

## ALKALMAZHATÓ-E A BIOT–SAVART-TÖRVÉNY NEM ZÁRÓDÓ »ÁRAMKÖRÖKRE« – II. RÉSZ

Gnädig Péter  
ELTE Fizikai Intézet

Cikkünk I. részében megmutattuk, hogy a Biot–Savart-törvény nemcsak zárt áramkörben folyó egyenáramokra, hanem időben (lassan) változó és töltésfelhalmozódással járó (nem divergenciamentes) árameloszlásokra is alkalmazható. Ez utóbbi esetekben az időben változó töltéssűrűség változó elektromos erőteret hoz létre, amit – *Maxwell* megfontolásai szerint – a valódi áramokra emlékeztető, úgynevezett eltolási áramok megjelenése kíséri. Ezek az eltolási áramok azonban a Biot–Savart-törvényben *nem jelennek meg*, a mágneses tér kiszámításánál *figyelmen kívül hagyhatók*. (Ha mégis beírjuk az eltolási áramokat a Biot–Savart-integrálba, nem kapunk hibás eredményt, mert az eltolási áramok járuléka *tetszőleges esetben nulla*.)

Az eltolási áramok szerepe a mágneses indukció örvénylését leíró Maxwell-egyenletben jelentkezik: *tetszőleges* zárt görbére számított mágneses körfeszültség (örvényerősség) a görbére illeszkedő, *tetsző-*

*leges* felületen átfolyó áram erősségével arányos (annak  $\mu_0$ -szorososa), és itt az „átfolyó áram” a valódi áramok mellett az eltolási áramot is tartalmazza.

### Néhány példa

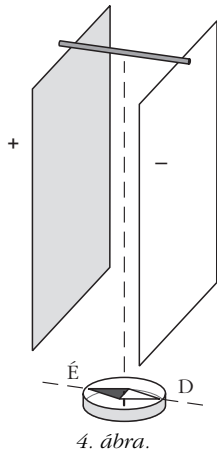
A továbbiakban néhány példán keresztül bemutatjuk, hogyan működnek az általános elvek bizonyos konkrét esetekben. Két esetben olyan példát választottunk, amelyek az áramelrendezés szimmetriája miatt (bizonyos közelítésben) ténylegesen végigszámolhatóak, és így a Biot–Savart-törvényből kapható eredmények összehasonlíthatóak az Ampère-féle gerjesztési törvényből<sup>3</sup> ismert képletekkel. A harmadik példa egy szabály-

<sup>3</sup> *André-Marie Ampère* (1775–1836) 1826-ban ismerte fel az áramvezetőt körülvevő mágneses tér és az áramerősség közötti kapcsolatot.

talán alakú „csokimikulás” töltésének elvesztése közben kialakuló mágneses mezőt vizsgálja; ennek eredménye pedig éppen azért meglepő, mert itt az árameloszlás semmilyen szimmetriával nem rendelkezik. Az utolsó példában egy mozgó ponttöltés mágneses terét vezetjük le a Biot–Savart-törvény segítségével.

### 1. példa

Egy párhuzamosan, függőlegesen elhelyezett lemezpárból álló kondenzátor fel van töltve. A lemezek alsó széle alatt kis iránytű áll a 4. ábrán látható helyzetben. Ezután a lemezek tetejére helyezett kis pálcával a kondenzátort kisütjük. Három fizikus, *Aladár*, *Boldizsár* és *Csaba* azon vitatkozik, vajon hogyan viselkedik kisütés közben az iránytű?



4. ábra.

*Aladár* szerint a vezető pálcában folyó áram által keltett mágneses mező az iránytű északi pólusát a 4. ábra síkjára merőlegesen, „befelé” téríti ki.

Ez azonban *hibás* érvelés! – mondja *Boldizsár*, hiszen nemcsak a pálcában folyó áram mágneses tere hat az iránytűre a kisülés közben, hanem a kondenzátor belsejében fellépő Maxwell-féle eltolási áram is. Ez az „elkent”, a pálcában folyó valódi árammal *azonos nagyságú*, de *azzal ellentétes irányú* áram mindenhol közelebb van az iránytűhöz, mint a pálcá, ezért mágneses hatása erősebben érvényesül. Eszerint az iránytű északi pólusa a kisülés alatt az ábra síkjából „kifelé” mutató irányban térül el.

*Csaba* szerint az eltolási áramokat nem, de a lemezekben folyó „valódi” áramokat figyelembe kell vennünk a mágneses mező kiszámításánál, és ezek (a pálcában folyó árammal együtt) *nulla* mágneses teret eredményeznek a kondenzátor alsó széle alatt.

