határozzuk meg). A számítógépes szimulációval kapott eloszlások alakulását az 5. ábra mutatja.

Látható, hogy a 0 maradékosztályú össznyeremény-állapot – azaz a B1 „rossz” érmével való dobás – valószínűsége, nagyobb  $1/3$ -nál, így kissé megnő a vesztes dobás esélye, ami végső soron azt eredményezi, hogy az egy játékra eső átlagos nyereség értéke  $-0,00868$  lesz, ami igen jó egyezést mutat a szimulációból kapott  $-0,00875$  becsléssel.

Van tehát egy egyszerű (A) és egy bonyolultabb (B) játékunk (stratégiánk), mindkettő stabilan (hosszú távon) veszteséges. Parrondo fantasztikus felfedezése az, hogy ha ezt a két játékot keverten játsszuk, akár véletlenszerűen döntve el, hogy éppen melyik stratégia szerint játszunk, akár megfelelő fix séma szerint felváltva játszva a két stratégiát, akkor hosszútávon stabilan nyereségre tehetünk szert! A várakozással ellentétben tehát a kevert játék nem marad veszteséges, hanem alapvető változás áll be: a két veszteséges stratégia (véletlenszerű vagy adott séma szerinti) változtatásával nyereséges játék alakulhat ki!

A következőkben egy véletlenszerű kevert stratégiát és egy fix minta szerinti kevert stratégiát tárgyalunk meg, továbbra is a  $p_A = 0,5$ ,  $M = 3$ ,  $p_{B1} = 0,1$ ,  $p_{B2} = 0,75$  és  $\epsilon = 0,005$  (H–A) esetet véve példaként.

Nézzük először a véletlenszerű kevert stratégiát! Minden egyes dobás előtt véletlenszerűen választunk, hogy az A vagy a B játék szerint játszunk,  $p$  valószínűséggel az A játékot,  $(1-p)$  valószínűséggel pedig B játékot választjuk.



6. ábra. A <http://www.cut-the-knot.org/ctk/Parrondo.shtml> oldal szimulációját használva.

Ekkor például  $p = 0,5$  esetén az egy dobásra eső átlagos nyereség értéke  $+0,0157$  lesz, vagyis a két stabilan veszteséges játékot véletlenszerű kevert stratégiával játszva hosszú távon nyereségesek leszünk! A számítások azt mutatják, hogy  $0,0703 < p < 0,8471$  értéktartományban a véletlenszerű kevert stratégia nyereséges (körülbelül  $p = 0,41$  értéknél maximális),  $0 < p < 0,0703$  és  $0,8471 < p < 1$  értékeknél veszteséges.

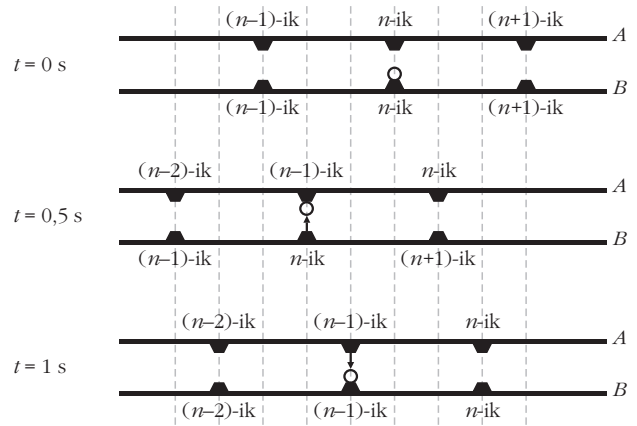
Játsszuk most az  $A$  és  $B$  játékot felváltva, azaz az  $AB$  ismétlődő séma szerint. A számítások szerint az egy dobásra eső átlagos nyereség ekkor  $-0,00674$ , tehát bár a játék továbbra is veszteséges marad, a veszteség mindkét eredeti játékhoz képest csökken, holott intuíciónk szerint a két játék ötvözetével a veszteségnek a két eredeti játék vesztesége között kellene lennie. Találhatók azonban olyan sémák, amelyek hosszú távon nyereségesek, például az összes nem homogén hármas csoport (például  $BAB$ ), míg a négyes csoportok között egyaránt találhatók nyereségesek ( $ABBA$ ) és veszteségesek ( $ABBB$ ).

