KVANTUMGRAVITÁCIÓ ÉS AZ ASZIMPTOTIKUS BIZTONSÁG ELVE

Nagy Sándor
Debreceni Egyetem, Elméleti Fizikai Tanszék

A fizikában négy alapvető kölcsönhatást ismerünk, az elektromágneses, a gyenge, az erős és a gravitációs kölcsönhatást. Az első 3 kölcsönhatás a Standard modell keretein belül egyesíthető, a gravitációs kölcsönhatást pedig az általános relativitáselmélet segítségével írhatjuk le. A Standard modellben az elemi részecskékhez (kvantum)teret rendelünk. A terek kölcsönhatását csatolási állandók jellemzik, ilyen például az α finomszerkezeti állandó, ami az elektromágneses kölcsönhatás erősségét határozza meg, vagy az erős kölcsönhatást jellemző kvark-gluon csatolás. A gravitációs kölcsönhatás erősségét a G Newton-állandó szabályozza.

A 20. századi fizika két legfontosabb vívmánya, a kvantumelmélet és a relativitáselmélet egyesítése a modern fizika megkerülhetetlen problémája. Az egyesítés egyik lehetséges modellje a kvantum Einstein-gravitáció (QEG), ahol a kvantumtér szerepét most nem az elemi részecskék, hanem maga a téridőmetrika játssza [1]. A modellben a metrika önmagával is kölcsönhat, ennek erősségét a valósággal összhangba hozható legegyszerűbb modellekben a Newton- és a kozmológiai állandó írja le.

A csatolások értéke a kölcsönhatás energiájának függvényében változhat. Ezt a változást a funkcionális renormálási csoport (röviden RG) módszerrel követhetjük nyomon [2]. Az alább ismertetendő számítási eredmények keretei között az RG-módszer segítségével megmutatható, hogy nagy energián a Newton- és a kozmológiai állandó értéke nő, de van egy felső határ, amely fölé nem nőhetnek, ezt a viselkedést nevezzük *aszimptotikus biztonságnak*. Alacsony energián az állandók értékére szintén találhatunk korlátot. A továbbiakban azt is vizsgáljuk, hogy e tulajdonság megléte esetén milyen fizikai következmények jelentkeznek a mérésekkel megismerhető energiatartományokban.

A gravitációs kölcsönhatás

Klasszikus mechanikában az egymástól r távolságra lévő m és M tömegű testek közötti gravitációs kölcsönhatást a klasszikus fizika Newton-törvényei alapján a következő gravitációs potenciállal jellemezzük:

$$V = -G\frac{m\,M}{r}, \tag{1}$$

ahol G a Newton-állandó, $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg\,s^2}$. A törvény a gravitációs kölcsönhatás makroszkopikus tartományában nagyon jól működik, például a bolygómozgást nagy pontossággal írja le. A klasszikus elektrodinamikában a töltött részecskék között ható Coulomb-kölcsönhatás hasonló alakú az általános tömegvonzás (1) törvényéhez, bár ezek más-más alapvető összefüggések (a Maxwell-egyenletek, illetve az Einstein-egyenletek) effektív megnyilvánulásai.

A newtoni mechanika a Merkur perihélium-vándorlását viszont már hibásan adja meg, amely az elmélet alkalmazhatóságának határát jelzi. Ennek pontos leírása az általános relativitáselmélettel lehetséges. Az Einstein-egyenlet alakja