Vajon melyiküknek van igaza?

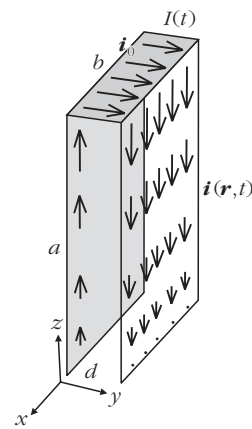
*Megoldás:* A cikkben leírtak alapján beláthatjuk, hogy *Aladár* téved, de *Boldizsár* érvelése *is hibás!* Az eltolási áram – legalábbis a Biot–Savart-törvény által sugallt módon, a kicsiny áramelemek járulékeinak összegét képezve – *nem állít elő* semmilyen mágneses teret, hatása tehát figyelmen kívül hagyható. (Sajnos a jelen cikk szerzője is elkövette ezt a hibát.<sup>4</sup>

<sup>4</sup> Gnädig P., Honyek Gy., Vigh Máté: *333 furfangos feladat fizikából*. Typotex Kiadó, Budapest, 2014, 315. feladat.

a kérdéses feladatot is tartalmazó könyvben a Boldizsár-féle, logikusnak tűnő, de téves érvelést fogadta el.)

Mi történik akkor valójában? Csabának van igaza: az iránytű egyáltalán *nem fog kitérni* a kondenzátor kisülése közben! (Ez az állítás természetesen nem abszolút pontosan igaz, hanem csak kis lemeztávolságok esetén, amikor a széleffektusokat elhanyagolhatjuk.)

Tekintsünk egy keskeny, lapos, feltöltött síkkondenzátort, amelyet a tetején egy (nem túl jól vezető) lemezzel rövidre zárunk (5. ábra). A rövidrezárás ezen módja nem különbözik lényegesen a feladatban eredetileg szereplő pálcáétól, előnye viszont, hogy megőrzi a síkkondenzátor „eltolási szimmetriáját”. A kondenzátor tetejét összekötő vízszintes lemez sok párhuzamos „pálcára” bontható, és az egyes pálcákhoz tartozó áramok és mágneses terek szuperpozíciója kiadja a lemeznek megfelelő elrendezését.



5. ábra.

Jelöljük a felső lemezben folyó összes áram erősségét  $I(t)$ -vel, ennek nagyságát a kondenzátor pillanatnyi feszültsége és a lemez ellenállása határozza meg. Feltesszük, hogy a kisülési folyamat időállandója nem nagyon kicsi, emiatt alkalmazható a kvázistacionárius közelítés. A vékony lemezekben folyó áramokat célszerű az úgynevezett *vonalmonti áramsűrűséggel* (egységnyi vonalszakaszon átfolyó áram erősségével) jellemezni. (Az amper/méter dimenziójú vonalmonti áramsűrűséget a továbbiakban  $\mathbf{i}$ -vel fogjuk jelölni és – ha ez nem okoz félreértést – egyszerűen áramsűrűségként emlegetjük.)

Mivel az elrendezés a szélek közvetlen közelét leszámítva  $x$  irányú eltolásra invariáns, a fizikai mennyiségek (az áramsűrűségek, töltéssűrűségek, elektromos és mágneses térerősségek) nem függenek az  $x$  koordinátától. A felső (rövidrezáró) lemezen például

$$\mathbf{i}^{(\text{fent})} = \mathbf{i}_0 = \left( 0, \frac{I(t)}{b}, 0 \right).$$

Feltehetjük, hogy a kondenzátor lemezei jó vezetőik, ezért külön-külön ekvipotenciálisak, és emiatt közöttük homogén (de időben változó),  $y$  irányú elektromos térerősség alakul ki. Emiatt a lemezek

felületi töltéssűrűsége (ami az elektromos térerősséggel arányos) sem függhet a helytől, így a lemezekben folyó vonalmenti áramsűrűség divergenciája ( $z$  koordináta szerinti változási üteme) mindenhol ugyanakkora. A határfeltételeket is figyelembe véve megadhatjuk a bal és jobb oldali lemezekben folyó áramok eloszlását:

$$\mathbf{i}^{(\text{jobb})}(z, t) = -\mathbf{i}^{(\text{bal})}(z, t) = \left(0, 0, -\frac{I(t)}{ab} z\right).$$

A függőleges lemezekben folyó áramok nagysága a lemez alja felé haladva fokozatosan nullára csökken (erre utalnak az egyre rövidebb nyilak és a lemezek aljára rajzolt fekete pontok, nullvektorok), és a csökkenés üteme (a felületi töltések egyenletes térbeli eloszlása miatt) a  $z$  koordináta szerint *egyenletes*.

