# KÁOSZ EGY TÁLBAN

Tóthné Juhász Tünde – Karinthy Frigyes Gimnázium (Budapest)
Gócz Éva – Lónyai Utcai Református Gimnázium

„Ha valamit nem értesz, írj róla tanulmányt!”
(*Buza László*)

Még mielőtt az olvasó nagyon megijedne, szeretnénk leszögezni, hogy a fenti idézet nem a szerzők hozzáértését hivatott minősíteni, sokkal inkább egyfajta módszertani útmutatás kíván lenni.

Az ELTE Fizika Doktori Iskolájának előadásait látogatva meglepetten tapasztaltuk, hogy a kaotikus mechanika nevű tantárgy vizsgafeltételeként mindenkinek saját szimulációt kellett készítenie egy tetszőlegesen választott kaotikus példából. Eleinte hitetlenkedve fogadtuk, hogy mi erre valaha is képesek leszünk, azonban a szimuláció során szerzett tapasztalatok arra sarkalltak minket, hogy kollégáinknak is megmutassuk, a káosz megértéséhez egyetlen jó út vezet: a kísérletezés, a saját felfedezés élménye.

Mindehhez oktatási segédanyagot is készítettünk, amely egy nagyon hasznos, ingyenesen letölthető program – a Dynamic Solver – használatának segítségével bemutatja, hogy egyszerű szimulációval miként vizsgálhatjuk a bonyolult tálban mozgó golyó kaotikus mozgását. Az oktatási segédanyag – amely lényegében összefoglalja, hogyan írhatunk be különböző differencálegyenleteket a programba, valamint milyen grafikus beállításokra van szükség a szimuláció futtatásához – letölthető az ELTE Fizika Tanítása Doktori Iskola honlapjáról [1].

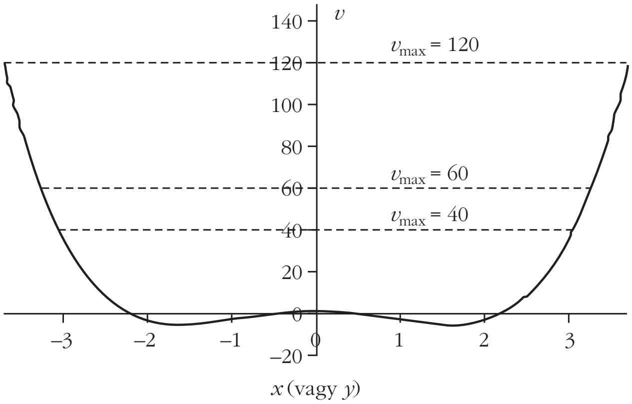
A kaotikus mozgások elméleti hátterét természetesen nem kívánjuk részletesen tárgyalni, erre jó szakirodalom áll rendelkezésre [2] és számos cikk foglalkozik a téma középiskolai tanításával is, azonban a legfontosabb vonásokat bemutatjuk egy konkrét példán, a bonyolult tálban mozgó golyó esetén.

## Milyen a bonyolult tál?

Kaotikus mozgás vizsgálatához szabálytalan mozgásra van szükségünk. Szabálytalanságon itt azt értjük, hogy a vizsgált mozgás tetszőlegesen hosszú ideig sem ismétli önmagát.

Matematikailag nézve minden, legalább három elsőrendű, nemlineáris, közönséges differenciálegyenlettel leírható rendszer viselkedése általában kaotikus [3]. Ez a megfogalmazás persze nagyon messze áll attól, amit középiskolás diákoknak akár szakkör keretein belül meg lehet tanítani, de ezt leegyszerűsíthetjük számukra úgy, hogy például az egydimenziós gerjesztett és a kétdimenziós súrlódásmentes mozgások döntő többsége kaotikus. Az általunk bemutatott példa ez utóbbi osztályba tartozik, itt azonban figyelni kell arra, hogy ha az energián kívül létezik még egy megmaradó mennyiség, akkor az megakadályozza a kaotikus mozgás kialakulását.