A fentebb tárgyalt játékok on-line számítógépes szimulációját kipróbálhatjuk a [3] helyen található java-applet segítségével. A 6. ábrán az Abbott-féle esetre végzett futtatás eredménye látható. A kép öt nyereséges (a  $BAB$ , az  $ABBA$  és az  $ABBB$  minták, valamint a  $p = 0,5$  és  $p = 0,7$  véletlenszerű kevert stratégia), és négy veszteséges stratégia (az eredeti  $A$  és  $B$  játékok, az  $AB$  minta, valamint a  $p = 0,9$  véletlenszerű kevert stratégia) eredményét mutatja.

Az Excel táblázatkezelőt ismerő és használó olvasóink figyelmébe ajánljuk a [4] fájlt, amelyhez használati leírást is olvashatnak angol nyelven [5].

## Egy szemléletes mechanikai modell

A fentiek szemléltetésére egyszerű mechanikai modellt alkothatunk. Vegyünk két párhuzamos ( $A$  és  $B$ ) fogas-szalagot, amelyek egy egyenes mentén mozognak (legyen a jobbra irány a pozitív, a balra a negatív). Mindkét fogas-szalagon a fogak azonos  $L = 0,15$  m távolságra vannak, adott  $t = 0$  időpillanatban a két szalagon a fogak pontosan egybeesnek, a fogakat a könnyebb áttekinthetőség érdekében sorszámozzuk meg (7. ábra). Az  $A$  fogas-szalag egyenletes  $0,1$  m/s sebességgel mozog jobbra. A  $B$  fogas-szalag viszont alternáló



7. ábra

mozgást végez,  $0,5$  s-ig  $-0,2$  m/s sebességgel (balra) mozog, majd  $0,5$  s-ig  $+0,4$  m/s sebességgel (jobbra) mozog, tehát a  $B$  szalag átlagsebessége is  $0,1$  m/s, azaz jobbra mutató eredő mozgása van.

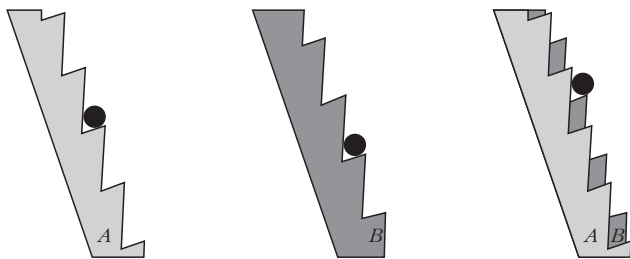
A fogas-szalagok egyikén teher helyezkedik el (a 7. ábrán kis karika szemlélteti). A két szalag között „kicszerelődési kölcsönhatás” működik, ha a szalagokon két fog éppen szembekerül egymással, akkor a teher az aktuális szalagról (amelyen eddig volt) áttevődik a másik szalag szemben levő fogára.

