A TÁVOLSÁGRÓL ÉS A SEBESSÉGRŐL, A HUBBLE-TÖRVÉNY KAPCSÁN

Bokor Nándor
BME Fizikai Intézet

A távolság és a sebesség alapvető fizikai fogalmaink közé tartoznak. Használatuk mindennapi életünket is átszövi, és az olyan mondatok, mint például „Szombathely 112 km távolságra van Győrújbaráttól”, „A gyalogkakukk maximális sebessége 32 km/h, a prérifarkasé 69 km/h” eldönthető igazságtartalommal bírnak. Hajlamosak vagyunk magától értetődőnek tekinteni, hogy ez a jól definiáltság minden körülmények között megmarad. A természettudomány bizonyos ágai, különösen a relativitáselmélet és a kvantummechanika ugyanakkor arra tanítanak bennünket, hogy a mindennapi tapasztalatainkból évek alatt felépített intuíciónk néha a legalapvetőbb fizikai fogalmakkal kapcsolatban is csődöt mondhat, például ha az adott kísérlet méretskálája, a benne résztvevő objektumok mozgási gyorsasága jelentősen kívül van a megszokott értéktartományokon.

A Hubble-törvény *nagyon* távoli és *nagyon* gyorsan mozgó objektumokra vonatkozik, érdemes tehát megvizsgálni, hogy helyesen járunk-e el, ha naivan, mindennapi intuíciónk alapján próbáljuk értelmezni. A Hubble-törvényt általában ilyen formában szokás írni:

$$v = H_0\, d, \tag{1}$$

ahol v egy távoli galaxis távolodási sebessége, d pedig a galaxis távolsága tőlünk. H_0 az úgynevezett Hubble-állandó, ami nem olyan értelemben állandó, hogy a Világegyetem története során nem változott (nagyon is változott, hiszen az aktuális értékét a Friedman–Robertson–Walker-metrika $a(t)$ skálafaktorának időfüggése határozza meg a

$$H(t) = \frac{\dot a(t)}{a(t)}$$

összefüggés szerint), hanem hogy „egy adott korban” a Világegyetem különböző helyein ugyanakkora. Talán helyesebb tehát, amikor H_0-t a „Hubble-paraméter jelenlegi értékének” nevezzük.

A fenti bekezdésben említett Friedman–Robertson–Walker-metrika általános alakja:

$$\mathrm{d}s^2 = \\ = c^2\,\mathrm{d}t^2 - a^2(t)\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-k\,r^2} + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right), \tag{2}$$

ahol k értéke attól függ, hogy a Világegyetem térideje globális léptékben gömbi (k = 1), sík (k = 0) vagy hiperbolikus-e (k = −1), t pedig a „globális időkoordináta”. Fontos hangsúlyozni, hogy a fenti metrika által használt koordinátarendszer önkényes választás eredménye, például az időszerű koordinátát másképp is definiálhattuk volna. Koordinátarendszerünket úgy vesszük fel, hogy az r = 0 pontban van a galaxisunk (kicsit precízebben: az r = 0 koordinátával rendelkező események a galaxisunkban történnek).

A Hubble-törvény szövegesen megfogalmazva tehát látszólag így hangzik: „Egy távoli galaxis távolodási sebessége a tőlünk mért távolságával egyenesen arányos.” Mennyire szabad komolyan venni ezt a mondatot? Egyáltalán: mennyire szabad az (1) egyenletet komolyan venni? Ha szó szerint értelmezzük, akkor zavarbaejtő következtetésekre kényszerülünk. Az (1) egyenletből például egy olyan galaxis távolodási sebességére, amely elég távol van tőlünk (d > 5 Gparsec), $v > c$ adódik. Hogyan lehetséges, hogy az Univerzum tágulása közben egyes galaxisok sebessége egyszer csak átlépje a fénysebességet? Egy másik zavarbaejtő gondolat lehet a következő: ha a galaxisok mozgása geodetikuson történik, sőt (jó közelítéssel) mind állandó (r, φ, θ) koordinátákkal rendelkeznek, akkor egyáltalán milyen értelemben mozognak hozzánk képest?

Az alábbiakban arról szeretném meggyőzni az olvasót, hogy nem csak a Hubble-törvény fenti megfogalmazását nem szabad komolyan venni, de – az Univerzum globális léptékében – már a távolság és sebesség fogalmait sem.