Tálban mozgó golyó esetén (súrlódásmentes esetben) – ahol maga a tál alakja határozza meg a potenciált – tehát azt kell megkövetelnünk, hogy a tál legyen „bonyolult”, azaz ne legyen forgásszimmetrikus (*1.* és *2. ábra*). Ilyenkor ugyanis a tál alakja centrális




*1. ábra.* A tál $x$-tengely (vagy szimmetria miatt $y$-tengely) menti metszete. A vízszintes segédvonalak a $V_{\max} = 40$, $V_{\max} = 60$ és $V_{\max} = 120$ esetekben mutatják a tál peremét.

potenciálnak felelne meg, ahol a perdület megmaradása miatt a pályák egyszerűek lennének éppen úgy, ahogy a centrális erőtérben mozgó bolygó példájában is, így nem alakulhatna ki szabálytalan mozgás [4].

Az általunk vizsgált (nem forgásszimmetrikus) potenciálfüggvény a következő:

$$V(x, y) = x^4 + y^4 + x^2 y^2 - 5 x^2 - 5 y^2 - x y.$$

Alkalmasan megválasztott (dimenziótlan) egységekben a $V$ = konstans görbe egyben a tál alakja is.

## A golyó mozgásegyenletei

A golyó mozgását leíró differenciálegyenletek – abban az esetben, ha a tál nem túl meredek – egyszerűek:

$$\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \text{ valamint } \ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Súrlódásmentes esetben – az energiamegmaradás miatt – a golyó potenciális és mozgási energiájának összege állandó. Ezt a szimuláció programozása során paraméterként kezeljük ($E$-vel jelöljük, ami a dimenziótlan összenergia), így vizsgálható például az is, hogy különböző energiák esetén miként változik a mozgás jellege (ezt egy későbbi pontban részletesen bemutatjuk).

Most pedig nézzük meg, hogyan mutatható be a kaotikus mozgás három fő jellemzője (szabálytalanság, előrejelezhetetlenség, fraktálszerkezet a fázistérben) ezen az egyszerű példán.

## A kaotikus mozgás első jellemzője: szabálytalan mozgás

A golyó mozgásegyenleteit az $\dot{x} = u$ és $\dot{y} = v$ jelölések bevezetésével könnyen átalakíthatjuk úgy, hogy négy nemlineáris, elsőrendű differenciálegyenletet kapjunk. A korábban említett matematikai definíció szerint így azt várjuk, hogy a kaotikus mozgás megjelenik a rendszerben.

Vizsgáljuk a mozgás pályáját különböző kezdőfeltételekből kiindulva! Ha azt akarjuk, hogy az $E$ összenergia a különböző kezdőfeltételek esetén ugyanaz legyen, indíthatjuk a golyót úgy, hogy mindig egy adott magasságból, de különböző helyekről engedjük el nulla kezdősebességgel. A $V(x,y) = E$ egyenlet határozza meg az edény alakját az $E$-nek megfelelő magasságban. Egy másik módszer az $E$ összenergia állandó értéken tartására különböző kezdőfeltételek esetén az, hogy tetszőleges pontból indítjuk a golyót úgy, hogy az $y$ irányú sebessége nulla, azaz $v_0 = 0$, az $x$ irányú $u_0$ kezdősebességet viszont a program segítségével számoltatjuk ki úgy, hogy az összenergia mindig az adott $E$ érték maradjon. Ilyenkor tehát a dimenziótlan energia képletéből kiindulva:

$$E = \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} u^2 + V,$$

az $x$ irányú sebességre azt kapjuk, hogy:

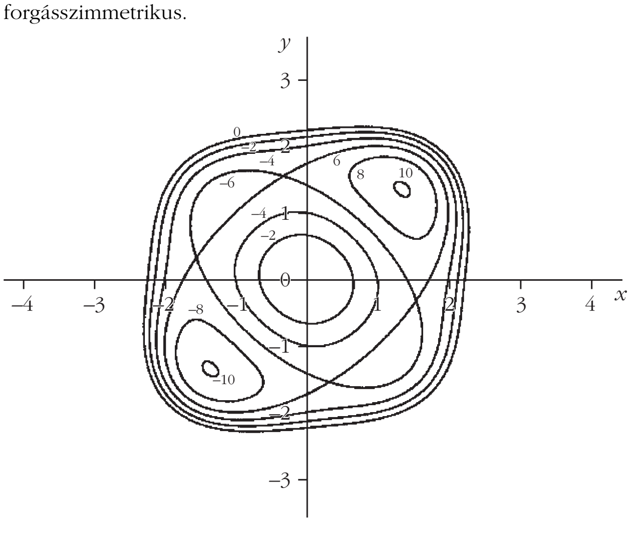
$$u_0 = \sqrt{2 E - v_0^2 - 2 V(x_0, y_0)}\,.$$