Számítsuk most ki a mágneses indukciót a Biot-Savart-törvény alapján az  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  vektorral megadott helyen. Egyetlen (mondjuk a bal oldali) lemezekben folyó áramok járuléka az 5. ábrán látható koordináta-rendszerben:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(\text{bal lemez})}(\mathbf{r}_0, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-b}^0 dx \int_0^a dz \frac{\mathbf{i}^{(\text{bal})} \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(t)}{ab} \int dx \int dz \frac{[-z y_0, z(x - x_0), 0]}{[(x - x_0)^2 + y_0^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}}. \end{aligned}$$

Ez az integrál ( $y_0 \ll a, b$  miatt) az  $x \approx x_0$  és  $z \approx z_0$  tartományból „szedi össze” szinte a teljes járulékat, a távolabbi részek járuléka (az integrandus lecsengése miatt) elhanyagolható. Emiatt az integrálások határait akár a végtelenbe is „kitolhatjuk”, ez a közelítés tulajdonképpen a széleffektusok elhanyagolásával egyenértékű.

A mágneses indukció  $y$  komponense (mivel az integrandus  $x - x_0$  páratlan függvénye) eltűnik,  $\mathbf{B}$  tehát a lemezzel párhuzamos, vízszintes irányú vektor. Egyetlen nullától különböző összetevője a

$$\xi = \frac{x - x_0}{y_0} \quad \text{és} \quad \eta = \frac{z - z_0}{y_0}$$

új változók bevezetésével így számolható:

$$\begin{aligned} B_x^{(\text{bal lemez})} &= \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{z_0 I(t)}{ab} \frac{y_0}{|y_0|} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2 + 1)^{3/2}} = \\ &= \mp \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I(t)}{ab} z_0. \end{aligned}$$

Az integrál előjele  $y_0$  előjelétől függ: a bal oldali lemez jobb oldalán (amikor  $y_0 > 0$ ) a mágneses indukció az  $x$  tengellyel ellentétes irányú, a lemez bal oldalán pedig  $x$  tengely irányú.

Hasonló módon számolható a jobb oldali lemezekben folyó áramok járuléka:

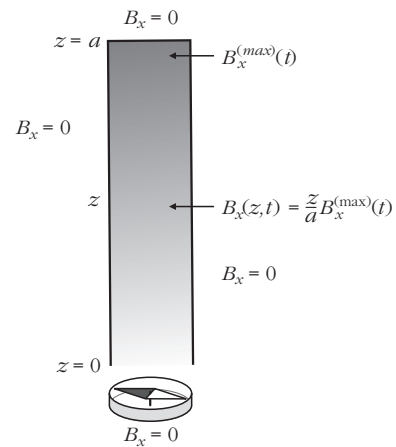
$$B_x^{(\text{jobb lemez})} = \pm \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I(t)}{ab} z_0.$$

A teljes mágneses tér a két járulék szuperpozíciója lesz. Ez a lemezeken kívül nulla, a lemezek között pedig

$$B_x^{(\text{középen})}(z, t) = -\frac{\mu_0 I(t)}{ab} z = B_x^{(\text{max})}(t) \frac{z}{a}.$$

A felső (a kondenzátor kisülését megvalósító) lemezekben folyó áram járulékaival eddig nem foglalkoztunk. A kondenzátor felső szélének közvetlen környezetét leszámítva az nem is számottevő, ott viszont éppen  $\pm B_x^{(\text{max})}/2$ . Másrészt viszont a kondenzátor felső szélénél a függőleges lemezekben folyó áramok hatása *csak fele* a korábban számított értéknek. (Ez a „széleffektus” legegyszerűbben úgy látható be, hogy gondolatban kiegészítjük a félvégtelen lemezt egy ugyanolyan árameloszlású másikkal.) A három lemez áramának eredő mágneses tere tehát a felső, vízszintes lemez felett *nulla*, közvetlenül alatta pedig  $B_x^{(\text{max})}$  nagyságú lesz. Ugyancsak eltűnik a mágneses tér a kondenzátoron kívül és a kondenzátor alatt is, ahogy ezt a 6. ábra szemlélteti. (Az ábrán a szürkítés erőssége a mágneses indukció nagyságával arányos.)

