VÉLEMÉNYEK

A VEKTORPOTENCIÁLRÓL
(aki $\boldsymbol{A}$-t mond, mondjon $\boldsymbol{B}$-t is)

Hraskó Péter
PTE Elméleti Fizika Tanszék

A potenciálokról általában

Az Olvasó kedvéért röviden összefoglaljuk az elektromágneses potenciálok néhány fontos tulajdonságát. Ezeket természetesen az [1]-ben is meg lehet találni.

Az elektromágneses mező az $\boldsymbol{E}$ elektromos és a $\boldsymbol{B}$ mágneses mezőn keresztül fejti ki a hatását. Ez a két mező szerepel ugyanis a töltésekre ható $e\boldsymbol{E}$ Coulomb-erő és az $e(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ Lorentz-erő képletében.

A számításokban azonban ezeknél a mezőknél gyakrabban használják az $\boldsymbol{A}$ vektorpotenciált és a ϕ skalárpotenciált, amelyeket a

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \quad \text{és} \quad \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\phi \tag{1}$$

képletek kapcsolnak össze az elektromágneses mezőkkel.

Reflexiók *Hárs György* és *Varga Gábor* írására [1].

A potenciálokat az $\boldsymbol{E}$ és a $\boldsymbol{B}$ kiszámítását megkönnyítő segédmennyiségeknek tekintjük, mert amikor a töltésekre kifejtett hatásról van szó, mindig az (1) kombinációban fordulnak elő. A potenciálok egyértelműen meghatározzák a térerősségeket, de adott térerősségekhez végtelenül sok különböző potenciál tartozik. Ha az (1) képletben $\boldsymbol{A}$-t és ϕ-t olyan $\boldsymbol{A}'$-vel és ϕ'-vel helyettesítjük, amelyek az

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \mathrm{grad}\,\chi \quad \text{és} \quad \phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \tag{2}$$

mértéktranszformációval kaphatók meg $\boldsymbol{A}$-ból és ϕ-ből, akkor az $\boldsymbol{E}$ és a $\boldsymbol{B}$ mezők változatlanok maradnak.

Mivel az elektromágneses mezőről minden tapasztalati információ $\boldsymbol{E}$ és $\boldsymbol{B}$ közvetítésével jut el hozzánk, az egymástól mértéktranszformációban különböző vektor- és skalárpotenciálok közül nem tudunk kiválasztani egy „igazit”. Segédmennyiségekről lévén szó ez egyáltalán nem hiányosság, hanem inkább előny, hiszen lehetőséget ad arra, hogy az éppen vizsgált problémához leginkább megfelelő potenciált válasszuk.

A potenciálok gyakran alkalmazott rögzítési módja az, amikor $\boldsymbol{A}$-t divergenciamentesnek választjuk és megköveteljük, hogy a végtelenben tartson nullához. Ez a *Coulomb-mérték*.

Tekintsünk most egy nagyon hosszú *ideális* szolenoidot. Mint ismeretes, egy ilyen szolenoid belsejében tengelyirányú homogén $\boldsymbol{H}$ mágneses térerősséget találunk, amelynek nagysága a szolenoid egységnyi szakaszán átfolyó árammal egyenlő, a szolenoidon kívül pedig nincs mágneses mező. Ez a Stokes-tételből következik, amelynek következtében minden olyan kontúrra, amely a szolenoidot egyszeresen körülöleli

$$\begin{aligned}\oint (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t})\,\mathrm{d}l &= \int (\mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}s = \\ &= \int (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}s = \Phi.\end{aligned} \tag{3}$$

A jelölések sztenderdek, és Φ a mágneses fluxus értéke a szolenoid belsejében. A (3) alapján könnyen felírhatjuk a végtelenül hosszú R sugarú ideális szolenoid vektorpotenciálját Coulomb-mértékben, hengerkoordinátákban:

$$\boldsymbol{A} = (A_r, A_\varphi, A_z) = \begin{cases} (0, \dfrac{r\Phi}{2\pi R^2}, 0), & \text{ha } 0 < r < R, \\ (0, \dfrac{\Phi}{2\pi r}, 0), & \text{ha } R < r. \end{cases} \tag{4}$$

Az [1]-ben a *2. ábra* ezt az A_φ-t mutatja az r függvényében.

A szolenoidon kívül ezen $\boldsymbol{A}$ mező rotációja nulla, ezért itt $\boldsymbol{B} = 0$, ahogy lennie kell. Ebből következik, hogy hiába különbözik itt maga az $\boldsymbol{A}$ nullától, nem vált ki semmilyen elektrodinamikai hatást.