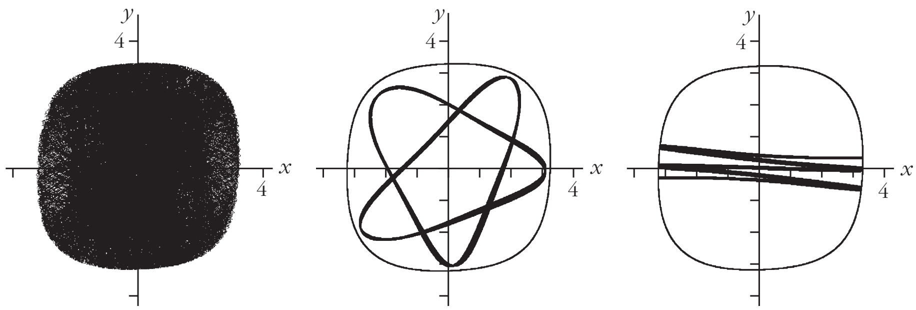
Ha a programba ezt a kifejezést írjuk be $u_0$ értékére, elérhetjük, hogy az összenergia tetszőleges kezdőfeltétel kiválasztása esetén ugyanaz maradjon.

Ha a golyót tehát különböző kezdőfeltételekkel indítjuk, azt találjuk, hogy – a fenti elvárásnak megfelelően – az esetek döntő többségében annak mozgása kaotikus, a tál minden pontját bejárja úgy, hogy közben a mozgása teljesen szabálytalan.

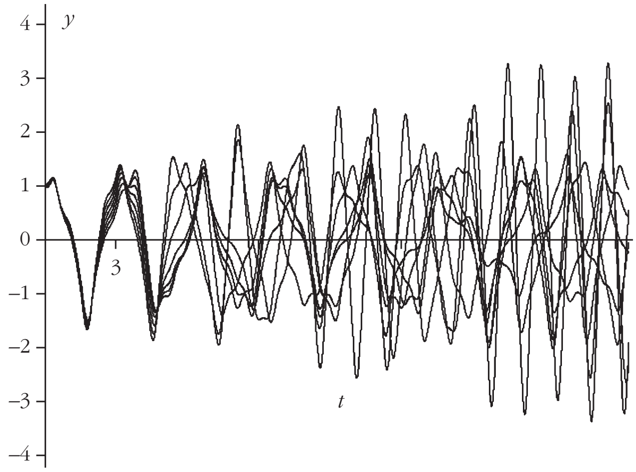
Akadnak azonban olyan jól megválasztott kezdőfeltételek is, amelyekből indulva a mozgás kvázi-periodikus lesz. Ez azt jelenti, hogy a mozgás közel önmagába visszatérő periodikus mozgás. Mivel a visszatérés nem tökéletes, a pályák nem vékony vonalként, hanem fekete „sávokként” jelennek meg. Az ilyen mozgásokat szabályosaknak tekintjük. A *3. ábrán* láthatjuk a mozgást az $x$–$y$ síkon egy kaotikus, valamint két kvázi-periodikus esetben.

*2. ábra.* A tál közepének szintvonalai (ekvipotenciális görbéi). A szintvonalakat csak a [–10; 0] intervallumon rajzoltuk meg, mert ezen a részen (a tál belsejében) látszik legjobban, hogy a tál nem forgásszimmetrikus.






*3. ábra.* Bonyolult tálban mozgó golyó mozgása az $x$–$y$ síkban. Mindhárom esetben $E$ = 60 és $v_0$ = 0, a további kezdőfeltételek pedig a három különböző esetben: a) $x_0$ = −1, $y_0$ = 1,3; b) $x_0$ = −2,1, $y_0$ = −2,3; c) $x_0$ = −2,4, $y_0$ = −0,3. Az a) eset kaotikus, a golyó bejárja az egész tálat, a fekete tartomány – a golyó mozgásának nyoma – így a tál pereméig terjed az adott összenergia esetén. A b), c) eset kvázi-periodikus, a tál peremét az összehasonlíthatóság kedvéért jelöltük.




