XVII. SZILÁRD LEÓ NUKLEÁRIS TANULMÁNYI VERSENY

Beszámoló, II. rész

Sükösd Csaba
BME Nukleáris Technika Tanszék

6. feladat kitűzte: *Sükösd Csaba*

Egy programozó egy számítógépes szimulációban a radioaktív izotóp bomlását nem a viszonylag hosszú számítási időt igénylő exponenciális függvénnyel szeretné kiszámítani. Mivel a szorzás sokkal gyorsabb számítógépes művelet, ezért arra gondol, hogy a szimulációban az aktivitás csökkenését úgy fogja figyelembe venni, hogy az éppen aktuális aktivitás értékét minden másodpercben egyszerűen megszorozza 0,98-dal.

a) Bizonyítsuk be, hogy ez is exponenciális bomlást modellez!

b) Hány másodperc lesz ezen izotóp felezési ideje?

c) Mennyivel kellene megszorozni másodpercenként (0,98 helyett) a mindenkori aktivitást, hogy 10 perces felezési időt kapjunk?

Megoldás

a) Legyen az i-edik másodpercben az aktivitás a_i, és szorozzuk meg minden másodpercben k-val. (A konkrét példában k = 0,98). Ekkor nyilván $a_{i+1} = k a_i$, vagy másképpen

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = k.$$

Az aktivitás egymás utáni értékei tehát mértani sorozatot alkotnak, mivel az egymást követő tagok hányadosa állandó. Ebből következően az n-edik időpillanatban meglévő aktivitás: $a_n = a_0 k^n$ (n = 0, 1, 2, …).

Ha az idő „egységét” τ-val jelöljük (a példánkban 1 s, mert másodpercenként frissítünk), akkor az eltelt idő:

$$t = n\tau, \text{ azaz } n = \frac{t}{\tau}.$$

Ezt visszahelyettesítve kapjuk:

$$a(t) = a_0\, k^{\frac{t}{\tau}}.$$

Innen már látszik, hogy az aktivitás valóban a t idő exponenciális függvénye.

b) Ahhoz, hogy a felezési időt is meg tudjuk mondani, a k „alapról” át kell térjünk ½ alapra. Azaz, úgy kell meghatározzuk a T felezési időt, hogy

$$a_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = a_0\, k^{\frac{t}{\tau}}.$$

a_0-val egyszerűsítve és mindkét oldalt logaritmálva:

$$\frac{t}{T} \lg\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{t}{\tau} \lg k.$$

Ebből T kifejezhető:

$$T = \tau\, \frac{\lg\left(\frac{1}{2}\right)}{\lg k} = -\tau\, \frac{\lg 2}{\lg k}.$$

Az adatokat behelyettesítve adódik:

$$T = -1\ [\mathrm{s}] \cdot \frac{\lg 2}{\lg 0{,}98} = -1\ [\mathrm{s}] \cdot \frac{0{,}301}{-0{,}00877} = 34{,}31\ \mathrm{s}.$$

c) A 10 perces felezési idő 600 s. Ezért

$$600\ [\mathrm{s}] = -1\ [\mathrm{s}] \cdot \frac{\lg 2}{\lg k},$$

amiből

$$\lg k = -\frac{\lg 2}{600} = -0{,}00050172.$$

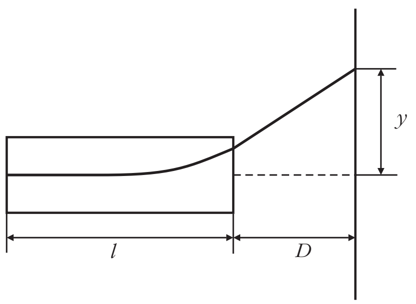
Ebből pedig kapjuk, hogy $k = 0{,}998845$.

7. feladat kitűzte: *Ujvári Sándor*

Amikor a radioaktivitást felfedezték, meg akarták határozni a sugárzást alkotó részecskék tulajdonságait. *Marie Curie* írja le azt a módszert, hogy kétféle, elektromos és mágneses térben térítették el a sugarakat, és a kétféle eltérítés adataiból ki tudták számítani az akkor még ismeretlen részecskék sebességét és a töltés/tömeg arányt. A rádium α-sugárzásának tulajdonságait *Des Coudres* mérte meg.

