ALKALMAZHATÓ-E A BIOT–SAVART-TÖRVÉNY NEM ZÁRÓDÓ »ÁRAMKÖRÖKRE« – I. RÉSZ

Gnädig Péter
ELTE Fizikai Intézet

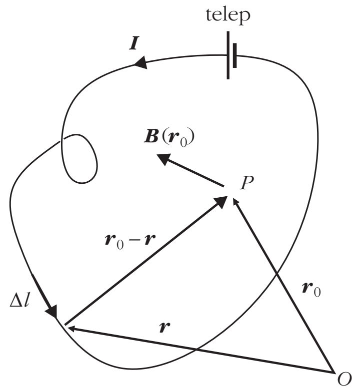
Ha a címben feltett kérdésre az lenne a válasz, hogy *nem,* akkor ez az írás itt akár be is fejeződhetne. Ha a válasz egyszerűen *igen* volna, akkor se kellene folytatnunk a fejtegetéseinket. Az igazság – mint oly sok más esetben is – a két szélsőséges nézet között van! Az eredetileg egyenáramokra és zárt áramkörökre megfogalmazott híres törvény – mint az a továbbiakból kiderül – kiterjeszthető *nem záródó* áramokra is. Az áramok forrásmentességének feladása természetesen együtt jár azzal, hogy bizonyos helyeken a töltések felhalmozódnak (vagy megritkulnak), tehát sűrűségük időben változik. Emiatt a töltésekhez kötődő elektromos tér sem lehet sztatikus, és – mint azt *Maxwell*[1] vizsgálatai (1861) óta tudjuk – az időben változó elektromos terek speciális megfontolásokat igényelnek.

A cikk további részében erről az általánosításról lesz szó. A gondolatmenet lényege – a szerző reményei szerint – a felsőbb matematika (elsősorban a vektoranalízis formalizmusának) ismerete nélkül is elmagyarázható és megérthető. Mégis – azok kedvéért, akik jártasak az elméleti elektrodinamika ezen területének matematikai nyelvezetében – apró betűvel szedve bizonyos formális levezetéseket is megadunk, hogy képletekkel is alátámaszthassuk az esetleg heurisztikusnak tűnő érvelésünket. Ezeket a részeket első közelítésben akár át is ugorhatja az Olvasó.

A Biot–Savart-törvény zárt áramkörökben folyó egyenáramokra

Tekintsünk egy I erősségű, *időben állandó* nagyságú árammal átjárt *zárt* vezetőt (*1. ábra*)! A görbét gondolatban feloszthatjuk sok kis darabkára, és az egyes darabokat (az áram irányába mutató) $\Delta\boldsymbol{l}$ vektorokkal jellemezhetjük. Az áramjárta vezető által egy tetszőleges P pontban létrehozott mágneses indukció vektorát a Biot–Savart-törvény[2] szerint jó közelítéssel a következő összeg adja meg:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{\text{a görbére}} \frac{\Delta\boldsymbol{l} \times (\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}|^3}, \qquad (1)$$



1. ábra

és a felosztás finomításával (integrálra való áttéréssel) az eredmény egyre pontosabbá válik.

Általános esetben, ha az áram nem egy vékony vezetékben, hanem „szétkenten”, valamilyen $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ áramsűrűség-vektorral megadott módon folyik, akkor a Biot–Savart-törvény így írható fel:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \times (\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}|^3}\, \mathrm{d}V. \qquad (2)$$

A mágneses indukciómező ezen alakjáról bebizonyítható, hogy eleget tesz a

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0\, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$$

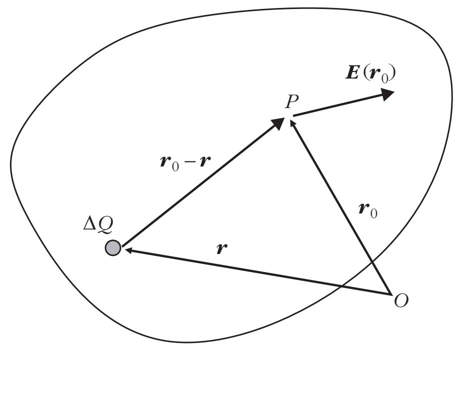
(magnetosztatikában érvényes) Maxwell-egyenletnek.

