

A 11. osztályban a csillagászat témaköréből emeltem ki egy epizódot, hogy szakköri munkában részletebben is megvizsgáljunk egy égitestet.

A Hold Föld körüli keringését játszottam el a diákokkal fizikaórán, amikor az egyik tanuló megkérdezte, hogy vajon a Föld tengely körüli forgásának kerületi sebessége, vagy a Hold Föld körüli keringési sebessége a nagyobb? Egy kis rávezetés után volt olyan diák, aki a periódusidők hányadosaiból megbecsülte a két szögsebesség viszonyzatát:

$$\frac{\text{Hold keringési ideje}}{\text{Föld forgásának periódusideje}} = \frac{27 \text{ nap}}{1 \text{ nap}} = 27.$$

Azaz a Föld $\omega_{\text{Föld}}$ forgási szögsebessége a Hold ω_{Hold} keringési szögsebességének 27-szerese:

$$\omega_{\text{Föld}} = \frac{2\pi}{T_{\text{Föld}}} \Rightarrow \frac{2\pi}{27 \cdot T_{\text{Föld}}} = \omega_{\text{Hold}}$$

ahol $T_{\text{Föld}}$ a Föld forgásának periódusideje, 1 nap = 86 400 s. A Föld egyenlítői kerülete $K_{\text{Föld}} \approx 40$ ezer km, így a Föld forgásának maximális kerületi sebessége:

$$v_{\text{Föld}} = \frac{K_{\text{Föld}}}{T_{\text{Föld}}} \approx \frac{4 \cdot 10^7 \text{ m}}{8,64 \cdot 10^4 \text{ s}} \approx 460 \text{ m/s}.$$

A Hold keringési sebességét a Föld–Hold-távolság \bar{d} átlagának felhasználásával kaphatjuk meg:

$$v_{\text{Hold}} = \omega_{\text{Hold}} \bar{d} \approx \frac{2\pi}{27 \cdot 8,64 \cdot 10^4 \text{ s}} \cdot 3,84 \cdot 10^8 \text{ m} \approx 1000 \text{ m/s}.$$

Tehát a Föld tengely körüli forgása maximális kerületi sebességének több mint kétszerese a Hold Föld körüli keringési sebessége. A keringési sebességeket a tanulók a függvénytáblázatból kikeresve ellenőrizték.

A diákok érdeklődése adta az ötletet, hogy mérjük meg a Hold keringési sebességét filmes technikával.

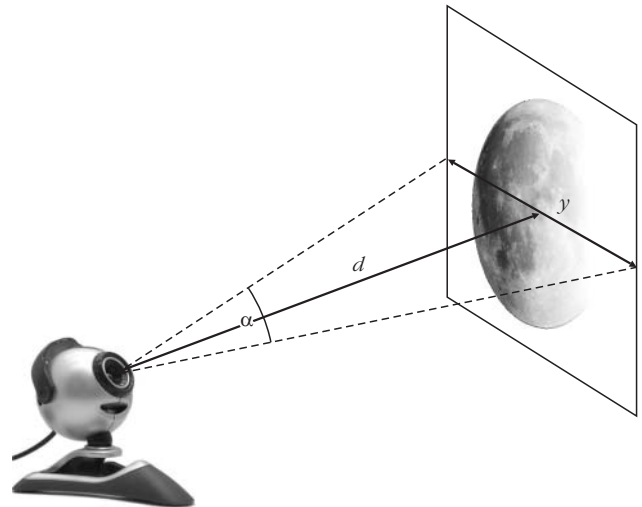
A mérés

Az érdeklődők először házi feladatot kaptak: sorozatfelvételt kellett készíteniük a WebCam Laboratory [1] programmal. A tanulók megmérték a saját kamerájuk α látószögét (1. ábra). A kamera látószögéből és a d Hold–Föld-távolságból a teljes képernyő által befogott szélességet meg tudták határozni.

$$y = 2 d \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad (1)$$

A Hold–Föld-távolságot a Hold felszínén elhelyezett lézertükrök segítségével mérik az Egyesült Álla-

Köszönöm Juhász András és Jánosi Imre segítségét.