A sebességről

A sebesség pongyola definiálása már sík téridő kis léptékű tartományaiban is vezethet zavarbaejtő és hamis eredményre [1]. Tekintsünk például egy K inerciarendszert, amelyben az x-tengely mentén balra repül egy űrhajó −0,8 c = −240 000 km/s sebességgel, jobbra pedig egy másik űrhajó +0,8 c = +240 000 km/s sebességgel. Úgy képzelhetjük, hogy K-ban egy-egy esemény téridőbeli koordinátáit kockarácsszerűen elhelyezett méterrudak és a rácspontokba tett szinkronizált órák segítségével mérjük [2]. Így két esemény közötti távolság és időtartam mérésének módszere, ezzel pedig egy tömegpont sebességének mérési módszere is egyszerűen adódik. Mekkora a példánkban szereplő két űrhajó *egymáshoz viszonyított* sebessége? A naiv sebességösszeadás alkalmazása, amely az 1,6c = 480 000 km/s eredményt adja, teljesen indokoltnak tűnik. Hiszen a két űrhajó közötti távolság *valóban* 480 000 km-rel nő 1 másodperc időtartam alatt, ahol mind a távolságot, mind az időtartamot a gondosan definiált módon, a K inerciarendszerben mérjük. De jelenti-e ez azt, hogy a jobb oldali űrhajó a fénynél gyorsabban távolodik a bal oldalitól? Természetesen nem. Ha így lenne, akkor a bal oldali űrhajóból korábban jobbra kilőtt fényimpulzust a jobbra repülő űrhajó előbb-utóbb utolérné és megelőzné. Ez azonban nem történik meg (ezt beláthatjuk a K-beli nézőpontból, amelyben a fényimpulzus $+c$-vel halad, az űrhajó pedig csak +0,8 c-vel). Milyen értelemben lesz tehát az űrhajók közötti relatív sebesség 1,6 c? *Semmilyen* értelemben. A hibát ott követtük el, hogy egyáltalán sebességnek neveztük azt a mennyiséget, amelyet a fenti módon a távolság és az időtartam hányadosaként kaptunk. Ahhoz, hogy egy tárgy másik tárgyhoz viszonyított sebességének érvényes fizikai értelme legyen, azon tárgy *nyugalmi* vonatkoztatási rendszerébe kell helyezkednünk, amelyhez képest a másik mozgását tárgyaljuk. Ebben a nyugalmi rendszerben kell szinkronizált órák és méterrudak kockarács-hálózatát (legalábbis képzeletben) felépítenünk, hogy a sebességmérést elvégezhessük. A balra repülő űrhajó K' nyugalmi rendszerének szinkronizált órái és méterrudai azonban nem azonosak a K óráival és méterrudaival. Ezért nem nagyon kell meglepődnünk azon, hogy a kétféle sebességmérés eredménye sem lesz ugyanaz: levezethető, hogy a K'-ből mérve az űrhajók közötti távolság 1 másodperc alatt csak 292 683 km-rel nő. Az űrhajók relatív sebessége tehát a helyes értelmezés szerint 292 683 km/s = 0,976 c.

A fenti példa azt illusztrálta, hogy a sebesség fogalmának nem gondos definiálása még sík téridőben zajló mozgások leírásakor is zavart okozhat. Görbült téridőben – mint amilyen a Világegyetem a Hubble-törvény által leírt tartományban – még jobban meg kell gondolnunk, mit érthetünk távolság és sebesség alatt.

A távolságról

Ahhoz, hogy egy távoli (esetleg mozgó) objektumtól való távolságunkat értelmezni tudjuk, az objektum pozícióját a saját pozíciónkkal *ugyanabban az időpontban* kell összevetni. Már a speciális relativitáselméletből tudjuk, hogy az egyidejűség fogalma nem abszolút, és ez rögtön előrevetíti, hogy a távolság definiálása elvileg is problematikus lesz. Sík téridőben a problémát el tudjuk kerülni azzal, hogy saját pozíciónkat – a sebességméréshez hasonló gondolatmenet alapján – *nyugvónak* tekintjük. A saját *pillanatnyi nyugalmi inerciarendszerünk* egy adott időpillanatában határozzuk meg a távoli objektum pozícióját, és az így kapott értéket tekintjük az objektum adott pillanatban tőlünk mért távolságának (ezt elképzelhetjük úgy, hogy a szinkronizált órák és méterrudak már említett derékszögű hálózatában a távoli objektum pozícióját az adott pillanatban vele egy helyen levő óra regisztrálja, majd utána egyszerűen leszámoljuk a regisztrálást végző óráig húzott egyenes mentén a méterrudak számát). Ehhez azonban az kell, hogy a téridő olyan óriási darabját, amely a mi világvonalunkat és a távoli objektum világvonalát is tartalmazza, le tudjuk fedni *egyetlen globális inerciarendszerrel* (egyetlen szinkronizált órákból és derékszögben elhelyezett méterrudakból álló kockaráccsal).