Az alábbi mérési adatok felhasználásával határozzuk meg az alfa-részecske kiinduló sebességét és fajlagos töltését! (Az α-részecske tömegét és töltését adatként nem lehet felhasználni, mert akkor még nem ismerték.)

Adatok: az elektromos eltérítés kísérleti elrendezése: légüres térben elhelyezett kondenzátorlemezek között, a lemezekkel párhuzamosan haladó sugárzást a kondenzátortól $D = 0{,}5$ m távolságban a lemezekre merőlegesen elhelyezett fotólemezen detektálták.



A kondenzátorlemezek $l = 10$ cm hosszúságúak voltak, a térerősség a lemezek között $E = 10^6$ N/C, az eltérítés nagysága $y = 9{,}7$ mm. A mágneses eltérítésnél a $B = 0{,}2$ T mágneses indukciójú mezőben az α-részecske pályájának sugara $r = 1{,}7$ m volt.

Megoldás

Először határozzuk meg az elektromos eltérítés mértékét! A részecskére ható erő $F = qE$, az y irányú gyorsulás

$$a_y = \frac{qE}{m},$$

a részecske a lemezek között

$$t_1 = \frac{l}{v_0}$$

ideig repül, az y irányú eltolódás lemezek közötti része:

$$y_1 = \frac{1}{2} a_y t_1^2 = \frac{qE}{2m}\left(\frac{l}{v_0}\right)^2,$$

sebessége y irányban:

$$v_y = a_y t_1 = \frac{qEl}{m v_0}.$$

Innen egyenletesen, egyenes vonalban halad a részecske, mert nincs rá ható erő.

Határozzuk meg ezen repülés idejét!

$$t_2 = \frac{D}{v_0},$$

innen az ez idő alatti további eltolódás:

$$y_2 = v_y t_2 = \frac{qElD}{m v_0^2}.$$

Az elektromos tér által okozott összes eltolódás:

$$y = y_1 + y_2 = \frac{qE}{2m}\left(\frac{l}{v_0}\right)^2 + \frac{qElD}{m v_0^2} = \frac{qEl}{m v_0^2}\left(\frac{l}{2} + D\right). \qquad (1)$$

A mágneses tér által eltérített részecske pályasugara kiszámításához használjuk a

$$q v_0 B = \frac{m v_0^2}{r},$$

összefüggést, amiből

$$r = \frac{m v_0}{Bq}. \qquad (2)$$

Fejezzük ki a fajlagos töltést (1)-ből:

$$\frac{q}{m} = \frac{y v_0^2}{El\left(\frac{l}{2} + D\right)}$$

és (2)-ből is:

$$\frac{q}{m} = \frac{v_0}{Br}.$$

A kettőt egyenlővé téve az α-részecske kezdeti sebessége:

$$v_0 = \frac{El\left(\frac{l}{2} + D\right)}{Bry} = \frac{10^6 \cdot 0{,}1 \cdot \left(\frac{0{,}1}{2} + 0{,}5\right)}{0{,}2 \cdot 1{,}7 \cdot 9{,}7 \cdot 10^{-3}} = 1{,}67 \cdot 10^7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

A fajlagos töltés:

$$\frac{q}{m} = \frac{v_0}{B\,r} = \frac{1{,}67 \cdot 10^7}{0{,}2 \cdot 1{,}7} = 4{,}91 \cdot 10^7 \ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}.$$

I. kategóriájú feladatok

8. feladat kitűzte: Sükösd Csaba

Tekintsük a párkeltés jelenségét, amikor egy gammafoton elektron-pozitron párt kelt, miközben önmaga megszűnik. Bizonyítsuk be, hogy ha csak ezt a három részecskét (foton, elektron, pozitron) tekintjük, akkor nem teljesíthető egyszerre az energia- és lendületmegmaradás!