1. ábra. A kamera kalibrálásához meghatározott távolságra levő, ismert méretű tereptárgyat kell lefényképezni.

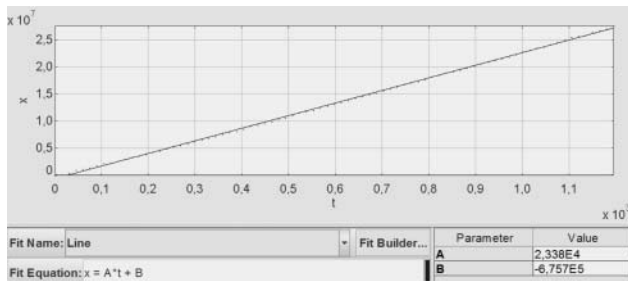
mokban és Franciaországban holdi lézertáv-méréssel foglalkozó obszervatóriumokban, néhány centiméteres pontossággal [2].

Mivel a Hold–Föld-távolság nem állandó az égitestek mozgása során, a felvétel dátumának megfelelő értéket kellett behelyettesíteni az (1) képletbe. A Hold–Föld-távolságot, tetszőleges dátumot választva, másodpercre pontosan a <http://time.unitarium.com/moon/where.html> weboldalon lehet megtalálni. A tanulók a felvétel kezdeti és végső időpontját átszámolták az egyezményes koordinált világidőre (UTC). Ezen időpontokra – 2012. december 30. 6:19:55 és 6:39:55 (UTC) – a weboldalon működő szoftver kiszámolta a keresett távolságokat, amelyek rendre 397 251,485 km, illetve 397 208,891 km. A kalibráláshoz szükséges távolságadat a két leolvasott érték átlaga volt (397 230,188 km).

A Tracker [3] szoftverrel a felvételekről szakköri munka keretében videóanalízist végeztünk. A szoftver

2. ábra. A 25. filmkocka nagyított képe a videóanalízis-szoftver képernyőjén.





3. *ábra.* A szoftver által meghatározott értékeket ábrázolva, és azokhoz egyenest illesztve, az A paraméter adja v_x nagyságát.

könnyen felismerte a sötét háttérből kiemelkedő Holdat, és követte annak mozgását. A programban a kalibráláson kívül rögzíteni kellett, hogy két szomszédos filmkocka között mennyi idő telt el (a mi esetünkben ez 15 s volt). A koordinátatengelyeket úgy állították be a tanulók, hogy az első filmkockán az origóba essen, az utolsó kockán pedig a x tengely pozitív részén legyen a Hold képe (2. *ábra*).

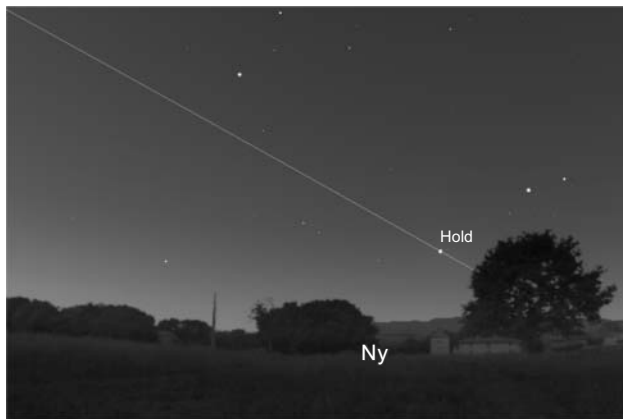
A szoftver által kiszámított x - t értékpárokhoz egyenest illesztve (3. *ábra*) a tanulók meghatározták a Hold látszó mozgásának sebességét az égbolton az x irány mentén, amire 23,38 km/s adódott.