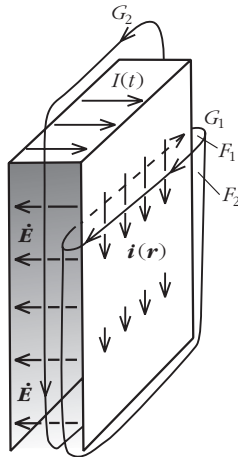
A kisütés során kialakuló mágneses mező az iránytű helyén mindvégig nulla lesz, tehát egyáltalán *nem téríti ki* az iránytűt.



6. ábra

Természetesen sokkal egyszerűbben is meghatározhatjuk a kisülő síkkondenzátor mágneses terét. Először belátjuk, hogy a kondenzátoron kívül nincs számottevő mágneses indukció. Ha ugyanis csak az egyik (mondjuk a jobb oldali) lemezekben folyó (függőlegesen lefelé) áram, akkor ez az áram a lemez közelében a lemezzel párhuzamos, vízszintes irányú mágneses indukciót hozna létre. Az indukcióvonalak egyike például a 7. ábrán látható  $G_1$  görbe mentén záródna. A mágneses indukció a görbe két egyenes

szakaszán (a közelítőleg érvényes eltolási invariancia miatt) ugyanakkora nagyságú, de a lemez két oldalán ellentétes irányú. Fontos megjegyeznünk, hogy az indukció nagysága (a lemez szélének közvetlen környezetét leszámítva) *nem függ* a lemeztől mért távolságtól, hiszen a görbére illesztett vízszintes felületen átfolyó áram sem függ ettől az adattól.



7. ábra

Vegyük most figyelembe a másik (bal oldali) lemezben függőlegesen felfelé folyó áramokat is. Ezek (ugyanabban a magasságban) éppen ugyanakkora nagyságú, de ellentétes irányú mágneses teret hoznak létre, mint a jobb oldali lemez áramai. A két mágneses mező szuperpozíciója a lemezeken kívüli térrészben – jó közelítéssel – kioltja egymást (hiszen az egyes lemezek mágneses tere nem függ a lemeztől mért távolságtól), a lemezek között pedig a két térerősség összeadódik.

A kondenzátor belsejében tehát a lemezekkel párhuzamos, vízszintes irányú mágneses mező alakul ki. A  $\mathbf{B}$  indukcióvektor nagyságát a kondenzátor aljától  $z$  távolságra lévő  $G_1$  görbére alkalmazott integrális Maxwell-egyenletből (az eltolási árammal kiegészített Ampère-féle gerjesztési törvényből) olvashatjuk le. A mágneses örvényerősség (körfeszültség):

$$\sum_{G_1} \mathbf{B} \Delta \mathbf{r} = B_x(z, t) b.$$

A  $G_1$  görbére többféle módon is illeszthetünk felületet. Ha a vízszintes síkban fekvő  $F_1$  felületet választjuk, azon a teljes  $I(t)$  áram  $z/a$  hányada halad keresztül, az eltolási áram pedig nem metszi a felületet. A gerjesztési törvény (a jobbkézsabály előjelét is figyelembe véve) most így alkalmazható:

$$B_x(z, t) b = -\mu_0 I(t) \frac{z}{a}, \text{ vagyis}$$

$$B_x(z, t) = -\frac{\mu_0 I(t)}{ab} z,$$

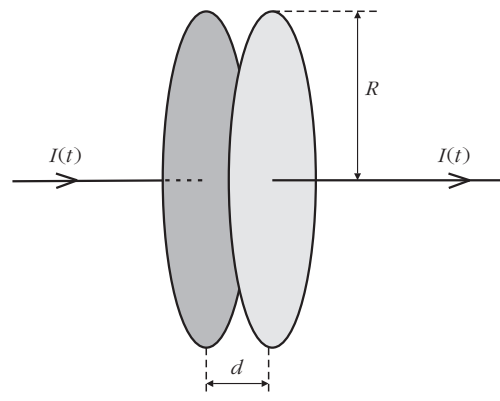
összhangban a Biot–Savart-törvény alapján számított értékkel. Ha viszont az  $F_2$  felületet (egy éppen hogy csak kinyitott uzsonnás zacskóra emlékeztető, a lemez  $z b$  területű részét körülvevő alakzatot) illesztjük a  $G_1$  görbére, azon egyáltalán nem folynak át valódi

áramok, viszont az eltolási áram ad (a  $z$  koordinátával arányos nagyságú felületen) járulékot.

