

AZ AMPÈRE-FÉLE GERJESZTÉSI TÖRVÉNY ALKALMAZHATÓSÁGÁNAK FELTÉTELE

Morvai Bálint, Pálfalvi László

Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Fizikai Intézet

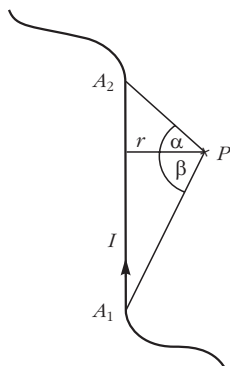
Az Ampère-féle gerjesztési törvény, ellentmondások

A magnetosztatika többek közt stacionárius, azaz időben állandó áramok által keltett mágneses tér leírásával foglalkozik. A Biot–Savart-törvénnyel meghatározhatjuk tetszőleges alakú áramjárta vezető általunk kiválasztott része által a tér tetszőleges pontjában keltett mágneses indukciót. Az *Ampère-féle* gerjesztési törvény (a továbbiakban gerjesztési törvény) – miszerint *a mágneses indukciónak egy tetszőleges zárt görbére egyszerű körüljárással vett integrálja egyenlő a görbe által határolt tetszőleges felületen áthaladó áramok áramerősségei előjeles összegének μ_0 -szorosával* – nagy szimmetriával rendelkező esetekben használható, amelyekre tipikus tankönyvpélda a végtelen hosszú egyenes vezető, illetve a sűrűn csévélt, hosszú, egyenes tekercs belseje. Természetesen a gerjesztési törvény a Biot–Savart-törvénnyel azonos eredményt ad, hiszen ez utóbbi törvényből az előbbi levezethető [1].

Aki tanulmányaiban a magnetosztatika fejezeteinél jár és a teljes elektrodinamikát nem ismeri, könnyen zsákutcába juthat a gerjesztési törvény alkalmazásával. A Biot–Savart-törvény alkalmazásánál ugyanis megtanulta, hogy egy áramjárta vezető tetszőlegesen kiválasztott darabja által keltett mágneses indukciót mindig ki lehet számolni, ez pusztán technika kérdése. Például egy véges hosszúságú, vékony, egyenes vezető esetén az integrálást csak az A_1A_2 szakaszra (1. ábra) kell elvégezni, nem kell foglalkozni a végpontokon kívüli részekkel. Az I áramú egyenes vezetődarabtól r távolságra lévő P pontban a mágneses indukció nagysága

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi r} I(\sin\alpha + \sin\beta), \quad (1)$$

1. ábra. Véges hosszúságú vezető szakasz (A_1A_2), amelynek árama által keltett mágneses tér a vizsgálódás tárgya.

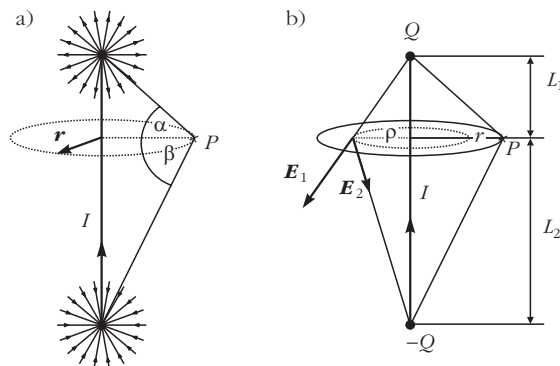


iránya pedig a rajz síkjára (1. ábra) merőleges. A szakasz által keltett mágneses tér hengersizmetrikus, és csak azimutális komponenssel rendelkezik. Ez felbátorít arra, hogy a gerjesztési törvénnyel ellenőrizzük eredményünket. Meglepő módon az eredmény egyezik a végtelen hosszú, egyenes vezető terével, pedig a törvényt a „recept” szerint használtuk. Mi az ellentmondás oka?

Az ellentmondás feloldása I.

A gerjesztési törvény alkalmazhatóságának rejtett kritériuma (ami a szakkönyvek ide vonatkozó fejezeténél nincs megemlítve), hogy vezetési áram(ok) esetén *a kiválasztott zárt görbe által kifeszített, a görbe által határolt bármely felületen az áram(ok)nak át kell folynia* [2]. Tehát a vizsgált vezetéknek önmagába záródónak kell lennie, ezáltal a *kontinuitásnak* (töltésmegmaradásnak) teljesülnie kell. Vezetődarab vizsgálata esetében tehát gondoskodnunk kell az áram végpontokhoz történő oda- és elvezetéséről. Az utóbbi időben több különböző változatban megjelent versenyfeladat [3–5] megoldása sugallta a kontinuitás biztosításához az alapötletet. Az önmagába záródó vezető konstruálása helyett a szakasz végeinél a be- és elvezetést gömbszimmetrikusan szerteágazó, végtelenbe vezető nagyszámú „küllővel” oldjuk meg, amelyek mindegyikén azonos erősségű áram folyik (2.a ábra). Ezen megoldás azért előnyös, mert a Biot–Savart-törvény ismeretében (de annak explicit alkalmazása nélkül) pusztán szimmetriamegfontolásokkal belátható, hogy a végpontokból sugárirányban kifelé, illetve befelé futó áramok nem adnak járulékot a vizsgált szakasz által keltett hengersizmetrikus, csak azimutális komponenssel rendelkező mágneses térhez, amit most már a gerjesztési

2. ábra. Az áramvezető szakasz végpontjaihoz csatlakoztatott gömbszimmetrikus küllőszerű elágaztatás (a), illetve a szakasz végpontjainban felhalmozódó töltések, amelyek eltolási áramot keltenek (b).