A sebességvektor iránya változó volt, de a felvételekről elmondhattuk, hogy a Hold keletről nyugati irányba haladt az égbolton. A pontos tájolást a Stellarium nyílt forráskódú számítógépes planetáriumprogrammal [4] végezték el a diákok. Megadták a mérés pontos idejét és helyét, majd megkeresték a virtuális égbolton a Holdat (4. *ábra*).

Az elemzés során két „szokatlan” dologra lettek figyelmesek a tanulók: a Hold látszó pályája görbe, a kapott sebességérték pedig igen nagy.

A diákokat ötleteltettem, és a vita eldöntésének céljából azt a feladatot kapták, hogy a következő szakköri órára könyvtármunka alapján próbálják igazolni gondolatmeneteiket. A következő szakkör kiselőadásai alapján a tanulók megállapították, hogy a Hold látszólag kör alakú pályája és keletről nyugatra mozgása miatt lassan mozgó égitest kell, hogy legyen (5. *ábra*).

5. *ábra.* Minden álló, vagy lassan mozgó égitest látszólag körpályát ír le, amelynek középpontja az égi pólus, a Föld forgástengelyének dőfpontja az égbolton [6].



4. *ábra.* A mérési adatok alapján megadott virtuális kép a Stellarium programban.

Rájöttek, hogy a látszó mozgás (és a viszonylag nagy sebesség) a Föld tengely körüli forgásának eredménye. Ahhoz, hogy a Hold keringési sebességét megkaphassuk, le kell vonni a Föld forgásából származó v_l látszólagos mozgást.

$$v_l = \omega_{\text{Föld}} (d + R + r) = \frac{2\pi}{T_{\text{Föld}}} (d + R + r) = 29,48 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad (2)$$

Ahol R és r a Föld és a Hold sugara.

A számolásnál a Föld szögsebesség-ingadozásai elhanyagolhatók, a Hold-Föld-távolság változásai, amely 21 296 km, viszont kevésbé (6. *ábra*).

A tanulók a (2) sebességértéket összehasonlították a mért értékkel ($v_m = 23,38$ km/s), és a következő megállapításokat tették:

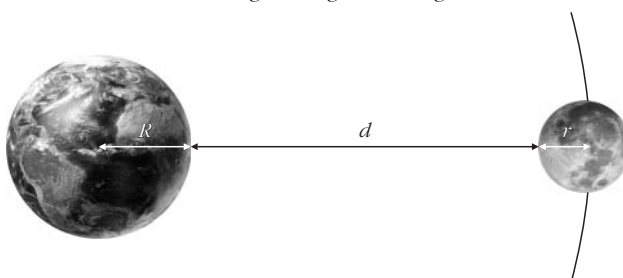
1. A mért sebességérték a Föld forgásának látszólagos mozgási sebességénél kisebb, tehát a Hold keringési iránya megegyezik a Föld tengely körüli forgásának irányával. Ennek ellenőrzéseként az adatok alapján lefuttattunk egy szimulációt, amely másodperc pontosan mutatja a két égitest helyzetét és mozgását [5] (7. *ábra*).

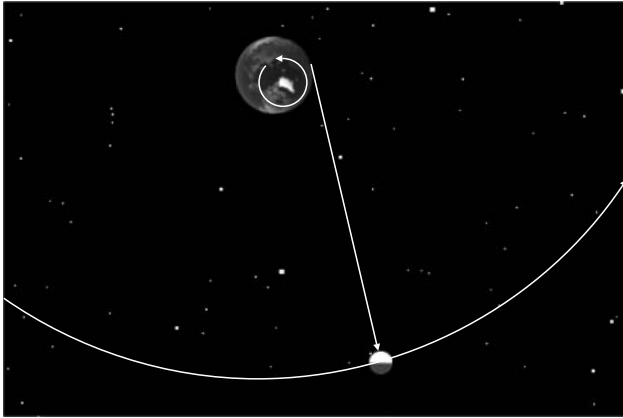
2. A Hold pálya menti sebességét az alábbi összefüggés alapján határoztuk meg:

$$v_{\text{Hold}} = v_l - v_{\text{mért}} \approx 6,1 \text{ km/s.} \quad (3)$$

A tanulók a Wikipédián megkeresték a Hold pálya menti sebességét, amelynek legkisebb, átlagos és

6. *ábra.* A Hold-Föld-távolságból (d) és az égitestek sugaraiból (r , R) kiszámolható a látszólagos mozgás sebessége.