Ha csak arra vagyunk kíváncsiak, hogy mekkora a mágneses indukció közvetlenül a kondenzátor alatt, érdemes a lemezek felezősíkjaiban, a 7. ábrán látható  $G_2$  görbén átmenő függőleges síkfelületre alkalmazni a gerjesztési törvényt. A görbe alsó, vízszintes szakasza közvetlenül a kondenzátor aljánál, a felső szakasza pedig a kondenzátortól „elegendően messze” záródik (bár ez utóbbi távolságot az ábrán nem méretarányosan ábrázoltuk). Az összes (valódi + eltolási) áram ezen a felületen keresztül nulla, tehát a mágneses körfeszültség és a vele arányos  $B_x(z=0)$  is nulla. Még egyszerűbben beláthatjuk ezt az eredményt, ha a  $G_2$  görbére egy olyan felületet illesztünk, amelyik (jobbról vagy balról) teljesen elkerüli a kondenzátorlemezeket. Egy ilyen felületen sem valódi áram, sem eltolási áram nem halad keresztül, a határgörbéje mentén tehát a mágneses körfeszültség nulla. A  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  indukciómező csak a görbe alsó szakaszán különbözhetne nullától, de mágneses körfeszültség hiányában még itt is eltűnik, zérus értékű.

## 2. példa

Egy hosszú, egyenes vezetőt valahol megszakítunk, és a szakadási helyre két közeli körlapból álló síkkondenzátort illesztünk (8. ábra). Milyen mágneses mező alakul ki a vezeték körül és a kondenzátor belsejében, ha az egyenes vezetőben valamekkora (időben nem túl gyorsan változó) áram folyik?



8. ábra

*Megoldás:* Feltételezzük, hogy  $d \ll R$  és a lemezek jó elektromos vezetése miatt a kondenzátor belsejében minden pillanatban homogén, a lemezek síkjára merőleges irányú,  $E_0(t)$  nagyságú elektromos tér alakul ki, és ezzel összhangban a lemezek felületi töltéssűrűsége  $\eta = \pm \epsilon_0 E_0(t) = \pm \eta_0(t)$  nem függ a helytől. (A lemezekben áram folyik, ehhez a lemezek egyes pontjai közötti feszültségre van szükség, tehát a lemezek közti elektromos tér és ezzel együtt a felületi töltéssűrűség szigorúan véve nem lehet homogén. Ez az inhomogenitás azonban a fémlemezek jó elektromos vezetése miatt nagyon kicsi, emiatt figyelmen kívül hagyható.)

A lemezekben folyó áram sűrűsége nyilván csak a szimmetriatengelytől mért  $r$  távolság és az idő függvénye, iránya pedig radiális:

$$\mathbf{i} = i(r, t) \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}.$$

A (térben) egyenletes töltésfelhalmozódás ténye lehetővé teszi, hogy kiszámíthassuk a vonalmenti áramsűrűséget. Egy  $r$  sugarú körön kicsiny  $\Delta t$  idő alatt

$$Q_1 = \Delta t \cdot 2\pi r \cdot i(r, t)$$

töltés halad át, egy kicsit nagyobb  $(r + \Delta r)$  sugarú körön pedig

$$Q_2 = \Delta t \cdot 2\pi (r + \Delta r) \cdot i(r + \Delta r, t)$$

töltés távozik. Ezek szerint a  $2\pi r \Delta r$  területű körgyűrűn lévő töltés mennyiségének megváltozása:

$$\Delta Q = Q_1 - Q_2 = -2\pi \Delta t \cdot \Delta(r \cdot i),$$

ami az  $\eta(t)$  felületi töltéssűrűség megváltozásával is kifejezhető:

$$\Delta Q = 2\pi r \Delta r \cdot \Delta \eta(t).$$

A kétféle kifejezés összevetéséből

$$\frac{\Delta(r \cdot i)}{\Delta r} = -r \frac{\Delta \eta(t)}{\Delta t} \approx -r \cdot \dot{\eta}(t) = -r \cdot \text{állandó},$$

vagyis

$$i(r, t) = \frac{C_1}{r} + C_2$$

adódik. Az  $r$  koordinátától nem, de  $t$ -től függő  $C_1$  és  $C_2$  kifejezéseket a korongba befolyó áram  $I(t)$  erőssége, illetve a korong szélén nullává váló vonalmenti áramsűrűség rögzíti:

$$i(r, t) = \pm \frac{I(t)}{2\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{r}{R^2} \right).$$

A mágneses indukciót a két korong radiális árameloszlása, valamint a két egyenes vezető árama hozza létre a Biot–Savart-törvénynek megfelelően. A radiális áramok csak a lemezek között hoznak létre teret, amely a szimmetriatengely körüli koncentrikus erővonalakkal szemléltethető, nagysága

$$B_{\Phi}^{(\text{lemezek})} = \mu_0 i(r, t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \left( \frac{r}{R^2} - \frac{1}{r} \right).$$