Kövessük nyomon a fogas-szalagok és a teher mozgását egy másodpercig. A kezdő pillanat az ábra felső részén látható, a teher éppen ekkor lépett át az  $A$  szalag  $n$ -ik fogáról a  $B$  szalag  $n$ -ik fogára.  $0,5$  s alatt az  $A$  szalag  $0,05$  m (1 segédvonalnyi) távolságot tesz meg jobbra, míg a  $B$  szalag  $0,1$  m (2 segédvonalnyi) távolságot tesz meg balra. Ekkor a  $B$  szalag  $n$ -ik foga, ahol a teher eddig volt, éppen szembe kerül az  $A$  szalag  $(n-1)$ -ik fogával, így a teher átkerül az  $A$  szalagra (az ábra középső része). A következő  $0,5$  s alatt az  $A$  szalag ismét  $0,05$  m (1 segédvonalnyi) távolságot tesz meg jobbra, míg a  $B$  szalag  $0,2$  m (4 segédvonalnyi) távolságot mozdul el szintén jobbra. Ekkor az  $A$  szalag  $(n-1)$ -ik foga, ahol a teher eddig volt éppen szembe kerül a  $B$  szalag  $(n-1)$ -ik fogával, így a teher átlép a  $B$  szalagra (az ábra alsó része).

Egy másodperc alatt tehát mindkét szalag  $0,1$  m (2 egységnyi) távolságot mozdul el jobbra, ezzel szemben a teher  $0,05$  m (1 egység) hossznyira balra került! *A szalagok és a teher mozgását hosszabb ideig figyelve azt látnánk tehát, hogy miközben mindkét fogas-szalag jobbra halad, a közöttük átlépegető (de a mozgásegyenes irányában passzív) teher balra halad!*

A fogas-szalagos mechanikai modell könnyen átfogalmazható például mozgólépcsős változatra: fogas-szalagok helyett mozgólépcsők, jobb-bal mozgás helyett le-fel mozgás, fogak helyett lépcsőfokok és teher helyett utas<sup>2</sup> helyettesítendő. A lényeg a 8. áb-

<sup>2</sup> A mozgólépcsős változat on-line számítógépes szimulációja kipróbálható a [3] helyen található java-applet segítségével, illetve az erről készült film megtekinthető egy rövid magyar alámondásos [6] videón.

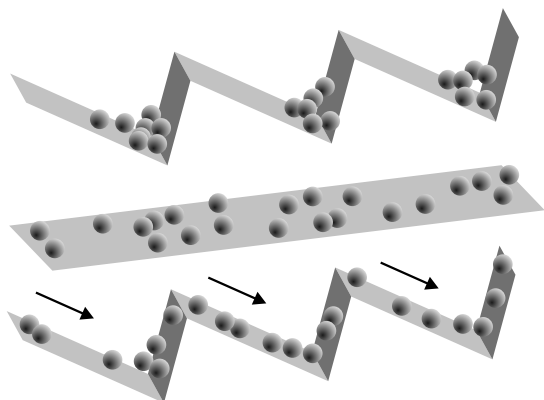


8. ábra

rán foglalható össze: mind a világos (A), mind a sötét (B) mozgólépcső lefelé halad. Az A lépcső egyenletesen lefelé, a B lépcső pedig alternáló mozgással: rövid ideig felfelé, majd ugyanannyi ideig kétszer akkora sebességgel lefelé mozog, így végül B átlagsebessége is lefelé mutat, még hozzá azonos értékű A sebességével. A mozgás élményszerűvé tehető a honlapon található szimulációval. Ott a két mozgólépcsőt külön-külön üzemeltetve tapasztalhatjuk, hogy a fekete golyóval reprezentált utas bármelyik lépcsőn lefelé mozog. Ha azonban egyszerre működtetjük a két mozgólépcsőt, és mozgásukat a fenti modell szerint szinkronizáljuk, (tehát az alternáló lépcső  $n$ -ik foka a másik lépcső  $n$ -ik és  $(n-1)$ -ik foka között „rezeg”), akkor azt láthatjuk, hogy az utas felfelé halad a két egyenként lefelé haladó mozgólépcsőn (az ábra jobb oldala).