*4. ábra*. Bonyolult tálban, kaotikusan mozgó golyó fáklyadiagramja. A paraméter: $E$ = 60, a kezdőfeltételek: $x_0$ = 0, $y_0$ ∈ {0,97; 0,98; 0,99; 1; 1,01; 1,02; 1,03}, $v_0$ = 0.

## A kaotikus mozgás második jellemzője: előrejelezhetetlenség

A kaotikus mozgás egy másik fontos tulajdonsága, hogy a kezdőfeltételekre nagyon érzékeny. Ennek következménye az a – középiskolai diákoknak meglepő – tény, hogy két, egymáshoz nagyon közel indított golyó pályája gyorsan szétválik, azaz kis kezdeti eltérés nagyon nagy későbbi különbséghez vezet. Ez azt is jelenti, hogy a golyó mozgása hosszú távon előrejelezhetetlen, leírása csak valószínűségi fogalmakkal lehetséges.

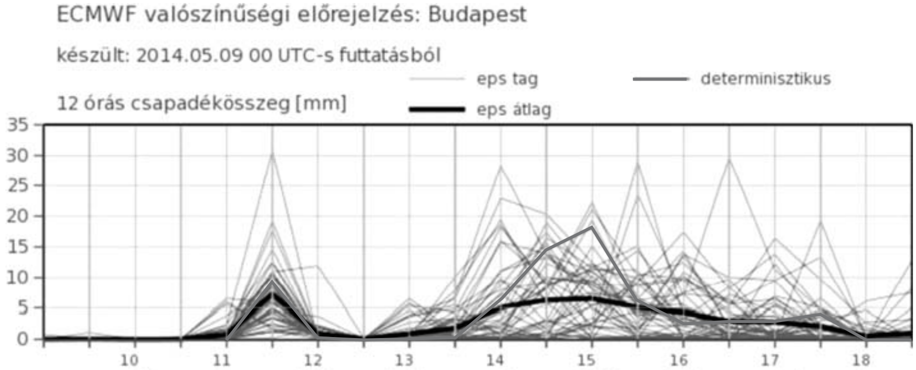
Mindez persze azért olyan meglepő a középiskolában, mert ott gyakorlatilag csak olyan mozgásokat tárgyalunk, amelyek túl egyszerűek ahhoz, hogy kaotikussá váljanak. Azaz csak a „kivételt” tanítjuk, a bonyolultabb fizikai rendszerekre jellemző általános mozgásformát nem. Pedig az egyszerű kaotikus rendszerek vizsgálatával könnyedén rámutathatnánk arra, hogy a valószínűségi leírás nem csak a kvantummechanika jellemzője (ott persze más okból), hanem a mindenki által jóval egyszerűbbnek vélt mechanika sajátja is.

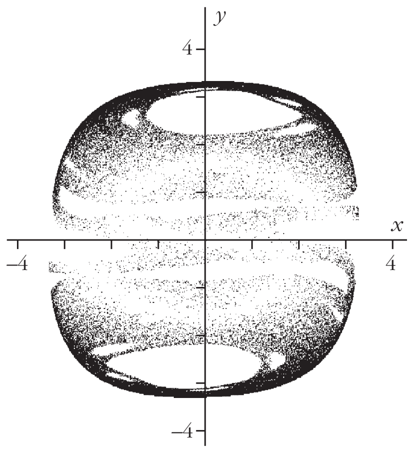
A kezdőfeltételekre való érzékenységet legjobban az úgynevezett fáklyadiagramon szemléltethetjük. Ezen különböző, de egymáshoz nagyon közeli kezdőfeltételekből indított mozgások valamilyen jellemzőjét (például a helykoordináta egyik komponensét) ábrázoljuk az idő függvényében. A tipikus fáklyadiagram valóban a fáklya alakjára emlékeztet: egy bizonyos ideig a különböző mozgások együtt haladnak, később azonban drasztikusan szétválnak, és egy idő után jól látszik, hogy teljesen lehetetlen előrejelezni a golyó mozgását.