A Biot–Savart-törvény (1) alakja bizonyos hasonlóságot mutat a kiterjedt, térben elosztott töltésrendszer elektrosztatikus terét megadó

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0) = \sum_{\boldsymbol{r}} \frac{\Delta Q(\boldsymbol{r})}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}|^3} \qquad (3)$$

kifejezéssel (*2. ábra*).

2. ábra



[1] James Clerk Maxwell (1831–1879)

[2] *Jean-Baptiste Biot* (1774–1862) és *Félix Savart* (1791–1841) körülbelül 1820-ban fogalmazta meg az áramok és a mágneses tér kapcsolatát megadó, ma a nevüket viselő törvényt.

Folytonos, $\varrho(\boldsymbol{r})$ töltéssűrűséggel jellemzett töltéseloszlásra a (3) összeg az

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\varrho(\boldsymbol{r})\,(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}|^3}\,\mathrm{d}V \tag{4}$$

térfogati integrálhoz tart. Az elektromos térerősség ezen alakjáról bebizonyítható, hogy eleget tesz a

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\boldsymbol{r})$$

Maxwell-egyenletnek.

A (3) összeg azt fejezi ki, hogy az $\boldsymbol{r}$ helyen lévő, ΔQ nagyságú „kicsiny töltés” az $\boldsymbol{r}_0$ helyen

$$\Delta\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta Q(\boldsymbol{r})\,(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}|^3}$$

Coulomb-teret hoz létre, és ezeket az „elemi tereket” összegezve megkaphatjuk a teljes töltésrendszer által kialakított elektromos térerősséget az $\boldsymbol{r}_0$ vektorral jellemzett pontban.

Csábító gondolat, hogy az (1) összeget is így értelmezzük: az áramvezető minden egyes kicsiny (az $\boldsymbol{r}$ helyen lévő) darabkája (úgynevezett *árameleme*) létrehozza az $\boldsymbol{r}_0$ vektorral jellemzett pontban a maga

$$\Delta\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\Delta\boldsymbol{l}\times(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}|^3}$$

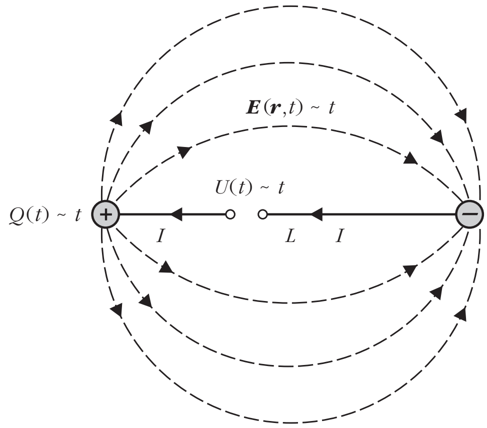
„elemi mágneses terét”, hiszen ezek összegéből áll elő a vizsgált pontban a teljes mágneses indukció vektora.

Ez az értelmezés azonban nem indokolt (legalábbis nem megalapozott), hiszen a töltésrendszertől eltérően az *egyenáram* nem darabolható fel kicsiny, nem záródó darabokra, ezek – a magnetosztatika keretei között – fizikailag megvalósíthatatlan, a *Természetben nem létező* állapotokat írnának le! (Hasonló helyzetbe kerülünk, amikor a magnetosztatikai erőhatásokat, például két mágneses dipól kölcsönhatását, hipotetikus mágneses töltések – monopólusok – erőhatásaira vezetjük vissza. Ez az eljárás számítástechnikailag néha hasznos lehet, de fogalmilag megalapozatlan és félrevezető, emiatt újabban a tankönyvek kerülik is a „mágneses töltések” használatát.)