Parrondo tulajdonképpen ilyen jellegű fizikai problémákon dolgozva ismerte fel a ma már a nevét viselő paradoxont. Az általa készített modellben az egyérmés *A játék* sima felszínű, adott lejtésszögű lejtőnek felel meg, a játékban fogadva hosszú távon csak veszíteni lehet, *a lejtőn pedig mindig lefelé (balra) csúszik a tárgy*. A kétérmés *B játék* olyan fűrészfogazott lejtőnek feleltethető meg, amelynek *átlagos lejtése* ugyancsak *balra mutat, fűrészfogai azonban aszimmetrikusak. A lejtőre helyezett tárgy természetesen most is balra-lefelé mozog*. Képzelnék el azonban, hogy a fogazott lejtő sűrű egymásutánban változtatja felszínét, először sima, majd átmege fogazottba, majd újra kismul, azaz a lejtő felszíne hol az egyik, hol a másik alakot vesz fel (9. ábra). *Megfelelően választva a hajlásszöveget, a fűrészfogak aszimmetriáját és a váltogatások időzítését, azt tapasztalhatjuk, hogy a felszínét változtató lejtőre tett tárgy jobbra-felfelé halad*.

9. ábra



## Kitekintés

Bár Parrondo felfedezése – mint látni fogjuk – valóságos lavinát indított el, és a legkülönbözőbb tudományterületek művelőinek intenzív munkája számos publikációt eredményezett, a kérdéskörnek – sajnos – magyar nyelven hozzáférhető irodalma szinte egyáltalán nincs. Az interneten (a Google és Yahoo keresőkkel) csak két oldalt találtunk: *Jéki László* 2000-ben a Magyar Tudományban megjelent [7] cikkét és *Korpa Bálint* 2005-ös [8] írását.

Létezik viszont angol nyelvű hivatalos oldal [9], amelyen számos fontos és érdekes információt találhatunk, külön felhívjuk a figyelmet a *Useful links* és a *Publications* menüpontokra, ez utóbbihoz tartozó lapon meggyőződhetünk arról, hogy a tudományterületek milyen széles skáláján folyik kutatás e témában. Az alábbiakban – bevallottan szubjektív – válogatást, áttekintést adunk a Parrondo-paradoxonhoz kapcsolható érdekes kutatási eredményekből.

Az úgynevezett *molekuláris (Brownian ratchet) motorok* modelljei (lásd például [10]-ben) értelmezhetőek a Parrondo-paradoxon interpretációjaként [11]. Két, külön-külön például balra mutató eredő erőhatású potenciált kapcsolgatva a potenciáltérben mozgó mikrorészecskék statisztikus átlagban jobbra haladhatnak (a Parrondo féle lejtős kapcsolgatással való szoros analógia igen nyilvánvaló). A témáról magyar nyelven a *Fizikai Szemle* 1996/6. számában megjelent *Biológiai mozgások statisztikus fizikai modelljei* című cikket ajánljuk olvasásra. A Brown-motorok működését szimuláló [12] java-applet elérhető saját weboldalunkról is [13].

A [14]-ben olvasható cikk a Parrondo-paradoxon genetikai alkalmazását adja az *episztázis* (az a jelenség, amikor egy gén hatása elnyomja egy másikét) modellezésében.

Nagyon izgalmas eredmény az úgynevezett *Allison-keverék* (Allison mixture) [15]. Képzelnék el két véletlen számsorozatot, amelyek autokorrelációs indexe nulla és függetlenek egymástól. Az általánosítás megszorítása nélkül – az egyszerűség kedvéért – tekintsünk itt két bináris (csak 0 és 1 számokat tartalmazó) sorozatot. Készítsünk egy harmadik sorozatot úgy, hogy a két eredeti sorozat elemeit véletlenszerűen keverve használjuk a következő (Markov típusú) szabály szerint: ha az új sorozat  $n$ -ik indexű helyén álló száma az 1. sorozatból származott, akkor a következő elem legyen  $(1-\alpha_1)$  valószínűséggel az 1. sorozat következő,  $(n+1)$  indexű száma, illetve  $\alpha_1$  valószínűséggel a 2. sorozat következő  $(n+1)$  indexű száma, ha pedig az aktuális  $(n)$  indexű helyen álló szám a 2. sorozatból származott, akkor a következő szám legyen  $(1-\alpha_2)$  valószínűséggel a 2. sorozat következő  $(n+1)$  indexű száma, illetve  $\alpha_2$  valószínűséggel az 1. sorozat következő  $(n+1)$  indexű száma. A két független, autokorrelálatlan sorozatból tehát teljesen véletlenszerűen álljuk össze a harmadik sorozatot, így nyilvánvalóan azt várjuk, hogy az új sorozat  $\rho$  autokorrelációs indexe is nulla lesz.