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi\,G\,T_{\mu\nu}, \tag{2}$$

ahol Λ a kozmológiai állandó, kis pozitív értéke van: $\Lambda \approx 10^{-35}\ \mathrm{s^2}$, $g_{\mu\nu}$ a metrikus tenzor (amelyre a $g_{00} < 0$ konvenciót használjuk), $R_{\mu\nu}$ és R a görbületet jellemző tenzori és skalár mennyiségek. A téridőgörbület forrása a $T_{\mu\nu}$ energia-impulzus tenzor, amely az elemi részecskékből és a köztük lévő kölcsönhatást leíró sugárzási térből felépülő anyag járuléka. Az Einstein-egyenlet anyagmentes esetben ($T_{\mu\nu} = 0$) a kozmológiai állandó nélkül táguló Világegyetemet ír le (*de Sitter* megoldása). *Einstein* a Λ-t éppen azért vezette be, hogy világnézeti várakozásainak megfelelően egyenlete állandósult állapotú (statikus) Világegyetemet adjon. Az Einstein-egyenlet bal oldalán lévő tagokhoz továbbiak adhatók, amelyek a görbület tetszőleges függvényei lehetnek, és erősségüket újabb csatolások jellemezhetik. Az energia-impulzus tenzorban szereplő kölcsönhatások szintén eredményezhetnek további csatolásokat. Megjegyezzük, hogy az általunk észlelt kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás és a nagyléptékű galaxiseloszlási térképek leírására a Newton- és a kozmológiai állandó figyelembe vétele elengedhetetlenül fontos, azonban további releváns csatolás szerepeltetése nem indokolt a makroszkopikus mérettartományban.

Az Einstein-egyenlet ugyan szélesebb körben alkalmazható, mint a newtoni gravitációs törvény, azonban ennek is vannak hiányosságai. Egyrészt a (2) egyenlet bal oldalán klasszikus mennyiségek szerepelnek, míg a jobb oldalon a $T_{\mu\nu}$ kvantált elemi részekből áll. Ez azt mutatja, hogy a gravitációs kölcsönhatást is kvantálni kell ahhoz, hogy az Einstein-egyenlet egységesen csak kvantált mennyiségeket tartalmazzon. Másrészt az egyenlet fekete lyukak vagy az Ősrobbanás leírásánál szingulárissá válhat, azaz fizikailag értelmezhetetlen végtelen tagok jelenhetnek meg benne. A gravitáció kvantálása megoldhatja ezeket a problémákat.

A kutatás a TÁMOP 4.2.4.A/2-11-1-2012-0001 Nemzeti Kiválóság Program című kiemelt projekt keretében zajlott. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

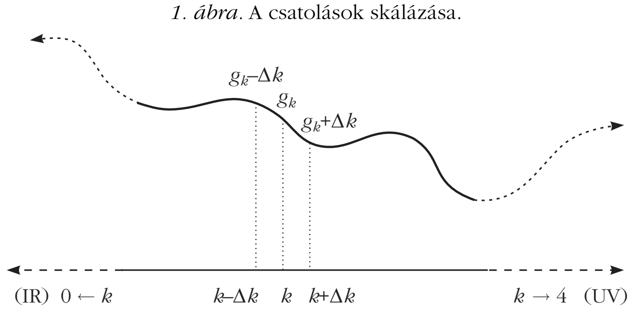
Szeretnék köszönetet mondani *Patkós Andrásnak* a kézirat elkészítésében nyújtott rendkívül értékes segítségéért és tanácsaiért.

A kvantum Einstein-gravitáció

A kvantum Einstein-gravitáció a gravitációs kölcsönhatás és a kvantumelmélet egyesítése. Egy klasszikus fizikai modellből konstruálunk kvantumfizikai modellt. Azt várjuk, hogy a gravitáció kvantumos jellege az úgynevezett Planck-hosszúság tartományában ($\ell_P = 1{,}62 \cdot 10^{-35}$ m) jelentkezik, hasonlóan az elektrodinamikához, ahol az elektron Compton-hullámhosszának tartományában válik a klasszikus elektromágneses kölcsönhatás kvantumossá.