7. ábra. Az adatok alapján lefuttatott szimuláció [5] magyarázó nyilakkal ellátott képe.

legnagyobb értéke rendre 0,968 km/s, 1,022 km/s, illetve 1,082 km/s.

A látszólagos mozgási sebességhez képest a Hold mért keringési sebességére valóban kis értéket kapunk, de az a hivatalos értéktől eltért ($\Delta v \approx 5$ km/s). Az eltérés okainak tisztázása további vizsgáldást tett szükségessé.

A pontatlanság okai

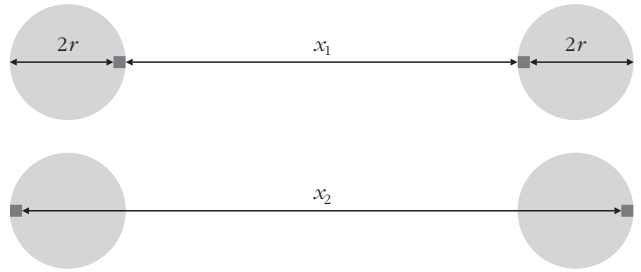
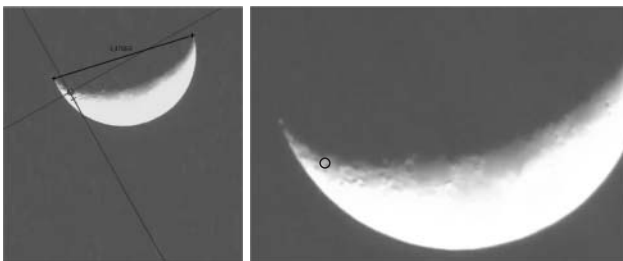
Munkánk során ügyeltünk a pontos időmérésre, a távolságadatokat precíz meghatározására, a kalibrálásra, tehát a hibát máshol kellett keresnünk. A felvett filmanyagot vettük görcső alá és vizsgáltuk meg részletesebben. A felvételen kinagyítottuk a Holdat és meglehetősen pixelesnek találtuk azt. A szoftver a Holdat, mint kis pixelekből álló fényes területet érzékelt, amelynek fényessége is változott az időben. A fényváltozás miatt a Hold szoftver által automatikusan detektált helyzete nem mindig esett a terület középpontjába.

A felvétel $t_{\text{videó}} = 1220$ másodperce alatt a Hold által megtett út a 4. ábra alapján: 27 850 km volt, ennek maximális hibája a 8. ábra szerint a Hold sugarának négyszerese. A keresett hibát a (4) összefüggés adja meg:

$$\Delta v = \frac{4r}{t_{\text{videó}}} = \frac{4 \cdot 1735 \text{ km}}{1220 \text{ s}} = 5,7 \frac{\text{km}}{\text{s}}. \quad (4)$$

Pontosabb mérést csak komolyabb optikával lehet megvalósítani. Ennek hiányában sem adtuk fel a reményt,

9. ábra. A Hold átmérőjét használtuk a kalibráláshoz. A koordinárendszer x tengelye a mozgás irányába mutat (balra). A felvétel nagyított képe (jobbra). A részletgazdagabb felvétel lehetőséget adott a pontosabb nyomkövetésre.



8. ábra. A lehető legrosszabb azonosítást feltételezve (az objektum helyzetét a kis négyzet jelöli) a felvétel első és utolsó képkockáján a Hold által megtett út: $x_2 = x_1 + 4r$.

hogy a méréseinket pontosítsuk. Feltételeztük, hogy a világhálón vannak olyan filmek, amelyek a webkamerás felvételeinknél sokkal jobb felbontásúak és azok elemzésével pontosabb mérési eredményekhez jutunk.