Valójában azonban gyakran nem-nulla érték adódik:

$$\rho = \frac{1}{\sigma^2} \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} (\mu_1 - \mu_2)^2 (1 - \alpha_1 - \alpha_2),$$

ahol  $\mu_1$  és  $\mu_2$  a két eredeti sorozat várható értéke,  $\sigma^2$  pedig az új sorozat szórásnégyzete (varianciája). Ez a tény új távlatokat nyit sok tudományterületen, mint például az informatika, a genetika, vagy az önszerveződő rendszerek fizikája.

A Parrondo játék (kvantum)optikai modelljét tárgyalja a [16] cikk, amely a korábban említett Brownmotorok tervezésére lehet alkalmas.

A [17] helyen található cikk a Parrondo-paradoxon kvantumfizikai interpretációját tárgyalja és mutatja be annak kvantumhálózatokon való implementációját.

A [18] tanulmány a Parrondo játék kódtermörítését alkalmazását tárgyalja.

A káosz csak néhány évtizedes jelenségkör a fizikában, és a kaotikus rendszerek szabályozása sokáig lehetetlen célnak minősült: „Egy kaotikus folyamat általában nem jósolható meg és nem is szabályozható. Nem jósolható meg, mert már nagyon kicsiny zavaró hatás is a folyamat exponenciálisan növekvő perturbációját eredményezi. Nem szabályozható, mert a kicsiny zavarások csak más kaotikus állapothoz, nem pedig valamilyen stabil, megjósolható alternatívához vezetnek.” (*Freeman Dyson: Engineers Dreams*, 1988). Ma már számos módszer létezik a káosz „megregulálására”, izgalmas, új, nem-perturbatív metódust mutat be például a [19] helyen olvasható cikk, amely megmutatja, hogy két kaotikus viselkedésű rendszer között kapcsolgatva az eredő viselkedés szabályos lehet.

Nyilván sokakban vetődik fel a kérdés, hogy miként lehetne ezt az izgalmas felfedezést a hétköznapi életben kamatoztatni, például a szerencsejátékokban vagy mondjuk a tőzsdén. A szerencsejátékok vonatkozásában érdekes és részletes elemzés található a [20] helyen a pókerben való alkalmazásra. A gazdasági tuda-

mányokba csak lassan hatol be ez az új eredmény, de azt már kimutatták, hogy bizonyos esetekben két külön-külön hosszú távon veszteséges részvényportfólió közötti véletlenszerű tőkeátcsoportosítások révén az alaptőke növekedhet! Két kapcsolódó érdekes olvasni-  
való található a [21], illetve [22] címenek.

*Derek Abbott* a Parrondo's Paradox Group vezetője remek összefoglalót írt a területen folyó kutatási témákról [23].

Végezetül egy érdekes és népszerű szinten megírt (angol nyelvű) áttekintés olvasható a témáról a [24] weboldalon.