Időben állandó, de nem záródó áramok

Próbáljuk meg általánosítani a Biot–Savart-törvényt nem záródó áramokra! A magnetosztatikában megszokott helyzethez az áll a legközelebb, ha az áramok időben állandóak. (Ezt a feltételt később lazítjuk; megmutatjuk, hogy nem szükséges a szigorú időfüggetlenség, elegendő, ha az áramok „lassan” változnak.) Ilyen áramelrendeződés esetén a vezetékek végeinél – természetesen – a töltések mennyisége nem maradhat állandó, hanem időben változnia kell, méghozzá egyenletesen növekszik vagy csökken.

Vizsgáljunk meg egy konkrét példát! Kössünk öszsze két kicsiny, egymástól L távolságban lévő vezető



3. ábra

gömböt (a továbbiakban ezeket gömbkondenzátoroknak nevezzük) egy egyenes vezetővel, és a vezetékben hozzunk létre egyenáramot. (Az áram állandósága megfelelő szabályozással, a vezetékbe kapcsolt feszültségforrás feszültségének alkalmas változtatásával, vagyis áramgenerátorral egy bizonyos ideig ténylegesen megoldható.) A két kondenzátor időben egyenletesen töltődik, a közöttük kialakuló elektromos dipóltér erőssége is időben egyenletesen változik (*3. ábra*). (Természetesen a kicsiny gömbök kapacitása nagyon kicsi, tehát a rájuk áramló töltések hatására a feszültségük igen hamar nagyon naggyá válhat. Ez azonban csak technikai nehézséget jelenthet, az elvi kérdéseket tisztázni kívánó gondolatkísérletet nem teszi ellentmondásossá.)

Vajon milyen mágneses tér alakul ki a véges szakaszon folyó áram hatására? A Biot–Savart-törvény (1) alakját használva (integrálásra áttérve) kiszámíthatjuk a mágneses indukció értékét, ami például az elrendezés felezősíkjában a vezetéktől r_0 távolságban az ábra síkjára merőleges irányú és

$$B(r_0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{r_0}{\left(x^2+r_0^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}\frac{1}{\sqrt{1+4r_0^2/L^2}} \tag{5}$$

nagyságú lesz.

Helyes ez az eredmény, vagy valamit elrontottunk? J. C. Maxwell felismerése óta tudjuk, hogy az időben változó elektromos tér úgynevezett eltolási áramot képvisel, ami $\boldsymbol{j}_{\text{eltolási}} = \varepsilon_0\dot{\boldsymbol{E}}$ áramsűrűséggel egyenértékű (itt $\dot{\boldsymbol{E}}$ az elektromos térerősség változási sebességét jelöli). Ez az áram és a valódi (a töltések mozgásához köthető) áram együtt még akkor is forrásmentes (vagyis $\operatorname{div}\left(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{j}_{\text{eltolási}}\right) = 0$), ha az áramok és töltések időben változnak.

Levezethető, hogy a Biot–Savart-törvény ebben az esetben (állandó áramerősségeket feltételezve) éppen olyan alakú, mint a magnetosztatikában, de a valódi áramok mellett az eltolási áramokat is figyelembe kell venni:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\times(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}|^3}\,\mathrm{d}V + \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\boldsymbol{j}_{\text{eltolási}}(\boldsymbol{r})\times(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}|^3}\,\mathrm{d}V. \tag{6}$$

(Megjegyezzük, hogy az elektromos térerősségek időben egyenletes változása miatt az eltolási áram is időfüggetlen, tehát a kialakuló mágneses mező sem változik időben. Emiatt Faraday-féle indukciós jelenségekkel nem kell foglalkoznunk.)

Mennyivel módosítja az eltolási áram például az (5) képletben megadott eredményt, ami még csak a valódi áram járulékát tartalmazza? A válasz meglepő: *semennyivel!* A két gömbkondenzátor ugyanis minden időpillanatban gömbszimmetrikus Coulomb-teret hoz létre, az eredő elektromos tér ezen két erőtér szuperpozíciója. Ugyanilyen jellegű az eltolási áram is: két gömbszimmetrikus vektormező összege, amelynek forrása azonban nem a töltés, hanem a töltés *változási sebessége*. Másrészt viszont egy gömbszimmetrikus árameloszlás járuléka a Biot–Savart-törvényben biztosan nulla, hiszen az eredmény csak a gömb középpontjából a vizsgált pontba mutató vektortól függhet, és egyetlen vektorból nem hozható létre olyan vektor (úgynevezett *axiálvektor*), amelynek iránya függ a jobbkézszabály teljesen önkényes iránymegállapodásától. Márpedig a mágneses indukció is axiálvektor, amely vagy egy másik axiálvektorból (például egy anyagdarabka mágnesezettségéből), vagy két „valódi” vektor vektoriális szorzatából állítható elő. (Az utóbbira példa a Biot–Savart-formula.) Gömbszimmetrikus árameloszlás esetén viszont a vektoriális szorzás művelete nem szerepelhet a végképletben, ahhoz két különböző irányú vektorra lenne szükség.