Megoldás

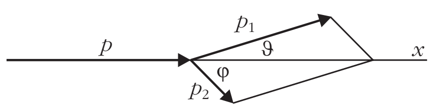
Első pillanatban úgy látszik, hogy a megmaradási tételek kielégíthetők, mivel a végállapotban két részecske (elektron és pozitron) keletkezik, és ezek keletkezési szöge(i) újabb paraméter(ek), ami miatt az egyenletrendszer „elvileg” megoldható. Nézzük azonban meg közelebbről! A lendületmegmaradás miatt a $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$ vektoregyenletnek teljesülnie kell, azaz a három részecske lendületvektorai vektorháromszöget alkotnak. Ez azt jelenti, hogy egy síkba is esnek. Koordinátarendszerünket válasszuk úgy, hogy a z-tengely merőleges legyen erre a síkra, ekkor valamennyi vektor z-koordinátája nulla, azaz csak x- és y-koordinátájuk lesz. A foton lendületének abszolút értéke legyen

$$p = \frac{h\,f}{c},$$

és ez a lendületvektor mutasson az x-tengely irányába. A keletkezett elektron-pozitron pár eredő lendületének is ekkorának kell lennie, emiatt az eredő lendület y-tengely irányú vetülete nulla kell legyen.

A lehető legáltalánosabb esetben nem használjuk ki a két keletkező részecske szimmetriáját, azaz nem tételezzük fel, hogy a bejövő irányhoz képest szimmetrikusan keletkeznek.

Legyen az egyik részecske lendületének abszolút értéke p_1, a lendületvektor x-tengellyel bezárt szöge ϑ. A másik részecskéé p_2, az x-iránnyal bezárt szöge pedig φ (lásd *ábra*).



A lendületmegmaradás egyenletei tehát:
az y-irányú vetületekre

$$p_1 \sin\vartheta = p_2 \sin\varphi,$$

az x-irányú vetületekre pedig

$$p = p_1 \cos\vartheta + p_2 \cos\varphi. \qquad (1)$$

Az energiamegmaradás (relativisztikus képletekkel számolunk):

$$p\,c = \sqrt{(p_1\,c)^2 + (m\,c^2)^2} + \sqrt{(p_2\,c)^2 + (m\,c^2)^2}.$$

Szorozzuk be az (1) egyenletet c-vel, és pc-t helyettesítsük be az energiamegmaradás egyenletének bal oldalába:

$$p_1\,c\cos\vartheta + p_2\,c\cos\varphi =$$

$$= \sqrt{(p_1\,c)^2 + (m\,c^2)^2} + \sqrt{(p_2\,c)^2 + (m\,c^2)^2}.$$

Látható, hogy ez az egyenlet semmilyen feltételek mellett sem teljesíthető, hiszen $m > 0$ miatt az egyenlet jobb oldala mindenképpen nagyobb, mint $p_1 c + p_2 c$, az egyenlet bal oldala pedig bármely szögek esetén kisebb vagy egyenlő, mint $p_1 c + p_2 c$.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy semmilyen módon sem lehetséges az energia- és lendületmegmaradást egyszerre teljesíteni. A valóságban csak úgy mehet végbe párkeltés, ha egy „negyedik” partner – az atommag is jelen van, és átvesz lendületet (valamint elhanyagolható nagyságú energiát).

9. feladat kitűzték: *Radnóti Katalin, Kis Dániel Péter*

A béta-bomlás során elektronok lépnek ki az atommagból. Régen azt gondolták, hogy ezek az elektronok ténylegesen benne voltak korábban is az atommagban.

a) Mutassuk meg a dobozbazárt-elektron modell alapján, hogy ez nem lehetséges! Adjunk becslést egy, az atommag mérettartományába eső dobozba ($a \approx 10^{-14}$ m) zárt elektron mozgási energiájára!

b) Legfeljebb mekkora lehet a, hogy a bezárt elektron mozgási energiája egy pozitron-elektron párt tudjon kelteni? Lehetne-e ennél kisebb tartományba lokalizálni az elektront?