(Ezt közvetlen integrálással is meg lehet kapni, de elegendő hozzá annak megfontolása, hogy egy adott helyen lévő mágneses teret a közvetlen közelében folyó áramok határozzák meg, ahogy azt az 1. példában láttuk.) Az egyenes vezető szakaszok járuléka lényegében ugyanakkora, mint a folytonos, végtelen hosszú vezető mágneses tere:

$$B_{\Phi}^{(\text{két vezető})}(r, t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r},$$

a teljes mágneses indukció pedig

$$B_{\Phi}^{(\text{teljes})}(r, t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \begin{cases} \frac{1}{r} & \text{a lemezeken kívül,} \\ \frac{r}{R^2} & \text{a lemezek között.} \end{cases}$$

Ezt az eredményt is könnyen megkaphattuk volna a gerjesztési törvény integrális alakjából. A vezetőket koncentrikusan körülvevő kör alakú görbére a mágneses körfeszültség  $2\pi r B_{\Phi}(r, t)$ , a körülölelt áram pedig a kondenzátoron kívül  $I(t)$ , a lemezek között pedig (a „szétkent” eltolási áram miatt) csak  $I(t) \cdot r^2/R^2$ .

Érdekes az az eset is, amikor a körlapok között gyengén vezető közeg található, és az árameloszlás stacionárius. Az eltolási áramok ilyenkor nem jelennek meg, szerepüket a velük azonos nagyságú valódi áramok veszik át. A mágneses mező ugyanolyan lesz, mint az időben változó töltésű kondenzátornál, és ezt a mezőt most is kiszámíthatjuk a Biot–Savart-törvény segítségével. A lemezek közötti mágneses indukciót most elvben valamennyi áram együttes hatása hozza létre, de lemezekre merőleges (valódi, vezetési) áramok ebben az esetben is *nulla járulékot* adnak. A lemezek közötti mágneses teret a két egyenes vezető és a körlapokban folyó radiális áramok határozzák meg.

### 3. példa

Szigetelő szálra függesztett, alufóliával bevont csokimikulást (9. ábra) elektromosan feltöltöttünk. A mikulás a levegő csekély vezetőképessége miatt



9. ábra

lassan elveszíti töltését. Milyen mágneses teret kapnánk a mikulás körül (és annak belsejében) a Biot–Savart-törvény felhasználásával, ha a kisülés közben kialakuló áramok eloszlását konkrétan fel tudnánk írni és az integrálást el tudnánk végezni? (Feltehetjük, hogy a levegő vezetőképessége független a helytől.)<sup>5</sup>

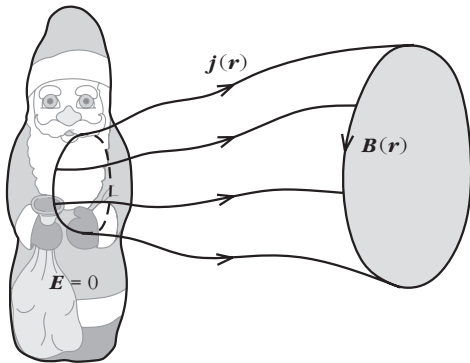
<sup>5</sup> Ez a probléma szerepel a *333 furfangos feladat fizikából* című feladatgyűjteményben.

*Megoldás:* A feltöltött csokimikulás körül elektrosztatikus mező alakul ki, amely megragadja a levegőben található töltéshordozókat, és így elektromos áram indul meg a „végtelen” felé (valójában a mikulástól távoli, földelt vezetők felé). A mikulást körülvevő mágneses teret azonban nemcsak a levegőben folyó áramok keltik! Az elektrosztatikus tér – a mikulás időben fokozatosan csökkenő töltése miatt – időben változik, ami az *integrális* Maxwell-egyenletben eltolási áram formájában szintén megjelenik. (Ugyanakkor – mint láttuk – az eltolási áram a Biot–Savart-törvényben nem ad járulékot.)

A csokimikulás körül kialakuló mágneses mező indukciójavonalai zártak, mert a mágneses mező forrásmentes. Válasszunk ki egy tetszőleges indukciójavonal-hurkot és egy erre a hurokra illeszkedő zsákfelületet (ez a 10. ábrán látható szürke felület). Ha a zárt hurokra (a  $B$ -vonal irányítottágával megegyező körülrési irányban) kiszámítjuk a

$$\sum \mathbf{B}(\mathbf{r}) \Delta \mathbf{r}$$

mágneses körfeszültséget (más néven örvényerősséget), akkor csak nemnegatív értéket kaphatunk eredményül, hiszen az indukció iránya és a hurok érintője által bezárt szög a hurok mentén nulla. Pontosan zérus örvényerősséget akkor és csak akkor kapunk, ha a hurok mentén a mágneses indukció értéke azonosan nulla.