A klasszikus fizikában a részecske pályája a kezdeti feltételek ismeretében egyértelmű. Ez a kvantummechanikában úgy változik meg, hogy az átmeneti valószínűség meghatározásához az adott kezdeti és végállapot között minden lehetséges pályát figyelembe kell venni. Ezek egyforma súllyal, de különböző fázissal járulnak hozzá az átmenethez. Az egyes pályáknak a klasszikus trajektóriától való eltérései, mint kvantumingadozások (fluktuációk) vagy szabadsági fokok jelennek meg az elméletben, amelyeket figyelembe kell vennünk, ha valamilyen fizikai mennyiséget ki akarunk számolni. Hasonló történik a Young-féle kétréses kísérletben, ahol a forrásból kiinduló elektronok által az ernyőn alkotott interferenciaképet úgy kaphatjuk meg, ha feltesszük, hogy az elektronok a forrás és az ernyő közötti minden lehetséges pályát bejárnak. Valamilyen erőtér jelenlétében a különböző pályákat, amelyeket az elemi gerjesztések más-más sebességgel, azaz más-más hullámhosszal járnak be, osztályozhatjuk a k jellemző hullámszám szerint. A k skála neve a kvantumtérelméletben *renormalizációs skála*. A pályákat k csökkenő értéke szerinti sorba rendezhetjük. Keressük, hogy az egyes pályák miként járulnak hozzá az átmenetekhez! Ennek egyik lehetséges eszköze az RG-módszer, amely az elméletben megjelenő fluktuációk szisztematikus figyelembe vételére alkalmas. A módszerben a kölcsönhatást leíró csatolások skálafüggővé válnak, mert a nagy k értékkel jellemzett pályák figyelembe vétele hat a kis k-val jellemzett pályákon megvalósuló átmenetek erősségére. Az *1. ábrán* szemléltetjük, hogyan változik valamelyik g_k-val jelölt csatolás értéke a k skála csökkentésével. Ha a gravitációs kölcsönhatást kvantáljuk, akkor a fluktuációk szerepét a $g_{\mu\nu}$ metrikus tenzor helyről helyre változó értékeiből kialakuló térkonfigurációk adják, amelyeket a k energiaskála szerint csökkenő sorba rendeznek. A QEG-ben a csatolások szerepét a a Newton- és a kozmológiai állandó játssza. A

1. ábra. A csatolások skálázása.



klasszikus pálya egyenlete maga az Einstein-egyenlet, a kvantumfluktuációk pedig az Einstein-egyenlet megoldásához adhatnak korrekciót.

Az *1. ábra* alapján a csatolások a k skálától függnek. Pontosabb leírást akkor kapunk, ha minél több fluktuációt veszünk figyelembe. Realisztikus modellekben a csatolások értékét valamely $k = k_{\max}$ nagy (UV) energián kísérletileg meghatározzuk. Az UV-energia kis távolságoknak felel meg, az alacsony (IR) energia pedig nagy távolságoknak. Az RG-módszernél UV-ből indulunk és az IR felé haladva fokozatosan (infinitezimális Δk lépésekben haladva) számoljuk ki a fluktuációk hatására a G Newton-állandó és a Λ kozmológiai állandó skálafüggését.

A csatolások terében a k-függéssel kirajzolt trajektóriarendszer alkotja a fázisteret. A csatolások skálafüggetlenné válhatnak, a skála változtatására változatlan csatolási értékegyütteseket a fázistér fixpontjainak nevezzük. A fixpontok környezetében az evolúciós egyenletek skálafüggése gyenge, ezért ott lineáris közelítést használva analitikus megoldást kaphatunk. A fázistér origójában van a gaussi fixpont, ami szabad, tömegtelen elméletnek felel meg, hiszen minden csatolás értéke nulla.

A QEG csatolásait UV-ben nem ismerjük, mivel nincsenek a Planck-skálához közeli energiaszinten kísérleti eredményeink. Ellenben azt tudjuk, hogy a mi világunkban mekkora a Newton-állandó és a becsült kozmológiai állandó értéke. Ezek olyan trajektóriát követelnek a fázistéren, amely a gaussi fixponthoz nagyon közel halad el. Az evolúciós egyenletek megoldását a ($E_P = 1{,}22 \cdot 10^{19}$ GeV) Planck-skáláról olyan kezdeticsatolás-értékekkel kell indítanunk, amely a fázistér klasszikus világunknak megfelelő pontján halad át. Gondolkodhatunk fordítva is, indíthatjuk az evolúciót az UV-tartományok felé, hiszen az alábbi (4) RG-egyenleteket megoldhatjuk a k függvényében egyaránt az IR- vagy az UV-skálák felé. Azonban egyszerű dimenzióanalízisből tudjuk, hogy a makroszkopikus világunkban mért G és Λ értékek környezetében a skálafüggés alakja révén a következő dimenziótlan csatolások értelmezhetők:

$$\lambda = \Lambda k^{-2}, \qquad g = G k^{2}. \tag{3}$$

Eszerint az energia növelésével a kozmológiai állandó ugyan egyre kisebb, viszont a g Newton-állandó végtelenhez tart, tehát használhatatlannak tűnik az elmélet. Ezt a súlyos problémát próbálta orvosolni *Weinberg* sejtése [3], amely szerint elképzelhető egy olyan forgatókönyv is, hogy a gravitációs elméletben a Newton-állandó nem a végtelenbe, hanem egy új, UV fixpontba tart nagy energián, amelyen nem jut túl. A fixpontok a differenciálegyenlet statikus megoldásai, ahol nincs skálafüggés. Az elmélet $k \to \infty$ határesetben az UV fixpont miatt az elmélet végessé azaz szingularitásmentessé válik, miután g és minden más fizikai mennyiség értéke véges. Weinberg terminológiája szerint ez a modell *aszimptotikus biztonságos* [4].

Az aszimptotikus biztonság az *aszimptotikus szabadság* általánosítása, amelynél az UV fixpont gaussi, azaz nagy energián az elmélet közeledik a kölcsönhatásmentes világhoz. Aszimptotikusan szabad elmélet a QCD, az erős kölcsönhatás elmélete, amelynek felismerését 2004-ben Nobel-díjjal jutalmazták. A gaussi fixpont körül a csatolás kicsi a nagy energiákon, ez lehetővé tette a QCD perturbatív vizsgálatát, és megalapozta a modell nagyenergiás ütközésekkel történő tesztelését. Az aszimptotikus biztonság nem-gaussi UV fixpontja körül ugyan szintén lehetséges a perturbatív vizsgálat, de a Planck-skálán nem állnak rendelkezésre mérési adatok, amelyekkel a kapott perturbatív eredmények összevethetők lennének. Az UV fixpont legfontosabb szerepe az, hogy a QEG-ből számolt fizikai mennyiségekhez a kvantumgravitációs ingadozások véges járulékot adnak. Az RG-módszer pedig lehetővé teszi, hogy kövessük a QEG-t és a benne szereplő csatolásokat a Planck-skálától a klasszikus gravitációt jellemző csatolásokon keresztül egészen az IR-skáláig.

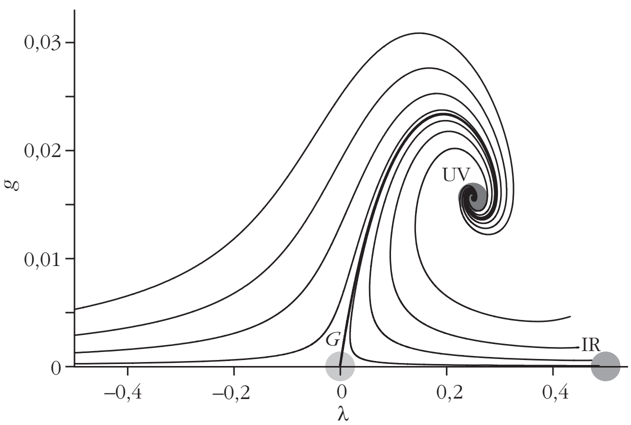
Evolúciós egyenletek

Az RG-módszert alkalmazva a QEG-re, egy csatolt differenciálegyenlet-rendszert kapunk a Newton- és a kozmológiai állandók skálafüggésére. Az egyenletek alakja (d = 4 dimenzióban):

$$k\partial_k\lambda = \frac{2[-96g^2+\lambda+4\lambda^2(11+\lambda)+g(8\lambda(1-3\lambda)-6)]}{4g-(1-2\lambda)^2},$$