Az Aharonov–Bohm-effektusról[1]

A múlt század közepén *Y. Aharonov* és *D. Bohm* nagy jelentőségű felfedezést tett. Az elektronokkal végezhető kvantummechanikai kétrés-kísérletet analizálták, amelyben az elektronnyaláb minden egyes elektronja mindkét résen áthaladva önmagával interferál. Arra jöttek rá, hogy ha a rések közé ideális szolenoidot helyeznek el úgy, hogy a két résznyaláb közrefogja, akkor az interferenciakép $e\Phi / \hbar$ szöggel eltolódik [2]. Ez azért nagyon meghökkentő, mert az elektronnyaláb teljes egészében a szolenoidon kívül helyezkedik el, ahol egyáltalán nincs mágneses mező ($\boldsymbol{B} = 0$).

Aharonov és Bohm dolgozata szenvedélyes vitát váltott ki. Eleinte sokan kétségbe vonták a számításaik helyességét, amikor pedig az igazuk kétségtelenül bebizonyosodott, a fáziseltolódást a vektorpotenciálnak tulajdonították, amely (4) szerint körülöleli a szolenoidot, és ezért képes közvetlenül hatni az elektron hullámfüggvényére. Az elméletből és későbbi kísérleti igazolásából azt a következtetést vonták le, hogy a kvantummechanikában nemcsak $\boldsymbol{E}$ és $\boldsymbol{B}$, hanem az $\boldsymbol{A}$ vektorpotenciál is a „saját jogán” megfigyelhető.

Ez az interpretáció azonban gyenge lábakon áll, ma már nem is ez a mértékadó felfogás. Először is, amikor a szolenoidot a résznyalábok nem fogják közre, semmilyen hatása sincs az interferenciaképre, bármilyen közel legyen is valamelyik résznyalábhoz. Másodszor, továbbra is érvényben marad az az érv, hogy a potenciálok mértéktranszformációval megváltoztathatók anélkül, hogy ez bármilyen hatással lenne a fizikai jelenségekre, az Aharonov–Bohm-effektust is beleértve.

A vektorpotenciál ezek szerint – az [1] állításával ellentétben – az Aharonov–Bohm-effektusban sem válik önállóan mérhető mennyiséggé. A kvantummechanikai jelenség újdonsága abban áll, hogy a $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ mellett a vektorpotenciálból képzett másik mértékinvariáns kifejezéstől, az $\oint(\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l})$-től függ. *A szemlélet számára* persze teljesen hozzáférhetetlen, hogy egy mennyiség integrálja úgy befolyásolja egy mérés eredményét, hogy az integrandus elemei külön-külön teljességgel kimutathatatlanok. De a szemléletnek ez a kudarca valójában már a szolenoid nélküli kétrés-kísérletben bekövetkezett.

Az [1] gondolatmenetének bírálata

Miből vonja le mindezek ellenére Hárs György és Varga Gábor már a cikkük címében azt a következtetést, hogy a vektorpotenciál valóságosan létező vektormező?

Az érvelésüket két koncentrikus szolenoidból álló elrendezésre alapozzák, amelyet ideális transzformátornak tekintenek. Részletes számítással megmutatják, hogy amikor a belső tekercsben egyenáram folyik, a külső tekercs helyén a mágneses mező még nem túl ideális viszonyok között is gyakorlatilag nulla, végtelen hosszú, ideális szolenoid körül pedig (4) következtében pontosan nulla. Ez a helyzet akkor is fennmarad, amikor a két szolenoid transzformátor üzemmódban működik, vagyis Φ periodikusan függ az időtől: „…a primer tekercsen kívül, a szekunder tekercs helyén gyakorlatilag nincsen mágneses tér, így a mágneses fluxus és annak változása is csak a primer tekercs belsejére korlátozódik”. A belső (primer) szolenoid eszerint anélkül hoz létre indukált feszültséget a külső (szekunder) tekercsben, hogy ott megjelenne mágneses térerő.

Ez, mint állítják, lehetetlen lenne, ha a külső tekercs helyén nem lenne ott a (4) vektorpotenciál. Az

[1] Az [1]-ben az Aharonov–Bohm-effektusról is szó esik, de a belőle levont következtetések elfogadhatatlanok.

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

képlet alapján *ennek, a már ott lévő vektorpotenciálnak* a változása hozza létre azt az elektromotoros erőt a külső tekercsben, amelynek a valóságos megléte ily módon a vektorpotenciál realitásának a kézzelfogható bizonyítéka.

Figyeljük meg jól, a szerzők nem tagadják, hogy $\boldsymbol{A}$ mindig az $\boldsymbol{E}$-n (és persze a $\boldsymbol{B}$-n) keresztül hat. Arra mutatnak rá, hogy ahol ez a hatás bekövetkezik, nincs se $\boldsymbol{E}$, se $\boldsymbol{B}$, csak $\boldsymbol{A}$ van. Ebből vonják le azt a következtetést, hogy a vektorpotenciál valóságosan létező vektormező.