10. ábra

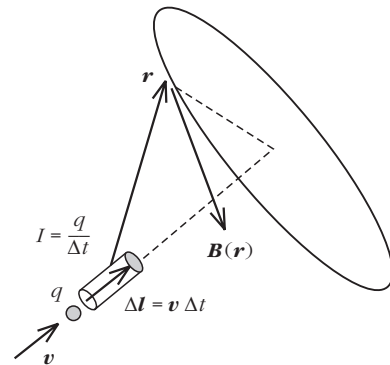
Az Ampère-féle gerjesztési törvény értelmében a zárt hurok örvényerőssége arányos a hurokra illeszkedő zsákfelületen áthaladó eredő áramerősséggel (ami a töltések által keltett elektromos áram és a változó elektromos tér miatt keletkező eltolási áram összege). Egy furfangos gondolattal ezt az eredő áramerősséget könnyen meghatározhatjuk! A szürke felület helyett válasszunk olyan zsákfelületet, amely benyúlik a csokimikulás belsejébe, a mikuláson kívül pedig a zárt hurokra illeszkedő áramvonalak határolják. Mivel a mikulás belsejében az elektromos térerősség és az áramsűrűség is zérus, a zsákfelület mikuláson kívüli részét pedig nem dőfi át sem a töltéshordozók vezetési árama, sem pedig elektromos térerősség (hiszen a differenciális Ohm-törvény szerint az elektromos térerősség arányos és azonos irányú az áramsűrűséggel), így a mágneses mező örvényerőssége (mágneses kör-

feszültsége) a zsák száját alkotó hurokra zérus. Ez azt jelenti, hogy a hurok mentén a mágneses indukció végig nulla.

A mikulás körül tehát *nem* alakulnak ki indukciójavonalak, és ugyanez igaz a mikulás belsejére is; a mágneses indukció értéke az egész térben *azonosan nulla*. Ha ugyanezt a mágneses teret a Biot–Savart-törvény alapján akarjuk kiszámítani, mivel abban az eltolási áramokat nem kell figyelembe vegyünk, a valódi (vezetési) áramok járuléka önmagában is *nulla* lesz. Ezt közvetlen számolással – általános esetben, tetszőleges alakú mikulásra – nyilván nehéz lenne igazolni.

#### 4. példa

Milyen mágneses teret hoz létre egy  $q$  töltésű,  $v$  sebességgel mozgó részecske (például egy proton vagy egy elektron) az  $\mathbf{r}$  vektorral megadott helyen? Feltehetjük, hogy a részecske éppen az origóban tartózkodik, és hogy a mozgása nemrelativisztikus ( $v \ll c$ ).



11. ábra

*Megoldás:* A részecske elmozdulása valamely kicsiny  $\Delta t$  idő alatt  $\Delta \mathbf{l} = \mathbf{v} \cdot \Delta t$ , és ezen a kis szakaszon  $I = q/\Delta t$  áramerősséget képvisel. Így a keresett mágneses mező a Biot–Savart-törvény szerint

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\Delta \mathbf{l} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}.$$

Ezt az eredményt az álló ponttöltés mellett elhaladó megfigyelő „mozgó” koordinátarendszeréből (a Lorentz-transzformáció képleteinek felhasználásával) is megkaphatjuk, vagy egy alkalmasan választott zárt görbére (például a 11. ábrán látható körre) vonatkozó örvényerősségből is kiszámíthatjuk. Ezek mindegyike sokkal bonyolultabb eljárás, mint a Biot–Savart-törvény alkalmazása, amely során az eltolási áramok hatásával nem kellett törődnünk.

A fenti képlet csak közelítőleg igaz; ha a részecske sebessége összemérhető a fénysebességgel, a formula relativisztikus korrekcióit is figyelembe kell vennünk. Érdekes viszont, hogy ha egy zárt vezetékben folyó *egyenáramot* sok ponttöltés mozgásával írjuk le, az egyes töltések mozgásából adódó, de csak közelítőleg helyes mágneses terek összege – a részecskék számának növelésével – a folytonos árameloszlás egzaktjának tekinthető Biot–Savart-képletének eredményéhez tart.