1. Formálisan is beláthatjuk, hogy az eltolási áramok *tetszőleges tölteseloszlás* esetén is *nulla* járulékot adnak (6) jobb oldalának második tagjában, így az a tag elhagyható, és mindössze a valódi áramokat tartalmazó, az eltolási áramokról „megfeledkező” Biot–Savart-képlet is *helyesen* adja meg a mágneses indukciót. A kérdéses tag ugyanis (4) felhasználásával

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\boldsymbol{j}_{\text{eltolási}}(\boldsymbol{r})\times(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}|^3}\,\mathrm{d}V = \frac{\mu_0\varepsilon_0}{4\pi}\iiint \frac{\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})\times(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}|^3}\,\mathrm{d}V = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2}\iiint \mathrm{d}V'\,\dot{\varrho}(\boldsymbol{r}')\iiint \mathrm{d}V\,\frac{(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})\times(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|^3\,|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}|^3}$$

alakra hozható, és ennek második integrálja (amely nem függ a töltések eloszlásától) szimmetriaokokból mindig nulla.

2. Egy másik formális bizonyítást is adunk arra, hogy az eltolási áramokat nem kell figyelembe venni a Biot–Savart-integrálban. A Maxwell-egyenletek a skalár- és vektorpotenciálok alkalmazásával többféle módon is átfogalmazhatók. Ha a fizikailag mérhető elektromos és mágneses térerősségeket

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi - \dot{\boldsymbol{A}} \tag{8}$$

alakban keressük ($\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$-t vektorpotenciálnak, $\Phi(\boldsymbol{r}, t)$-t pedig skalárpotenciálnak nevezik), akkor a $\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0$ és $\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{B}}$ egyenletek automatikusan teljesülnek, a másik két Maxwell-egyenlet pedig

$$-\Delta\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho + \operatorname{div}\dot{\boldsymbol{A}}, \tag{9}$$

valamint

$$-\Delta\boldsymbol{A} = \mu_0\boldsymbol{j} + \mu_0\varepsilon_0\left(-\operatorname{grad}\dot{\Phi} - \ddot{\boldsymbol{A}}\right) - \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A} \tag{10}$$

alakba írható. (A fenti képletekben

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

a Laplace-operátort, a betűk feletti „pont” pedig az idő szerinti deriválást jelöli.)

Az elektromos és mágneses térerősségek nem határozzák meg egyértelműen a potenciálokat, azok választásában nagyfokú szabadságunk van (ezt nevezik *mértékinvarianciának*). Kiköthetjük például, hogy a vektorpotenciál legyen forrásmentes (Coulomb-mérték), vagyis teljesüljön a $\operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0$ feltétel. A Coulomb-mérték különösen hasznos a sztatikus erőterek leírásánál, amikor az összes időderivált nulla, és így az egyenletek viszonylag egyszerűvé válnak:

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\boldsymbol{r}),$$

$$\Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -\mu_0\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}).$$

A megoldásuk (a szuperponált Coulomb-potenciálok mintájára):

$$\Phi(\boldsymbol{r}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\varrho(\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}|}\,\mathrm{d}V, \tag{11}$$

illetve

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}|}\,\mathrm{d}V, \tag{12}$$

ahonnan gradiens- és rotációképzéssel megkaphatjuk az ismert (4) és (2) képleteket.