Görbült téridőben ez nem megy. A téridő görbültsége éppen azt jelenti, hogy nem létezik olyan inerciarendszer, amely átfogja a téridő globálisan nagy tartományait. Csak lokálisan, síknak tekinthető téridő-tartományokban tudunk szinkronizált órákból és méterrudakból (képzeletben) kockarácsot alkotni. Egy ilyen lokális rácshálózat általános esetben nem tud kiterjedni olyan méretűre, hogy a távoli objektum világvonala beleférjen.

A távolságméréskor fellépő nehézségeink ezért nem technológiai, hanem elvi, geometriai jellegűek: a görbült téridő két távoli eseménye között az egyidejűség fogalmának nincs *jelentése*. Ebből következően egy távoli objektum tőlünk mért *távolságának* sincs egyértelmű jelentése, még akkor sem, ha saját pozíciónkat nyugvónak vesszük. Gyakran hallunk ugyan olyan adatokat, amelyek galaxisok távolságát adják meg (például milliárd fényévekben), azonban tudnunk kell, hogy ezek a számadatok csak az – általában hallgatólagosan hozzájuk fűzött, és a csillagászok által észben tartott – „használati útmutatóval” együtt jelentenek valamit. A Világegyetem nagyléptékű tartományaiban az alábbi ötféle távolságfogalom [3] használatos a csillagászatban

1. Sajáttávolság (proper distance)

Úgy teszünk, mintha a sík téridőben megszokott, egyidejűségen alapuló távolságmérés itt is minden további nélkül működne. A (2)-ben szereplő „globális időkoordináta” jelenlegi értéke mellett ($t = t_0$, $\mathrm{d}t = 0$) r-irányban ($\mathrm{d}\varphi = 0$, $\mathrm{d}\theta = 0$) a kérdéses távoli galaxis r_0-koordinátájáig integráljuk $\mathrm{d}s$-t:

$$d_S \equiv a(t_0) \int_0^{r_0} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - k\,r^2}}. \tag{3}$$

Az így kapott távolságdimenziójú mennyiséget közvetlenül mérni nem lehet, de – adott kozmológiai modellt (adott k értéket és $a(t)$ függvényt) feltételezve – értéke némi számolás után megkapható a galaxis fényének közvetlenül is mérhető vöröseltolódásából. Az úgynevezett Einstein–de Sitter-modellből – $k = 0$, $a(t) = a(t_0)(t/t_0)^{2/3}$ – például a

$$d_S = 2\,H_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + z}}\right)$$

képlet adódik, ahol $z \equiv \Delta\lambda/\lambda$ a távoli galaxis fényének mért vöröseltolódása.

2. Fényesség-távolság (luminosity distance)

Ezt a távolságfogalmat használta eredetileg *Edwin Hubble,* amikor híres törvényét felállította. Ezen adat meghatározásához a galaxis látszólagos fényintenzitását és a vöröseltolódását is mérni kell. Feltesszük, hogy a galaxisok tényleges fényessége a Világegyetemben mindenhol ugyanakkora, azaz szabvány „gyertyaként” használhatóak. Sík, statikus univerzumban egy galaxis *látszólagos* fényintenzitása fordítottan arányos tőlünk mért távolságának négyzetével. Táguló világegyetem esetén a látszólagos fényintenzitást csökkenti a kozmológiai vöröseltolódás – amely miatt minden beérkező foton energiája $(1+z)$-szeresen – és az, hogy a tágulás miatt egységnyi idő alatt a távcsövünkbe kisebb számú foton csapódik be, mint tágulás nélkül csapódna (ami szintén $(1+z)$-szeres intenzitáscsökkenést ad). Megmutatható, hogy összességében a fényesség-távolság és a sajáttávolság között a

$$d_F = (1 + z)\, d_S$$

összefüggés áll fenn.

3. Szögátmérő-távolság

Feltesszük, hogy a galaxisok mérete az Univerzumban mindenhol ugyanakkora, tehát szabvány „méterrúdként” használhatók. Szögátmérő-távolságuk ekkor látszólagos szögátmérőjükből határozható meg. Megmutatható, hogy táguló világegyetem esetén ez a távolságfogalom adja a legkisebb numerikus értéket, és kapcsolata az eddigi kettő távolságfogalommal:

$$d_{Sz} = \frac{d_S}{1 + z} = \frac{d_F}{(1 + z)^2}.$$

4. Sajátmozgás-távolság

Ha egy galaxis nem sugárirányban távolodik tőlünk, akkor – nem túl távoli galaxis esetén – definiálható a hozzánk képesti úgynevezett transzverz sebessége [3]. Ha ez ismert, és a vöröseltolódásból meg tudjuk állapítani a galaxis úgynevezett sajátmozgását [3] is, akkor ezekből meghatározható egyfajta távolságfogalom. Erre az adódik, hogy

$$d_{SM} = d_S.$$

5. Fényterjedés-távolság

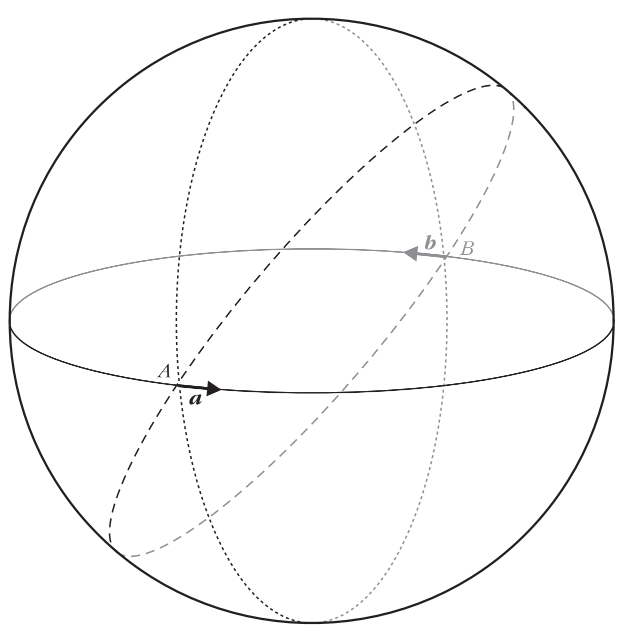
Az úgynevezett visszatekintési idő alatt a Friedman–Robertson–Walker-metrika t-koordinátájának megváltozását értjük az adott galaxisból elinduló fény kibocsátási eseménye és ugyanennek a fénynek a földi detektálási eseménye között. Ha ezt a t-koordinátakülönbséget beszorozzuk a fénysebességgel, újabb távolságfogalomhoz jutunk. Ennek számértéke a feltételezett kozmológiai modelltől függ. Levezethető, hogy például Einstein–de Sitter-modell esetén az alábbi módon határozható meg a mért vöröseltolódásból:

$$d_{FT} = \frac{2}{3} H_0 \left(1 - \frac{1}{(1 + z)^{3/2}}\right).$$

Az 5-féle távolságfogalom kis z (közeli galaxisok) esetén azonos számértéket ad, nagy vöröseltolódásnál viszont már nagy lesz közöttük az eltérés. Ha például a vöröseltolódás értéke $z = 2$, d_F és d_{Sz} között 9-szeres eltérés adódik!

Még egyszer a sebességről

Egy tömegpont teljes élettörténete benne foglaltatik a tömegpont *világvonalában*. Most tekintsünk két tömegpontot. Mozognak-e egymáshoz képest? A legegyszerűbb akkor válaszolni erre a kérdésre, ha abban a pillanatban vagyunk kíváncsiak a válaszra, amikor a tömegpontok éppen egy helyen vannak. Ekkor világvonaluk metszi egymást, és a metszési pontban (a találkozási eseményben) közvetlenül összehasonlítható a két világvonal iránya a téridőben. Kicsit precízebben, a világvonalak adott eseménybeli, normált érintővektorai – ezek a két tömegpont úgynevezett négyessebesség-vektorai – közvetlenül összevethetők. Az összehasonlítás eredménye: ha a két négyessebesség-vektor *párhuzamos* a téridőben, akkor a két tömegpont egymáshoz képest áll, ha pedig a négyessebesség-vektorok a téridőnek nem azonos irányában állnak, akkor a két tömegpont egymáshoz képest mozog. Ez utóbbi esetben a vektorok relatív orientációjából számszerűen is megkapható a tömegpontok relatív sebessége. A nehézség akkor kezdődik, ha a tárgyak, amelyeknek egymáshoz képesti mozgását meg akarjuk állapítani, nem egy helyen vannak. Most az egyidejűség relativitásának problémáját tegyük félre (erről fent már volt szó)! Hogyan lehet két olyan vektor orientációját összevetni, amelyek a téridőnek nem azonos eseményében vannak? A válasz: általános esetben sehogy. Hogy ezt belássuk, használjuk a kétdimenziós felületek analógiáját. Egy gömbfelület (ez most az univerzumunk, harmadik dimenzió nincs, minden objektum a felületben létezik) két különböző pontján van két vektor. Párhuzamosak-e? Ha nem, mekkora szöget zárnak be egymással? E kérdéseknek, mint látni fogjuk, nincs értelme. A két vektort csak akkor tudjuk összehasonlítani, ha az egyiket „odaviszszük” a másik helyére, és gondosan ügyelünk, hogy közben orientációja (nem a 3D nézőpontunk szerinti állása, hanem a laposlények számára megjelenő orientációja) ne változzon. Azonban a differenciálgeometriából ismert, hogy a vektor orientációját megőrző úgynevezett párhuzamos eltolás [4] ebben a formában