#### Felhasznált és javasolt irodalom

1. <http://www.palacios-huerta.com/docs/professionals.pdf>
2. <http://arxiv.org/pdf/cond-mat/0003386.pdf>
3. <http://www.cut-the-knot.org/ctk/Parrondo.shtml>
4. <http://csodafizika.hu/parrondo/store/excel/parrondo.xls>
5. [http://csodafizika.hu/parrondo/store/excel/parrondo\\_excel\\_leiras.pdf](http://csodafizika.hu/parrondo/store/excel/parrondo_excel_leiras.pdf)
6. [http://csodafizika.hu/parrondo/store/parrondo\\_lepcso.avi](http://csodafizika.hu/parrondo/store/parrondo_lepcso.avi)
7. <http://epa.oszk.hu/00700/00775/00022/1136-1137.html>
8. [http://www.tozsdestrategia.hu/Publicat/parrondo\\_paradox.htm](http://www.tozsdestrategia.hu/Publicat/parrondo_paradox.htm)
9. <http://www.eleceng.adelaide.edu.au/Groups/parrondo/index.html>
10. <http://arxiv.org/pdf/cond-mat/9810326.pdf>
11. <http://digital.csic.es/bitstream/10261/7433/2/mem-mod1.pdf>
12. <http://www.elmer.unibas.ch/bm/index.html>
13. <http://csodafizika.hu/parrondo/store/bm/index.html>
14. <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1931524/>
15. Allison, A., Pearce, C. E. M., Abbott, D.: Finding keywords amongst noise: Automatic text classification without parsing. *Proc. SPIE Noise and Stochastics in Complex Systems and Finance*, Florence, Italy, Eds: János Kertész, Stefan Bornholdt, and Rosario N. Mantegna 6601 660113 (2007)
16. <http://arxiv.org/pdf/1010.5183v1.pdf>
17. <http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0502185.pdf>
18. <http://arxiv.org/pdf/cond-mat/0402515v1.pdf>
19. <http://arxiv.org/ftp/nlin/papers/0406/0406010.pdf>
20. <http://parrondoparadox.blogspot.co.uk/>
21. <http://www.sais.se/mthprize/2002/almberg2002.pdf>
22. [http://www.cmth.bnl.gov/~maslov/optimal\\_investment\\_ijtaf.pdf](http://www.cmth.bnl.gov/~maslov/optimal_investment_ijtaf.pdf)
23. <http://www.scribd.com/doc/5626750/Developments-in-Parrondos-Paradox>
24. <http://www.eleceng.adelaide.edu.au/Groups/parrondo/articles/Playing%20both%20sides,%20Erica%20Klarreich.htm>

## REZISZTÍVLAP-KAMRA, MINT GYORSNEUTRON-DETEKTOR

Elekes Zoltán

MTA Atommagkutató Intézete, Debrecen  
Helmholtz-Zentrum Dresden-Rossendorf, Németország

Az atommagok szerkezetének tanulmányozása új lendületet kapott az instabil, radioaktív ionnyalábok [1] megjelenésével, hiszen az atommagtérkép oly tartományai lettek elérhetőek, ahol a neutronok és protonok aránya jelentősen eltér a stabilitás völgyében tapasztalttól. Számos fantasztikus jelenséget tártak fel az elmúlt húsz évben, mint például a neutronglóriás atommagok, amelyekben a valencianeutronok, azaz a zárt, mágikus héjon túli neutronok, az atommagtörzstől messze keringenek, glóriát vonva köré [2]. Továbbá tanúi lehettünk annak a felfedezésnek, hogy a má-

gikus számok megváltoznak az egzotikus atommagok tartományában [3], ami közvetlenül jelentkezik a csillagfejlődésben és az elemek gyakoriságának kialakításában [4].

A németországi Darmstadtban már megkezdődött az Antiproton és Ion Kutatóközpont (FAIR) [5] építése, ami tulajdonképpen a már működő Nehézion Kutatóintézet (GSI) gyorsítóparkjának a továbbfejlesztését és különböző detektorokkal való ellátását jelenti. A atommagszerkezettel foglalkozó radioaktív ionnyalábos kutatásokra több együttműködés is létrejött,