Ha időben állandó, de nem forrásmentes árameloszlásokat vizsgálunk, akkor a töltéssűrűség, az elektromos térerősség és a skalárpotenciál az idővel arányosan változik, első időderiváltjuk tehát nem tűnik el. (A magasabb időderiváltak, valamint $\ddot{\boldsymbol{A}}$ és $\dot{\boldsymbol{B}}$ továbbra is elhagyhatók.) Ilyenkor – még mindig Coulomb-mértéket használva – a (10) egyenlet helyett a következőt írhatjuk fel:

$$\Delta\boldsymbol{A} = -\mu_0\left(\boldsymbol{j} - \varepsilon_0\operatorname{grad}\dot{\Phi}\right) = -\mu_0\left(\boldsymbol{j} + \varepsilon_0\dot{\boldsymbol{E}}\right) = -\mu_0\left(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}_{\text{eltolási}}\right).$$

Ha ebből a képletből számoljuk ki a mágneses indukciót, akkor éppen a (6) összefüggéshez jutunk, ami a valódi áramok mellett az eltolási áramok hatását is figyelembe veszi. Megmutatjuk azonban, hogy ez a képlet helyes ugyan, de az eltolási áramokat *feleslegesen* veszi számításba, azok járuléka a Biot–Savart-törvényben *mindig nulla*.

Válasszunk egy – a Coulomb-mértéktől eltérő – kikötést a potenciálokra; legyen

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \varepsilon_0\mu_0\dot{\Phi} = 0. \tag{13}$$

Ilyen mértékfeltétel (az úgynevezett *Lorentz-mérték*) teljesülése esetén (kihasználva, hogy $\ddot{\Phi} = 0$ és $\ddot{\boldsymbol{A}} = 0$) az egyenletek:

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\boldsymbol{r}, t), \tag{14}$$

$$\Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -\mu_0\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}). \tag{15}$$

Az ezekből kiszámított $\boldsymbol{E}$ és $\boldsymbol{B}$ terek ugyanazok, mint a Coulomb-mérték alkalmazásával kapott terek, pedig *az eltolási áram nem szerepel bennük*. Ezek szerint az eltolási áram járuléka a Biot–Savart-törvényben (az adott feltételek teljesülése esetén) *tetszőleges árameloszlásra nulla*.

Vektormezők felbontása örvénymentes és forrásmentes összetevőkre

A vektoranalízis ismert állítása, hogy tetszőleges (kellően „sima”, tehát megfelelő differenciálhatósági tulajdonságokkal rendelkező) $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektormező felbontható egy *örvénymentes* és egy *forrásmentes* mező összegére:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{v}^{(\mathrm{long})}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{v}^{(\mathrm{transz})}(\boldsymbol{r}),$$

ahol az örvénymentes („longitudinális”) összetevőre

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}^{(\mathrm{long})}(\boldsymbol{r}) = 0,$$

a forrásmentes („transzverzális”) összetevőre pedig

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}^{(\mathrm{transz})}(\boldsymbol{r}) = 0$$

teljesül. (Az elnevezéseket – fizikus szemmel nézve – az indokolja, hogy például egy rugalmas test deformációinál az elmozdulásmező örvénymentes része írja le a longitudinális hullámokat, a forrásmentes összetevő pedig a transzverzális hullámokat.) Az említett vektormezők a helyvektoron kívül az időtől is függhetnek, ezt a függést azonban a képletekben explicit módon nem jeleztük.

A vektormezőket (és azok felbontását) úgy tehetjük egyértelművé, ha (az esetleg kielégítendő határfeltételek mellett) megadjuk a mezők forrás- és örvényerősségét, vagyis a

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}^{(\mathrm{long})}(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}) \quad \text{és} \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{v}^{(\mathrm{transz})}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$$

egyenletekben szereplő $f(\boldsymbol{r})$ skalár- és $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ vektormezőket, vagyis az összetevők forrás- és örvényerősségét. Ezek ismeretében a mezők így állíthatók elő:

$$\boldsymbol{v}^{(\mathrm{long})}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{f(\boldsymbol{r}')\,(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\,\mathrm{d}V'$$

illetve

$$\boldsymbol{v}^{(\mathrm{transz})}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\,\mathrm{d}V'.$$

Az első integrál a Coulomb-törvényre, a második pedig a Biot–Savart-törvényre emlékezteti a fizikusokat, de a képletek a bennük szereplő mennyiségek fizikai jelentésétől függetlenül más esetekben is érvényesek.