1. ábra. A vektor orientációját megőrző párhuzamos eltolás lehetetlenségének – hiszen az eredmény a használt főkörtől függ – szemléltetése.

nem jól definiált fogalom, mert az eredmény – a végpontba érkező vektor orientációja – attól függ, milyen görbe mentén végeztük a párhuzamos eltolást. Ezt az *1. ábra* szemlélteti.

Az ***a*** és ***b*** jelű vektorok távol vannak egymástól, itt speciálisan a gömbfelület két átellenes pontján. A gömbfelületen élő laposlények arra kíváncsiak, mekkora szöget zár be egymással az ***a*** és ***b*** vektor. Ahhoz, hogy ezt eldöntsék, a ***b*** jelű vektort valamilyen vonal mentén párhuzamos eltolással (orientáció-megőrző módon) kell az ***a*** helyére vinniük. De az *A* és *B* helyeket végtelen sok vonallal összeköthetik, sőt ebben a példában még a gömbfelület egyenesei – a főkörök – közül is végtelen sok köti össze a két pontot. Nincs semmi, ami bármelyik főkört a többihez képest kitüntetné, viszont az eredmények a használt főkörtől függően drasztikusan eltérőek lesznek. Mekkora tehát a két vektor által bezárt szög? Ha a laposlények a folytonos vonallal jelölt főkört használják a párhuzamos eltoláshoz, akkor a kapott válasz 0°, ha a pontozottat, akkor 180°, ha a szaggatottat, akkor 90°. Tanulság: magának a kérdésnek nem volt értelme.

Teljesen analóg a helyzet négyessebesség-vektorok összehasonlításával görbült téridőben. Nyugalomban van-e egymáshoz képest két távoli objektum? Ha nem, milyen sebességgel mozognak egymáshoz képest? E kérdéseknek pontosan azért nincs értelme, amiért az *1. ábra* két távoli vektorának párhuzamosságáról vagy bezárt szögéről sincs értelme beszélni. A távoli galaxis négyessebesség-vektorának és a mi galaxisunk négyessebesség-vektorának relatív orientációját úgy tudnánk megállapítani, ha a távoli vektort párhuzamos eltolással a téridőnek abba az eseményébe vinnénk, ahol a mi galaxisunk most van. Ez azonban éppúgy rosszul definiált feladat, mint a fenti kétdimenziós példa.

Összefoglalás

A Hubble-törvény komoly pedagógiai értéke, hogy felhívja a figyelmet arra, hogy a távolság és a sebesség fogalmai görbült téridőben problematikusak. Mivel ezen empirikus törvény köznyelvi megfogalmazása épp a távolság és sebesség szavakat használja, nem csoda, hogy naiv értelmezése félreértésekhez vezet. Megóvhatjuk diákjainkat ezektől a félreértésektől, ha gondoskodunk róla, hogy ne az (1) egyenlet által sugallt mentális kép éljen bennük. Ne úgy vizualizálják a Hubble-törvényt, mint ami egy galaxis „távolsága” és „sebessége” között teremt kvantitatív kapcsolatot. Helyesebb, ha úgy gondolnak rá, mint az adott galaxis *látszólagos fényessége* és fényének *vöröseltolódása* között felfedezett kvantitatív kapcsolatra. A képlet ekkor ugyan bonyolultabb, mint az (1) egyenlet, ráadásul konkrét alakja a használt kozmológiai modelltől függ, de nem súlyos ez az ár, ha cserébe világosabb fizikai intuíciót kapunk.

Irodalom

1. Ali Kaya: Hubble's law and faster than light expansion speeds. *Am. J. Phys. 79/11* (2011) 1151.
2. Edwin F. Taylor, John Archibald Wheeler: *Téridőfizika*. Typotex, Budapest, 2006.
3. Stephen Webb: *Measuring the Universe – The Cosmological Distance Ladder.* Springer, 1999.
4. Bokor Nándor, Laczik Bálint: Vektorok párhuzamos eltolásának szemléltetése I. *Fizikai Szemle 61/7–8* (2011) 240.