Megoldás

Az a oldalhosszúságú dobozba zárt elektron helykoordinátáinak bizonytalansága $\Delta x = \Delta y = \Delta z = a/2$. A Heisenberg-féle határozatlansági reláció alapján a lendületbizonytalanság:

$$(\Delta p)^2 = (\Delta p_x)^2 + (\Delta p_y)^2 + (\Delta p_z)^2 \geq 3\,\frac{\hbar^2}{a^2}.$$

a) A kapott képlet alapján az atommag-tartományú dobozban lévő elektron bezártságából eredő mozgási energia:

$$E_{kin} = \sqrt{(c\,\Delta p)^2 + m^2\,c^4} - m\,c^2 = 34{,}68 \ \mathrm{MeV}.$$

Az elektron nem vesz részt az erős kölcsönhatásban. A Coulomb-kölcsönhatás erősségére pedig a következő egyszerű meggondolást tehetjük: atomi méretekben (10^{-10} m) a Coulomb potenciális energiák nagyságrendje abszolút értékben $10 \cdot Z$ [eV]. Mivel $Z < 100$, ez azt jelenti, hogy még a legnagyobb rendszámú atomban is az elektronok kötési energiája keV nagyságrendű. A Coulomb potenciális energia $1/r$-rel arányos, ezért az atommag méretében (10^{-14} m) nagyságrendben ez (abszolút értékben) tízezerszeresére növekszik. Azaz ~10

MeV nagyságrendű lenne még a legnagyobb rendszámú magban is az elektron megkötésére hivatott negatív potenciális energia. Ez pedig nem elegendő a 30-40 MeV-es – bezártságból fakadó – mozgási energia kompenzálására. Az atommag és az elektron között tehát nincs olyan kölcsönhatás, amely ilyen mozgási energia mellett kötött állapotban tudná tartani az elektront.

b) A párkeltéshez szükséges minimális energiát a kinetikus energia biztosítja, amely relativisztikus esetben

$$E_{kin} = \sqrt{(c\,\Delta p)^2 + m^2 c^4} - m\,c^2 = 2\,m\,c^2,$$

ahonnan a lendület kifejezhető:

$$(\Delta p)^2 = 8\,m^2 c^2.$$

A lendületbizonytalanságra kapott két relációból kifejezhető a keresett méretparaméter:

$$a^2 = \frac{3}{8}\left(\frac{\hbar}{m\,c}\right)^2$$

$$\Downarrow$$

$$a_{\min} = \sqrt{\frac{3}{8}}\,\frac{\hbar}{m\,c} = \sqrt{\frac{3}{8}}\,\lambda\!\!\!^{-}_{e} = 23{,}7\cdot 10^{-14}\ \mathrm{m},$$

ahol $\lambda\!\!\!^{-}_{e}$ az elektron redukált Compton-hullámhossza. A kapott összefüggésből leolvasható, hogy a jelzett határ alatt a „kvantumnyüzsgés” már olyan nagy, hogy elektron-pozitron párt keltene. Természetesen ez az elektron-pozitron pár is „be lenne zárva” a dobozba (mint az eredeti elektron), emiatt ezeknek is olyan nagy lenne a mozgási energiája, hogy újabb elektron-pozitron párokat keltenének, és így tovább. Látható, hogy nincs értelme bizonyos méretnél kisebb méretekre koncentrált elektronról beszélni. A kapott érték az atommag sugarának nagyságrendjébe esik, és ez összhangban van azzal, miszerint az elektron nem lokalizálódhat az atommagban.

10. feladat kitűzte: *Szűcs József*

Egy 2 TeV-es és egy 4 TeV-es ultrarelativisztikus protonnyaláb frontálisan ütközik.

a) A lehetséges rugalmas részecskeütközések közül mekkora szögben repülnek szét azok a protonok, amelyekben az ütközés után szétrepülő részecskék energiája azonos lesz?

b) Mekkorák ezen protonok eltérülési szögei?

Megoldás

A teljes energia mellett a nyugalmi energia (körülbelül 1 GeV = 10^{-3} TeV) elhanyagolható. Így a részecskék teljes energiáját $E \approx pc$ közelítéssel számolhatjuk.

Írjuk fel a részecskék ütközésére a megmaradási törvények egyenleteit!