Térjünk most rá egy fizikai alkalmazásra: bontsuk fel az $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ elektromos térerősséget longitudinális és transzverzális összetevőkre! A Maxwell-egyenletek miatt

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E}^{(\mathrm{long})}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\varrho(\boldsymbol{r}),$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}^{(\mathrm{transz})}(\boldsymbol{r}) = -\dot{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r}).$$

Látható, hogy az elektromos mező longitudinális összetevőjének forrása a töltéssűrűség, ezt az összetevőt tehát a (4) egyenletnek megfelelő integrállal állíthatjuk elő és jogosan nevezhetjük Coulomb-résznek. A másik (transzverzális) rész, amelynek örvényerőssége a mágneses indukcióvektor időderiváltjával arányos, hasonló megfontolásból Faraday-összetevőnek nevezhető:

$$\boldsymbol{E}^{(\mathrm{long})}(\boldsymbol{r}) \equiv \boldsymbol{E}^{(\mathrm{Coulomb})}(\boldsymbol{r}),$$

$$\boldsymbol{E}^{(\mathrm{transz})}(\boldsymbol{r}) \equiv \boldsymbol{E}^{(\mathrm{Faraday})}(\boldsymbol{r}).$$

Az elektromos térerősség mellett annak időderiváltja, tehát (egy arányossági tényezőt leszámítva) az eltolási áram is felbontható két összetevőre:

$$\boldsymbol{j}^{(\mathrm{long})}_{\mathrm{eltolási}}(\boldsymbol{r}) \equiv \boldsymbol{j}^{(\mathrm{Coulomb})}_{\mathrm{eltolási}}(\boldsymbol{r}),$$

$$\boldsymbol{j}^{(\mathrm{transz})}_{\mathrm{eltolási}}(\boldsymbol{r}) \equiv \boldsymbol{j}^{(\mathrm{Faraday})}_{\mathrm{eltolási}}(\boldsymbol{r}).$$

Mi az eltolási áram szerepe?

A fentiekben beláttuk, hogy időfüggetlen, de nem feltétlenül forrásmentes áramok ismeretében a Biot–Savart-törvény segítségével kiszámíthatjuk a mágneses indukciót a tér tetszőleges pontjában, és a számítás során csak a *ténylegesen folyó* áramokkal kell törődnünk, az úgynevezett *eltolási áramokat nem* kell figyelembe vennünk. Felmerül a kérdés, hogy akkor hol kapnak szerepet az eltolási áramok, milyen körülmények között kell számolnunk ezekkel is.

A mágneses mező nemcsak a Biot–Savart-törvény felhasználásával, hanem bizonyos – szerencsésen egyszerű, szimmetrikus – esetekben közvetlenül a Maxwell-egyenletekből, azok integrális alakjából is meghatározható. Gondoljunk csak a hosszú, egyenes vezetőre, vagy egy vékony toroid tekercsre. Ebben az eljárásban valamely zárt görbére képezett mágneses körfeszültséget hasonlítjuk össze a görbére illesztett felületen átfolyó áramok fluxusával:

$$\oint \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mu_0 \iint \left(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}_{\mathrm{eltolási}}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{f}. \tag{16}$$

A fenti képlet jobb oldalán a valódi áramok mellett a $\boldsymbol{j}_{\mathrm{eltolási}} = \varepsilon_0 \dot{\boldsymbol{E}}$ eltolási áramsűrűség is megjelenik, annak figyelmen kívül hagyása általában *hibás* eredményre vezetne. A (16) összefüggés lokális alakja:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0\, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) + \mu_0\, \boldsymbol{j}_{\mathrm{eltolási}}(\boldsymbol{r}), \tag{17}$$

amint az a Stokes-féle integráltétel segítségével könnyen belátható.