A mozgás $y$–$t$ grafikonját 7 különböző, de egymáshoz nagyon közel eső kezdőfeltétellel indítva ábrázoltuk (*4. ábra*). Látszik, hogy $t$ = 2 időpontig a grafikonok együtt mozognak, utána viszont szétválnak. A mozgás tehát csak körülbelül 2 időegységig jelezhető előre. Ennél hosszabb időkre az adható meg, hogy milyen valószínűséggel kerül a mozgó test egy adott állapot környezetébe. Mivel a bonyolult tálban mozgó golyó konzervatív rendszer, ezért $y$ értéke csak az $E$ paraméter által meghatározott értékeken belül mozoghat, így a fáklya nem nyílik teljesen szét (az edény $y$ irányú mérete az $E$ = 60 magasságban körülbelül 3,26 egység, *1. ábra*).

A diákok számára érdekes lehet, hogy a meteorológiai előrejelzésben is teljesen hasonló fáklyadiagramokat használnak: az adott időpontban mért légköri adatokból, valamint több, nagyon közeli adatból kiindulva párhuzamosan több szimulációt futtatnak egyszerre, és vizsgálják, hogy a különböző adatokból indult előrejelzések meddig maradnak nagyjából együtt. Az Országos Meteorológiai Szolgálat honlapján is találhatók ilyen valószínűségi fáklyadiagramok; az *5. ábra* szemléltetésképpen mutatja a 2014. május 9-én készült előrejelzés egy grafikonját.

*5. ábra.* Az Országos Meteorológiai Szolgálat honlapján található, a 12 órás csapadékösszegre vonatkozó valószínűségi előrejelzés 2014. május 9-én [5]. A grafikonok itt másfél napig futnak együtt, az előrejelzési idő körülbelül 1,5 nap.






*6. ábra.* A golyó kaotikus mozgásának Poincaré-metszete az *x–y* síkon ($v$ = 0, valamint $E$ = 60). A kaotikusság ebben az ábrázolásban onnét látszik, hogy a pontok beszórnak egy kiterjedt tartományt, összhangban az előrejelezhetetlenséggel. Kezdőfeltétel: $x_0 = 0$, $y_0 = -1$, $v_0 = 0$. (Az a tény, hogy ez jelentősen eltér a *3.* és a *4. ábrák* kezdőfeltételeitől, mutatja, hogy a rendszerben nagyon könnyű kaotikus mozgást találni.)

## A kaotikus mozgás harmadik jellemzője: fraktálszerkezet a fázistérben

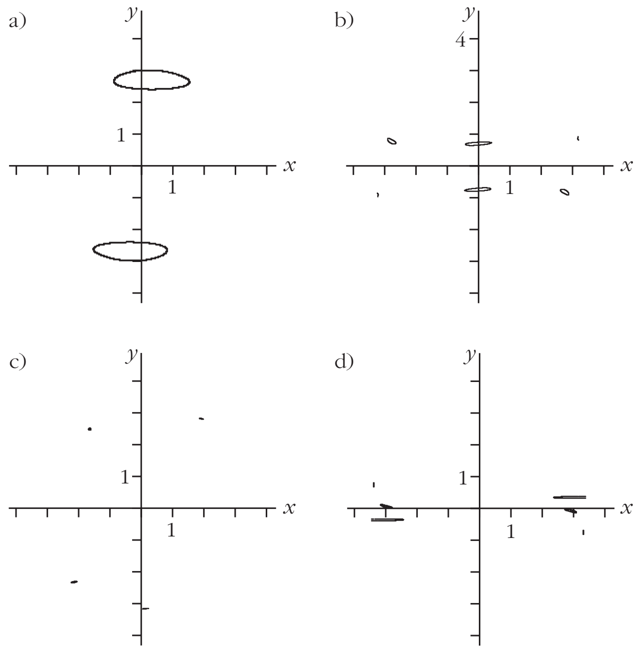
Mindeddig arról volt szó, hogy a kaotikus mozgás szabálytalan, előrejelezhetetlen, így gyakorlatilag derült égből villámcsapásként ér minket a harmadik tulajdonság: a rendezettség.