## Összefoglalás

A Biot–Savart-törvény (amely az elektrosztatikai Coulomb-törvény + szuperpozíció elv mágneses megfelelője) tetszőleges helyen megadja ismert térbeli eloszlású áramok által keltett mágneses indukciót. A törvény eredeti formájában *egyenáramokra* és *zárt* áramkörökre, tehát magnetosztatikai problémákra érvényes.

A Biot–Savart-törvény kiterjeszhető időben lassan változó és nem feltétlenül zárt árameloszlásokra is. A mágneses indukció pillanatnyi értékét ilyen esetekben is ugyanolyan alakú integrálból lehet kiszámítani, mint a magnetosztatikában. A törvény alkalmazásánál *csak a valódi* (a töltéshordozók mozgásával kapcsolatos) *áramokat* kell figyelembe vennünk, az úgynevezett eltolási áramok nem szerepelnek az integrálban.

A Biot–Savart-törvény segítségével a valódi áramokból kiszámítható az  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  vektorpotenciál, majd abból rotációképzéssel kapható meg a  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  mágneses indukció mező. Ez utóbbi nyilván forrásmentes ( $\text{div}\mathbf{B}(\mathbf{r}) \equiv 0$ ), örvényerőssége (rotációja) pedig egy olyan vektormező, amely a valódi áramok mellett még egy másik tagot, az *eltolási áramot*, pontosabban annak

$$\mathbf{j}_{\text{eltolási}}^{(\text{Coulomb})} = \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}^{(\text{Coulomb})}$$

Coulomb-részét is tartalmazza:

$$\begin{array}{l} \mathbf{j}_{\text{valódi}} \\ \downarrow \quad (\text{Biot–Savart–törvény}) \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ \downarrow \quad (\text{rotációképzés}) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}) \\ \downarrow \quad (\text{rotációképzés}) \\ \mathbf{j}_{\text{valódi}} + \mathbf{j}_{\text{eltolási}}^{(\text{Coulomb})} \end{array}$$

A Biot–Savart-törvényben tehát rejtve „benne van” az eltolási áram örvénymentes (Coulomb) része, jóllehet az a törvényt megfogalmazó integrálban expliciten

nem jelenik meg. Az eltolási áram Faraday-féle (divergenciamentes) összetevője a lassan változó terek-nél elhanyagolhatóan kicsi a valódi áramok és az eltolási áram Coulomb-féle (rotációmentes) komponense mellett.

Ha a mágneses indukciót nem a Biot–Savart-törvényből, hanem az Ampère-féle gerjesztési törvényből akarjuk meghatározni, abban a mágneses indukció tényleges *teljes* örvényerősségével, tehát a valódi és az eltolási áramok összegével kell számolnunk.

Az elmondottak természetesen csak a „lassú változásoknak” megfelelő közelítés pontosságával érvényesek. A „pontos” képletek annyiban térnek el az itt tárgyaltaktól, hogy egy adott  $\mathbf{r}$  helyen és  $t$  időpillanatban kialakuló elektromos és mágneses térerősségekhez járulékot adó  $\mathbf{r}'$  pontbeli áramokat és a töltéseket nem ugyanabban a  $t$  időpontban, hanem egy *korábbi*

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}{c}$$

(úgynevezett *retardált*) időpontban kell „néznünk”. A  $t-t'$  időkülönbség éppen az az időtartam, amely alatt valamilyen (fénysebességgel terjedő) információ eljuthat  $\mathbf{r}'$ -ből  $\mathbf{r}$ -be. Kvázistacionárius közelítésben ezt az időkülönbséget elhanyagoljuk és az erőtereket az áram- és töltéseloszlások *pillanatnyi* értékeiből számoljuk, továbbá nem vesszük számításba az eltolási áram Faraday-összetevőjét. Az antennák elméleti leírásában a kvázistacionárius közelítés érvényességi köre az úgynevezett *statikus zónának* (másképpen közelzónának) felel meg, vagyis azoknak a térbeli távolságoknak, amelyek az adott frekvenciájú elektromágneses sugárzás hullámhosszánál *sokkal közelebb vannak a hullámforrásokhoz*.

### Köszönetnyilvánítás

A cikkben leírt problémakör vizsgálatát a *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok* fizikus szerkesztőbizottságának tagjaival folytatott eszmecsere, elsősorban *Radnai Gyula* és *Vigh Máté* érdekes, inspiráló feladatainak átgondolása indította el. Köszönettel tartozom *Hraskó Péternek* nagyon hasznos észrevételeiért és tanácsaiért, *Tichy Gézánnak*, aki felhívta figyelmemet a Lorentz-féle mértékváltszás előnyeire, valamint *Vankó Péternek* és *Honyek Gyulának* a kézirat átnézéséért.