Vajon ha *az eltolási áramok nélkül* felírt Biot–Savart-törvény alapján, vagyis a

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\times\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\,\mathrm{d}V' \tag{18}$$

képlet felhasználásával számítjuk ki a mágneses indukciómezőt, összhangban lesz-e az az eltolási áramot is tartalmazó (17) Maxwell-egyenlettel? Érdekes módon a válasz: *majdnem igen!* A (18) kifejezés örvényerőssége (rotációja) annak ellenére tartalmazza az eltolási áram egyik, lassú változások esetén a legjelentősebb részét, nevezetesen a Coulomb-összetevőt, hogy azt nem „raktuk bele” a $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$-et meghatározó képletbe.

Képezzük a (18) kifejezés rotációját! A vektoranalízis azonosságainak felhasználásával:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = {} & \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\cdot \operatorname{div}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\,\mathrm{d}V' - \\
& - \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \operatorname{div}'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\,\mathrm{d}V' + \\
& + \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \operatorname{Div}'\left[\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\circ\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\right]\mathrm{d}V'.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Ebben a képletben div′ és Div′ az $\boldsymbol{r}'$ változó szerinti deriválásokra utal, a vektorok közötti „kör” a vektorok diadikus szorzatát jelöli, Div pedig a tenzor-divergenciát jelenti. (19) jobb oldalának első tagja a

$$\operatorname{div}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} = 4\pi\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

„Dirac-delta” azonosság miatt $\mu_0\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$-rel egyenlő. A második tag a

$$\operatorname{div}'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') = -\dot{\varrho}(\boldsymbol{r}')$$

azonosság és a (4) összefüggés szerint $\mu_0\varepsilon_0\dot{\boldsymbol{E}}^{(\mathrm{Coulomb})}(\boldsymbol{r})$-rel, vagyis $\mu_0\boldsymbol{j}^{(\mathrm{Coulomb})}_{\mathrm{eltolási}}(\boldsymbol{r})$-rel egyezik meg, a harmadik integrál pedig a Gauss–Osztrogradszkij-tétel értelmében nulla. (Feltesszük, hogy az áramok csak véges térrészben különböznek nullától, így egy elegendően nagy térrészre alkalmazva a tételt, a felületi integrál eltűnik.) Így tehát az eredményünk:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) + \mu_0\boldsymbol{j}^{(\mathrm{Coulomb})}_{\mathrm{eltolási}}(\boldsymbol{r}), \tag{20}$$

ami időben állandó mágneses terek, tehát Faraday-féle indukált feszültség hiányában a (17) egyenlettel egyenértékű.

Megállapíthatjuk tehát, hogy az eltolási áram csak a mágneses indukció örvényerősségében (és az erre alapozott integrális Maxwell-egyenletben) kap szerepet, de a mágneses mező Biot–Savart-törvény szerinti kiszámításánál *nem kell figyelembe vennünk.*

Időben lassan változó áramok és erőterek

Eddigi megfontolásainkban az áramerősségek és a mágneses indukció időben állandó, a töltések sűrűsége és az elektromos térerősség pedig az idővel arányosan változó mennyiségek voltak. Ez a helyzet – bár fizikailag elvben megvalósítható – elég mesterkélt. Gyakran találkozunk viszont olyan folyamatokkal (amilyen például egy kondenzátor kisülése, vagy egy váltóáramú áramkör viselkedése), amelyekben a fizikai mennyiségek időfüggése nem arányos t-vel, hanem annál általánosabb $f(t)$ függvényekkel írható le. Ezen folyamatok „szaporaságát” valamilyen karakterisztikus t_0 idővel jellemezhetjük. (A karakterisztikus idő periodikus időfüggés esetén lehet például a rezgésidő, exponenciális relaxációnál pedig a felezési idő.) Hasonló módon a térbeli változások „ütemét” egy l_0 karakterisztikus hosszmérettel jellemezhetjük. (Ez a méret, aminek csak a nagyságrendje lényeges, a *3. ábrán* látható elrendezésben lehet például a gömbök L távolsága, az *1. ábrán* látható zárt áramvezetőnél pedig a vezeték legnagyobb mérete.)