Mérések videómegosztón található filmekről

A YouTube videómegosztón rengeteg hasonló film közül választhatunk. A kamera látószögének legegyszerűbb meghatározása az lenne, ha a filmet feltöltő elárulja kamerájának adatait, ez azonban igen ritka. Ennek hiányában olyan filmet érdemes választani, ahol fel van tüntetve két képkocka között eltelt időtartam, és a kép meglehetősen nagyított. Ekkor a kalibráláshoz a kamera látószöge helyett a Hold átmérőjének számértékét használhatjuk fel. A nagyított kép lehetőséget ad egy kisebb kráter kijelöléséhez, ami lényegesen precízebb nyomkövetést eredményez az előző méréshez képest. Az egyik ilyen használható filmet a [7] webcímről töltöttük le (9. ábra). A film 1 kép/s mintavételezésű, 6 percet fog át, és 2013. október 3-án készült.

A 6 perces időtartam alatt a Hold látszó pályája egyenesnek tekinthető. A videóanalízist lefuttatva a diákok a Hold látszó mozgására 27,2 km/s sebességet kaptak (10. ábra).

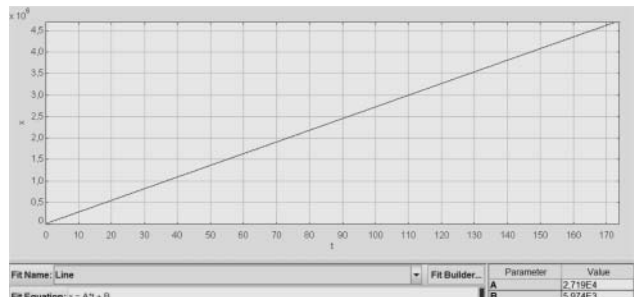
A felvétel időpontjához tartozó 385 288,989 km Hold-Föld-távolságot behelyettesítve a (2) összefüggésbe 28,6 km/s értéket kaptak.

A Hold pálya menti sebessége e két adatból:

$$28,6 - 27,2 \text{ km/s} = 1,4 \text{ km/s}.$$

A film készítésének napján a Hold-Föld-távolság körülbelül 385 000 km volt [5], ami megközelíti Hold

10. ábra. Az $x-t$ grafikonon a videóanalízissel meghatározott pontokra illesztett egyenes meredekségét az A paraméter adja meg, ami a Hold látszólagos mozgási sebességével egyezik meg.



pályájának fél nagytengelyét. A Hold keringési sebessége e helyzetben $\approx 1,1$ km/s, amit mérési eredményünk jól közelít.

Konklúziók

A Hold keringési idejének mérése jó lehetőség volt a tanulóknak a számítógép fizikai célokra történő használatára otthon és a szakkörön. A mérési eredmények ellenőrzése után rávezettem őket arra, hogy a mérés hibáinak feltárása és korrigálása is hozzátartozik a tudományos munkához. A hiba felismerése és a mérés továbbfejlesztése abban erősítette meg a diákokat, hogy munkájukat körültekintően végezve, a körülmények részletes vizsgálatával sokszor adódik lehetőség a korábbi nehézségek

leküzdésére. Esetünkben drága műszerek hiányában az internet segített az újabb mérések elvégzésében. A mérés során használt adatok önmagukban is beszédesek voltak, de a szimuláció segítségével jobban át tudták élni a vizsgált mozgásokat. Eredményeiket osztálytársaik kiselőadás formájában ismerhették meg.

Irodalom

1. <http://www.webcamlaboratory.com>
2. http://www.urvilag.hu/tavoli_vilagok_kutato/20070308_milyen_messze_van_a_hold
3. <https://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker> – ingyenesen letölthető videóanalízátor szoftver
4. <http://www.stellarium.org/hu>
5. <http://time.unitarium.com/moon/where.html>
6. <http://palomarskies.blogspot.hu/2008/07/stars-in-sky-go-round-and-round.html>
7. https://www.youtube.com/watch?v=kGrcC83zG_U