Mi a baj ezzel az első látásra kifogástalan érveléssel? Ha egy kicsit jobban elgondolkozunk rajta, magát azt a *kritériumot* kezdjük egyre gyanúsabbnak találni, amely szerint egy fizikai vektormezőnek csak ott lehet időbeli deriváltja, ahol ez a mező *már eleve ott volt.* Az olyan szubsztanciális közegek, mint a víz vagy a levegő, valóban csak ott jöhetnek rezgésbe, ahol már ott voltak. De az $\boldsymbol{E}$-nek, a $\boldsymbol{B}$-nek vagy akár az $\boldsymbol{A}$-nak egyáltalán nem kellett eleve „ott lennie”, ahol hatásukat kifejtik, hiszen érkezhettek máshonnan is, például a belső szolenoid felől.

Amikor az ember ezen ellenvetés megalapozottságát kezdi egyre meggyőzőbbnek találni, hamar ráébred arra is, hogy a cikk érvelése szempontjából a külső tekercs léte tulajdonképpen teljesen lényegtelen. Mondjunk is le róla és helyette rögzítsünk le a belső szolenoidtól valamilyen távolságban egy pontszerűnek tekinthető dipólt, amely az elektromos mező hatására képes polarizálódni. A cikk érvelését megismételhetjük, és eljuthatunk arra – a most már tényleg egyre kétségesebb – következtetésre, hogy amikor a szolenoidban váltóáram indul be, a (4) időfüggő Φ-vel érvényben marad, ezért a szolenoidon kívül $\boldsymbol{B}$ továbbra sem jön létre, a dipól helyén eleve ott lévő vektorpotenciál viszont változni kezd, ezáltal létrehoz elektromos mezőt, amely képes polarizálni a dipólt. Mivel pedig a tapasztalat szerint a dipól tényleg rezgésbe jön, ezzel beigazolódik a vektorpotenciál fizikai realitása.

De miért ne érkezhetne ez a hatás a szolenoidból sugárzás formájában? A cikk számítási módja szerint valóban nem érkezhet, mert a

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{5}$$

egyenlet csonkított (kvázistacionárius) $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}$ változatát használták. Ha ebben a $\boldsymbol{B}$-t helyettesítjük $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$-val, Coulomb-mértékben a $\Delta \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{j}$ Poisson-egyenletre jutunk, amelynek megoldása minden időpillanatban a tér minden pontjában meghatározza $\boldsymbol{A}$-t és $\boldsymbol{B}$-t az áram *ugyanabban a pillanatban* érvényes értéke alapján.

Ha így számolunk, valóban nincs sugárzás, amit – talán – úgy is értelmezhetünk, hogy minden marad ott, ahol volt. Egy transzformátornál ez a kvázistacionárius közelítés teljesen elegendő minden olyan kérdés megvizsgálásához, amely a transzformátor működése szempontjából érdekes lehet. De az a kérdés, hogy amikor a transzformátor primer tekercsét áram alá helyezzük, kell-e valaminek már eleve ott lennie a szekunder tekercs helyén ahhoz, hogy benne feszültség indukálódjon – ez a kérdés nem tartozik a transzformátor tervezőjét érdeklő problémák közé.

Amikor azonban mégis éppen ez az, ami érdekel, nem használhatjuk az (5) csonkított változatát, mert ezzel ahelyett, hogy a problémát vizsgálni kezdenénk, már el is döntöttük. A csonkítatlan (5) egyenletet kell alapul venni, amely a vektorpotenciállal kifejezve hullámegyenlet:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial^2 t} - \Delta \boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{j}.$$

A (4) vektorpotenciál ezen egyenletnek időfüggő Φ-vel sem megoldása, mert az egyenlet az $\boldsymbol{A}$ véges sebességű *terjedését* írja le.

Az a lehetőség, hogy a külső tekercset az érvelés sérülése nélkül pontszerű dipóllal helyettesíthetjük arra utal, hogy az elrendezést kifejezetten félrevezető primer és szekunder tekercset tartalmazó transzformátornak tekinteni. A kérdésfeltevésnek sokkal inkább megfelel, ha úgy nézünk rá, mint egy rádióadóra és egy rádióvevőre. Ekkor számítások nélkül is tudhatjuk, hogy semminek se kell eleve ott lenni a vevőnél ahhoz, hogy miután az adó működni kezd, a vevő (kis késéssel) megszólaljon. Ehhez egyáltalán nem szükséges, hogy a vektorpotenciál valóságosan létező vektormező legyen.

Irodalom

1. Hárs Gyögy, Varga Gábor: A mágneses vektorpotenciál, mint valóságosan létező vektormező. *Fizikai Szemle 65/1* (2015) 14–18.
2. Geszti Tamás: *Kvantummechanika*. Typotex, Budapest, 2007.