$$k\partial_k g = 2g+\frac{24g^2}{4g-(1-2\lambda)^2}. \tag{4}$$

Az egyenletrendszer nemlineáris és nem oldható meg analitikusan, de a fixpontok meghatározhatók. Ehhez a (4) egyenletek megoldását keressük, ha a deriváltak nullák. Három fixpontunk van: az UV fixpont a λ^*_{UV} = 1/4, g^*_{UV} =1/64, a gaussi az origóban, és találunk egy IR fixpontot is a λ^*_{IR} =1/2, g^*_{IR} = 0. Ebben a pontban ugyan szingulárisak az RG-egyenletek, de a megoldás a $\lim_{k\to 0}\lambda = 1/2$ és $\lim_{k\to 0} g = 0$ határesetben létezik. A fixpont környéki analitikus megoldásból kiolvasható, hogy a trajektóriák hogyan viselkednek a fixpont közelében. A két csatolás fázisterét a *2. ábrán* mutatjuk be. Az UV fixpont k csökkenésére egy taszító (tehát UV vonzó) fixpont. Ez a Planck-skála tartománya, innen indulnak ki a trajektóriák. Az UV fixpont egy fókusz, mert spirális alakban távolodnak tőle a trajektóriák. Az evolúció során a k skála csökkenésével a trajektóriák továbbhaladnak a gaussi fixpont felé, amely az origóban található. A gaussi pont nyeregpont, ezért egyrészt vonzza a trajektóriákat, másrészt taszítja azokat a negatív és a pozitív értékű kozmológiai állandók felé, ezáltal jelenik meg a modellben két fázis. Ha λ < 0 alacsony energián, akkor a QEG erős csatolású fázisában vagyunk. Ekkor a téridőmetrika a Minkowski-sík metrikához tart, amikor $k \to 0$, a kozmológiai állandó pedig negatív. Ezzel szemben a



2. ábra. A QEG fázistere, a modellnek két fázisa és három fixpontja van.

gyenge csatolású fázisban a $k \to 0$-nál $\lambda > 0$. Itt a geometria degenerált, azaz $\langle g_{\mu\nu}\rangle = 0$. A gyenge csatolású fázis alacsony energiájú tartományában találjuk a vonzó IR fixpontot [5]. A klasszikus gravitációs elméletet jellemző kis pozitív kozmológiai állandónak és kis Newton-állandónak megfelelő fázistérbeli pont a gaussi fixponthoz nagyon közel, az origótól mindössze 10^{-70} távolságra van k^2 egységben. A pontot tartalmazó trajektória a gyenge csatolású fázishoz tartozik és még alacsonyabb energián, azaz a Világegyetem további tágulásakor tart az IR fixpont felé.

A vonzó IR fixpont a gyenge csatolású fázisban a (4) evolúciós egyenletek szingularitási pontja. A szingularitás azt jelzi, hogy a QEG-ben bevezetett szabadsági fokok már nem alkalmasak az elmélet leírására. Hasonló módon találhatunk szingularitást a kvantumszíndinamikában, ahol eredetileg a kvarkok és a gluonok kölcsönhatását vezetjük be, viszont alacsony energián a hadronok a megfelelő szabadsági fokok. A szingularitásnak nagyon fontos fizikai tartalma van, mert kijelöli, hogy milyen k_c energiaskálán jelenik meg új kölcsönhatás az elméletben. A gyenge csatolású fázis IR fixpontja mutatja a modell alkalmazhatóságának alacsony energiás alsó határát. Az IR szingularitás közelében a nagyon sok, gyakorlatilag nulla energiájú, lágy elemi gerjesztés egy makroszkopikus $1/k_c$ nagyságú graviton-kondenzátumot alkot. Az IR fixpont szingularitásánál bekövetkezik a kvantum-klasszikus átmenet, amely egy új, az Einstein-egyenletektől különböző, nagy távolságokon érvényes klasszikus gravitációs elméletet adhat.

Irodalom

1. M. Reuter, *Phys. Rev. D 57* (1998) 971; M. Reuter, F. Saueressig, *New J. Phys. 14* (2012) 055022.
2. K. G. Wilson, J. Kogut, *Phys. Rep. C. 12* (1974) 77; F. J. Wegner, A. Houghton, *Phys. Rev. A. 8* (1973) 401; J. Polchinski, *Nucl. Phys. B 231* (1984) 269; C. Wetterich, *Phys. Lett. B 301* (1993) 90; J. Berges, N. Tetradis, C. Wetterich, *Phys. Rept. 363* (2002) 223; J. Polonyi, *Central Eur. J. Phys. 1* (2004) 1; S. Nagy, *Annals of Physics 350* (2014) 310.
3. S. Weinberg, in *General Relativity, an Einstein Centenary Survey* (szerk. S. W. Hawking, W. Israel) Cambridge University Press, Cambridge, England, 1979.
4. M. Reuter, F. Saueressig, *Lect. Notes Phys. 863* (2013) 185.
5. S. Nagy, J. Krizsan, K. Sailer, *JHEP 7* (2012) 102.