Megmutatjuk (vagy legalábbis érzékeltetjük), hogy az összes eddigi megfontolásunk (közelítőleg) érvényben marad akkor is, ha a térerősségek, áram- és töltéssűrűségek változnak ugyan időben, de a változás üteme „viszonylag lassú”, pontosabban: teljesül a $c t_0 \gg l_0$ feltétel. ($c = (\mu_0\varepsilon_0)^{-1/2}$ a fénysebesség vákuumban.) Ezen feltétel szemléletes jelentése: a változás karakterisztikus ideje sokkal nagyobb, mint amennyi idő alatt a fény keresztülhalad a rendszer jellegzetes térbeli kiterjedésének megfelelő útszakaszon. Ha ez teljesül, akkor a fenti számolásokban elhanyagolt időderiváltak sokkal kisebbek a mellettük álló, a megfontolásokban megtartott tagok, tehát a „kvázistacionárius közelítés” jogosnak mondható.

Ha elhanyagolások nélkül írjuk fel a potenciálokkal kifejezett Maxwell-egyenleteket a (13)-nak megfelelő Lorentz-mérték választásával, akkor (14) és (15) helyett a következő hullámegyenleteket kapjuk:

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{r},t) - \frac{1}{c^2}\ddot{\Phi}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\boldsymbol{r},t), \tag{21}$$

$$\Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) - \frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r},t) = -\mu_0\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t). \tag{22}$$

Mivel azonban az időderiválás nagyságrendileg t_0-val való osztást, a térkoordináták szerinti deriválás pedig l_0-val történő osztást jelent, a $c t_0 \gg l_0$ feltétel miatt a hullámegyenletek második időderiváltat tartalmazó tagjai a térderiváltak mellett elhanyagolhatók, és így (21) és (22) helyettesíthető a (14) és (15) egyenletekkel. Ezek megoldása – mint láttuk – a (2)-ben megadott Biot–Savart-törvénynek, illetve a (4)-ben felírt Coulomb-törvénynek megfelelő mágneses- és elektromos térerősségek. Ezek a terek a *pillanatnyi* $\varrho(\boldsymbol{r},t)$ töltéssűrűségből és a *pillanatnyi* $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ áramsűrűségből számolandók, és a Biot–Savart-törvény ezen alakja sem tartalmazza az eltolási áramokat.

A valódi áramokkal számoló és retardálást nem tartalmazó Biot–Savart-törvény a (20) egyenletre vezetett, ami annyiban különbözik „csak” a pontos Maxwell-törvénytől, hogy a jobb oldaláról hiányzik az eltolási áram Faraday-összetevője. Emiatt a kvázistacionárius megoldás – természetesen – nem írhatja le a hullámokat. Megpróbálkozhatnánk az egyenleteket olyan módon „javítani”, hogy a Biot–Savart-törvényben figyelembe vesszük az eltolási áram Faraday-összetevőjét is. Ez azonban – a Landau–Lifsic-könyvsorozat előkelő szóhasználatát idézve – „a pontosság megengedhetetlen növelése” volna, hiszen az így számításba vett hatások az elhanyagolt retardálással azonos nagyságrendű korrekcióknak felelnének meg.

A cikk II. részében néhány egyszerű, konkrét példán keresztül mutatjuk be az eddig általánosságban megfogalmazott összefüggések alkalmazhatóságát.

Szerkesztőség: 1092 Budapest, Ráday utca 18. földszint III., Eötvös Loránd Fizikai Társulat. Telefon/fax: (1) 201-8682
A Társulat Internet honlapja http://www.elft.hu, e-postacíme: elft@elft.hu
Kiadja az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, felelős: Szatmáry Zoltán főszerkesztő.
Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza. A szerzőknek tiszteletpéldányt küldünk.
Nyomdai előkészítés: Kármán Stúdió, nyomdai munkálatok: OOK-PRESS Kft., felelős vezető: Szathmáry Attila ügyvezető igazgató.
Terjeszti az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, előfizethető a Társulatnál vagy postautalványon a 10200830-32310274-00000000 számú egyszámlán.
Megjelenik havonta, egyes szám ára: 800.- Ft + postaköltség.
HU ISSN 0015–3257 (nyomtatott) és **HU ISSN 1588–0540** (online)