Ehhez persze megfelelő módon kell vizsgálnunk a mozgást. A módszer lényege, hogy például a bonyolult tálban mozgó golyó esetében az *x–y* síkot nézve csak bizonyos pillanatokban ábrázoljuk a golyó helyét. Ez az úgynevezett Poincaré-leképezés.

Azt, hogy milyen pillanatokban ábrázoljuk a golyó pozícióját, többféleképpen is megválaszthatjuk, azonban talán a legegyszerűbb eset az, amikor a $v$ = 0 feltételt választjuk. Ez azt jelenti, hogy azokban a pillanatokban „fényképezzük le" a golyó helyzetét, amikor az *y* irányú sebessége éppen 0 lesz, és balról jobbra halad az *x* irányban.

A programban beállítjuk, hogy a mozgás Poincaré-leképezését szeretnénk ábrázolni az imént említett feltétellel. (Ennek részletes leírását lásd a letölthető oktatási segédanyagban [1].) Ezek után, ha egy véletlenszerűen választott kezdőfeltétellel elindítjuk a mozgást, rendszerint a kaotikus eset Poincaré-metszetét kapjuk, ami a *6. ábrán* látható módon néz ki.

A grafikont nézve mindjárt szembetűnik, hogy a pontokkal beszórt kaotikus tartományban vannak „lyukak", azaz fehér foltok. Állítsuk be most úgy a kezdőfeltételeket, hogy a lyukakban lévő mozgásokat vizsgáljuk. A következő, *7. ábra* négy olyan, különböző kezdőfeltétellel elindított mozgás Poincaré-metszetét mutatja, amelyek a lyukakba esnek. Ezek az esetek az úgynevezett kvázi-periodikus esetek, amelyekhez hasonlóakat már korábban bemutattunk. A *7. ábra* c) és d) része a *3. ábra* b) és c) részében ábrázolt kvázi-periodikus mozgások Poincaré-metszete. A kvázi-periodikus mozgások képe ebben az ábrázolás-



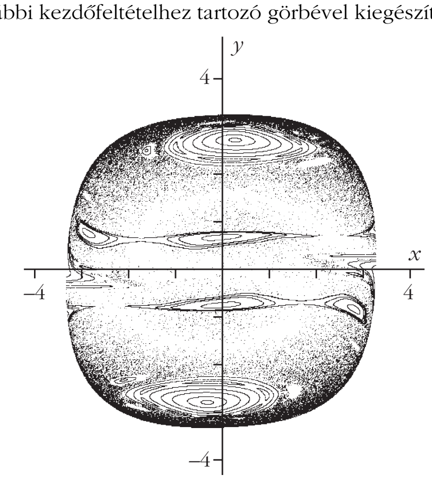

*7. ábra.* A golyó néhány kvázi-periodikus mozgásának Poincaré-metszete ($v$ = 0, valamint $E$ = 60) kvázi-periodikus részekkel. Kezdőfeltételek: a) $x_0 = -0{,}8$, $y_0 = 2{,}6$ és $v_0 = 0$; b) $x_0 = 2{,}7$, $y_0 = -0{,}7$ és $v_0 = 0$; c) $x_0 = -2{,}1$, $y_0 = -2{,}3$ és $v_0 = 0$; d) $x_0 = -2{,}4$, $y_0 = -0{,}3$ és $v_0 = 0$.

ban tehát zárt görbe, ami arra is utal, hogy az ilyen mozgások pontosan előrejelezhetők, ezért őket egyszerűeknek tekinthetjük.