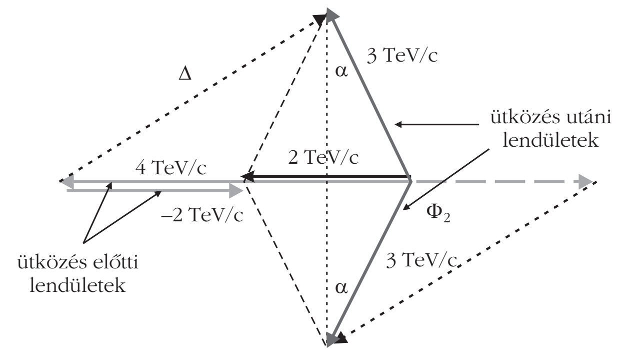
Energiamegmaradás:

$$E_1 + E_2 = E' + E'', \text{ ahol } E' = E'' = \frac{E_1 + E_2}{2} = 3\ \mathrm{TeV}.$$

Lendület-megmaradás:

$$\frac{\boldsymbol{E}_2}{c} + \frac{\boldsymbol{E}_1}{c} = \frac{\boldsymbol{E}'}{c} + \frac{\boldsymbol{E}''}{c}.$$

A lendületmegmaradás vektorábrája alapján:



$$\cos\alpha = \frac{1}{3} \rightarrow \alpha = 70{,}5°.$$

A részecskék szétrepülési szöge: $2\alpha = 141°$.

A részecskék eltérülési szögei: $\Phi_1 = \alpha = 70{,}5°$ valamint $\Phi_2 = 180 - \Phi_1 = 109{,}5°$.

Junior (II. kategóriájú) feladatok

8. feladat kitűzte: Sükösd Csaba

Egyetlen maghasadási reakció teljes energiája a következő formákban szabadul fel (a számok átlagos értékeket jelentenek):

- A hasadási töredékmagok (hasadványok) mozgási energiája összesen: ~168 MeV.
- A radioaktív hasadási termékek bomlásaiból származó elektronok által elvitt összes energia ~8 MeV.
- A hasadáskor keletkező neutronok által elvitt energia összesen ~5 MeV.
- A hasadás pillanatában keletkezett γ-fotonok által elvitt energia összesen ~7 MeV.
- A radioaktív hasadási termékek bomlásainak γ-sugárzása által elvitt energia összesen ~7 MeV.
- A radioaktív hasadási termékek bomlásaiból jövő antineutrínók által elvitt energia összesen ~10 MeV.

Egy 2000 MW hőteljesítménnyel hosszú ideje működő reaktort leállítunk. Ismert, hogy az aktív zónát még folyamatosan hűteni kell. A fenti táblázat alapján a leállítás után még legfeljebb mekkora hőteljesítményre kell számítanunk?

Megoldás

A fenti táblázat alapján a maghasadási reakcióban felszabaduló teljes energia (a fenti folyamatok összege) 205 MeV. Ezen energia egy része azonnal, más része – a hasadási termékek radioaktivitása miatt – csak valamivel később szabadul fel, egy harmadik résszel pedig nem kell hőteljesítmény formájában számoljunk, mert eltávozik (antineutrínók által elszállított 10 MeV).

A táblázat alapján az energiák megoszlása:

168+5+7 = 180 MeV (180/195 = 92,3%) a hasadás pillanatában keletkezik. A láncreakció leállítása után ezzel már nem kell számolni.

A hasadási termékek radioaktivitása miatt az aktuális maghasadás után, valamikor később 8+7 = 15 MeV energia szabadul fel. Ez a teljes energia 15/195 = 7,7%-a. Miután a reaktor már „elég hosszú ideje” működik, ezért feltehetjük, hogy a hasadási termékek aktivitásában már beállt a radioaktív egyensúly (azaz ugyanannyi keletkezik a hasadások során, mint amennyi elbomlik a radioaktivitása miatt). Ezért a 2000 MW hőteljesítményhez ezek is hozzájárulnak. Emiatt a reaktor leállítása után azonnal az ezekből származó hőteljesítmény még megmarad. Vagyis legfeljebb 7,7%-nyi, azaz 154 MW hőteljesítményre kell számítsunk.

9. feladat kitűzte: Radnóti Katalin

a) Mekkora azon foton energiája, frekvenciája, hullámhossza, amely a H-atom harmadik gerjesztett állapotának alapállapotba történő legerjesztésekor keletkezik?

b) Mekkora sebességgel lökődik hátra a kezdetben nyugalomban lévőnek tekintett atom a foton kibocsátásakor? Mekkora mozgási energiát kap ezáltal?