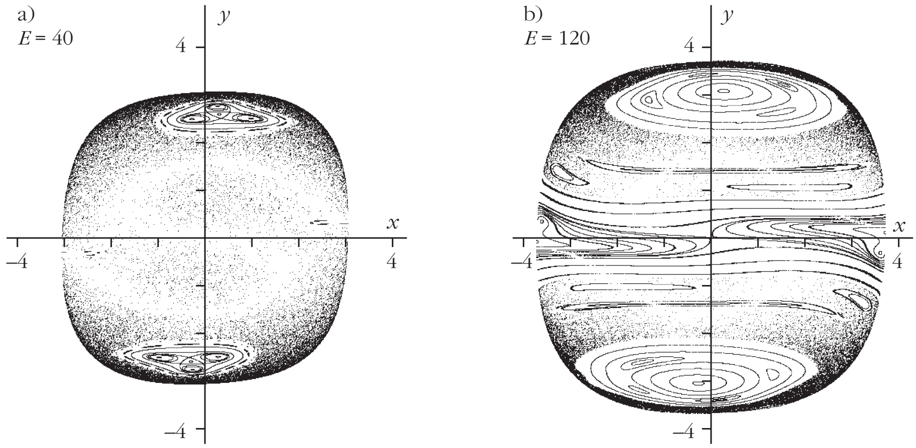
Ezek után nem marad más hátra, mint a grafikonok egyesítése, azaz a Poincaré-metszetek több, különböző kezdőfeltétellel való megrajzolása, ami kiadja a mozgás teljes Poincaré-térképét (*8. ábra*).

Ha valami meglepő és izgalmas a káoszban a diákok számára, akkor ez biztosan az. Egy ilyen Poincaré-térkép megrajzolása (a szimuláció beprogramozása után) egyáltalán nem bonyolult, viszont benne rejlik a saját felfedezés élményének lehetősége, a kísérletezés szépsége. Ráadásul ez az, ami segít megértetni a diákokkal, hogy a káosz nem teljes rendezetlenség (véletlenszerűség), hanem szabályos struktúrával rendelkező rendszer.

*8. ábra.* A golyó mozgásának teljes Poincaré-térképe ($E$ = 60). A *6.* és *7. ábra* görbéit közös koordinátarendszerben rajzoltuk fel, néhány további kezdőfeltételhez tartozó görbével kiegészítve.



A *8. ábrán* látható Poincaré-metszet fraktálszerkezetű. Korábban is olvashattunk a *Fizikai Szemlében* a fraktálokról, így most – a teljesség igénye nélkül – csak annyit jegyzünk meg, hogy az itt látható fraktálszerkezet az úgynevezett kövér fraktál, ami a konzervatív rendszerek sajátossága. Egy hasonlóan kövérfraktál-típusú kaotikus jelenség, a rugalmas inga tárgyalását egy korábbi cikkben olvashatjuk [6].




*9. ábra.* A *8. ábrához* hasonlóan megrajzolt Poincaré-térképek $E$ = 40 és $E$ = 120 esetekben.

Érdekes megfigyelni azt is – akár házi feladatként is kiadható a diákoknak –, hogy miként változik a Poincaré-metszet fraktálszerkezete, ha a golyó teljes energiáját, mint paramétert változtatjuk. Ezt mutatja be a *9. ábra*. A kaotikus (pontozott) tartomány mindkét esetben nagy kiterjedésű. Ezeken belül a mozgás előrejelezhetetlen, hosszú távon valószínűségi szemléletben értelmezhető. (A zárt görbék előrejelezhető, kvázi-periodikus mozgásokhoz tartoznak.)

## Miért érdemes tanítani a káoszt?

Amint azt a most bemutatott példából is látja a tisztelt olvasó, a káosz megértéséhez nem kellenek bonyolult fogalmak, középiskolában (sajnos a szűkös kerettantervi számok miatt inkább csak szakkörön) tanítható. Segít a valószínűségi szemlélet elfogadásában azáltal, hogy megmutathatjuk, ez nem csak a kvantummechanika sajátja. Ráadásul megajándékozza a diákokat a felfedezés örömével, és teret ad nekik a kísérletezésre, az önálló munkára, saját eredmények elérésére.

Irodalom


1. http://fiztan.phd.elte.hu/nyilt/publokt/tjtunde.zip vagy http://www.karinthy.hu/home/tjtunde/~
2. Tél T., Gruiz M.: *Kaotikus Dinamika*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
3. Gruiz M., Tél T.: A káoszról, kicsit bővebben. *Fizikai Szemle 55* (2005) 218–221.
4. Gruiz M., Tél T.: A káosz. *Fizikai Szemle 55* (2005) 191–193.
5. http://www.met.hu/idojaras/elorejelzes/valoszinusegi/ – a letöltés időpontja: 2014. május 9.
6. Gruiz M., Radnai Gy., Tél T.: A rugalmas fonalú ingáról – mai szemmel. *Fizikai Szemle 56* (2006) 337.