Megoldás

a) A hidrogénatomot n = 4-ről kell legerjeszteni m = 1-re, azaz az alapállapotba. A Rydberg-formula szerint

$$\frac{f}{c} = \frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

ahol $R_H = 1{,}097 \cdot 10^7$ 1/m, a Rydberg-állandó. Ebből a foton frekvenciája

$$f = c\,R_H\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= 3{,}289 \cdot 10^{15}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2}\right) = 3{,}08 \cdot 10^{15}\ \mathrm{Hz},$$

míg hullámhossza

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{3{,}08 \cdot 10^{14}} = 9{,}74 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m}.$$

A foton energiája pedig

$$E = h f = 2{,}04 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}.$$

b) A visszalökődött atom lendülete megegyezik a fotonéval

$$p = \frac{h}{\lambda} = m_H v_H,$$

így annak sebessége

$$v_H = \frac{h}{\lambda\, m_H} = 4{,}25\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

míg mozgási energiája

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_H v_H^2 = 1{,}4 \cdot 10^{-26}\ \mathrm{J}.$$

10. feladat kitűzte: *Papp Gergely*

Milyen régen üzemelhetett Oklóban a természetes reaktor, ha tudjuk, hogy ma a természetes urán 0,7202%-át alkotja a $^{235}_{92}\mathrm{U}$-ös izotóp, a láncreakcióhoz pedig 3%-os $^{235}_{92}\mathrm{U} : {}^{238}_{92}\mathrm{U}$ arány kell?

Adatok: $T_{1/2}^{235} = 7{,}038 \cdot 10^8$ év, $T_{1/2}^{238} = 4{,}468 \cdot 10^9$ év.

Megoldás

Az egyszerűség kedvéért 5-ös és 8-as alsó index jelöli az egyes izotópokhoz tartozó értékeket. A nukleáris bomlás egyenlete a két izotópra:

$$N_5(t) = N_5(t_0)\, 2^{-\frac{t}{T_5}},$$

$$N_8(t) = N_8(t_0)\, 2^{-\frac{t}{T_8}}.$$

A feladat szövege megadta a felezési időket és a korabeli $N_5(t_0)/N_8(t_0)$ = 3% arányt. Ma a természetes uránban a 235-ös izotóp részaránya 0,7202%, azaz $N_5/(N_5+N_8)$ = 0,7202%. Ebből következik, hogy N_5/N_8 = 0,7202/(100−0,7202) = 0,72542%. *Ez a lépés nem okoz komoly numerikus eltérést, de elvi jelentősége van!* Ha valaki 0,7202%-kal számolt tovább, azt csak akkor fogadta el a Versenybizottság, ha megindokolta, hogy ez nem sokban tér el a tényleges értéktől.

Mivel a két időpontban vett izotóparány adott, ezért praktikus a két bomlásegyenletet elosztani egymással:

$$\frac{N_5(t)}{N_8(t)} = \frac{N_5(t_0)}{N_8(t_0)}\, 2^{t\left(\frac{1}{T_8} - \frac{1}{T_5}\right)}.$$

Itt minden mennyiség ismert, csak t-re kell megoldani az egyenletet:

$$t = \frac{\dfrac{\log x}{\log 2}}{\dfrac{1}{T_8} - \dfrac{1}{T_5}}, \quad \text{ahol} \quad x = \frac{\dfrac{N_5(t)}{N_8(t)}}{\dfrac{N_5(t_0)}{N_8(t_0)}}.$$

Itt megjegyezzük, hogy tetszőleges alapú logaritmus használható, ami a legkényelmesebben rendelkezésre áll a számológépen. x értékében az uránizotóp-arányok hányadosa szerepel, tehát hagyhatjuk az arányokat százalékban, ezzel x = 0,2418 és így log$x$/log2 = −2,0481 (bármilyen logaritmussal).

Az idő mértékegységét a felezési idő mértékegysége határozza meg – az $(1/T)^{-1}$ miatt –, ezért legpraktikusabb milliárd évben számolni. Ezzel az idő számértéke

$$t = \frac{-2{,}0481}{\dfrac{1}{4{,}468} - \dfrac{1}{0{,}7038}} = 1{,}711.$$

Mivel a felezési idő milliárd évben volt, ezért az eredményt is abban kapjuk. Tehát az izotóparányok alapján az oklói természetes reaktor ~1,71 milliárd éve üzemelhetett.

Folytatjuk.