törvénnyel meghatározhatunk. Természetesen figyelembe kell venni a küllőkben folyó áramok azon hányadát, amelyek a P ponton átmenő r sugarú, a vezető szakaszra merőleges kör lapját átdöfik. Ezek pedig azok az (összesen I_1 , illetve I_2 erősségű) áramok, amelyek a végpontokból nézve $90-\alpha$, illetve $90-\beta$ félcúscsögű kúp palástján belül folynak. Felhasználva a kúp térszögét az I_1 és I_2 áramerősségekre

$$I_1 = \frac{I}{2}(1 - \sin\alpha) \quad \text{és} \quad I_2 = \frac{I}{2}(1 - \sin\beta) \quad (2)$$

értékek adódnak. A gerjesztési törvény szerint:

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{B} \, d\mathbf{r} &= B 2 r \pi = \mu_0 \sum I = \mu_0 (I - I_1 - I_2) = \\ &= \frac{\mu_0 I}{2} (\sin\alpha + \sin\beta) \end{aligned} \quad (3)$$

adódik, amelyből a mágneses indukcióra az (1) összefüggéssel azonos értéket kapunk.

Az ellentmondás feloldása II.

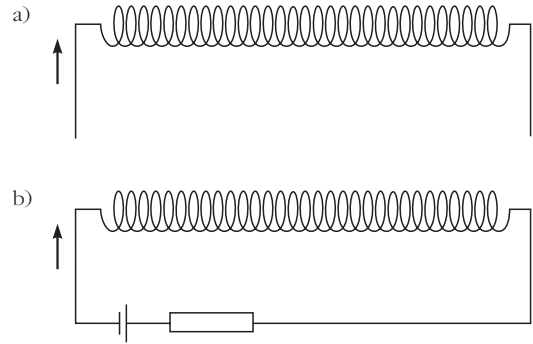
Az előző fejezetben bemutatott módszer lehetőségét adott arra, hogy a Biot-Savart-törvény explicit alkalmazása nélkül a gerjesztési törvénnyel meghatározzuk az egyenes vezető keltette mágneses teret. Az okfejtés során rámutattunk, hogy a peremfeltételek helytelen kezelése ellentmondáshoz vezet, ami az ilyen típusú problémák során vagy a töltések elvezetésével (lásd előző fejezet), vagy a töltés felhalmozódás okozta *eltolási áram* figyelembevételével kerülhető el [6]. A szakadások helyén létrejövő időbeli töltésváltozás következtében időben változó elektromos tér alakul ki, amihez rendelt eltolási áramot – a vezetési áram mellett – az alábbiak szerint figyelembe kell venni (Maxwell IV. törvénye):

$$\oint \mathbf{B} \, d\mathbf{r} = \mu_0 (I + I_e) = \mu_0 \left(I + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_A \mathbf{E} \, d\mathbf{A} \right), \quad (4)$$

ahol a felületi integrál a kontúr által határolt felületre vonatkozik.

Vizsgált problémánk esetében a végpontokba képzeljünk parányi vezető gömböket, amelyek felületein lévő töltések az adott pillanatban Q , illetve $-Q$. A végpontbeli töltések időbeli változása időben változó, gömbszimmetrikus elektromos teret kelt, amelyek szuperponálódnak. Adott „futó pontban” (2.b ábra) a végpontbeli töltések által keltett térerősségek normális komponensei előjelhelyesen:

$$\begin{aligned} E_{1n} &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{L_1}{(L_1^2 + \rho^2)^{3/2}}, \\ E_{2n} &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{L_2}{(L_2^2 + \rho^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (5)$$



3. ábra. A hosszú egyenes tekercs mágneses terének meghatározásához használt tipikus ábra (a), illetve annak módosított változata a gerjesztési törvény alkalmazhatóságához (b).

A (4) összefüggésben felhasználva, hogy

$$\int_A \mathbf{E} \, d\mathbf{A} = \int_0^r (E_{1n} + E_{2n}) 2\pi\rho \, d\rho,$$

illette felhasználva az (5)-beli összefüggéseket, majd az integrálást elvégezve és figyelembe véve, hogy

$$\frac{dQ}{dt} = I,$$

illette, hogy

$$\sin\alpha = \frac{L_1}{(L_1^2 + r^2)^{1/2}} \quad \text{és} \quad \sin\beta = \frac{L_2}{(L_2^2 + r^2)^{1/2}}$$

a vezetős szakasz által keltett mágneses indukció értékére az előző fejezetbeli megoldás eredményével, és az (1) összefüggésbelivel azonos eredményt kapunk.

Megjegyezzük, hogy a két bemutatott módszer nem különbözik sarkosan egymástól. Ha a végpontok környezetét nagy kiterjedésű gömbszimmetrikus vezető közegnek tekintjük, akkor az eltolási áram helyett sugárirányú vezetési áramok jelennek meg (amelyek persze szuperponálódnak), ami hasonlít a végtelen számú küllő esetéhez.

Az egyenes tekercs mágneses tere

A hosszú, egyenes, sűrűn csévelt tekercs belsejében kialakuló mágneses tér meghatározására a tanulóknak a gerjesztési törvényt alkalmazzák, és illusztrációként a 3.a ábrához hasonló használnak. A fentiek tanulsága tükrében a szakadás okozta problémák elkerülése és a törvény alkalmazhatósága érdekében a 3.b ábrának megfelelő átalakítást kell elvégezni. Ez a módosítás a kiegészítő vezeték által keltett, a rajz síkjára merőleges indukciókomponens megjelenését eredményezi. Viszont ez a gerjesztési törvényben (a skalárszorzat miatt) nem kap szerepet, így a longitudinális komponensre a jól ismert eredményt kapjuk. A teljesség kedvéért viszont a tényt, miszerint a gerjesztési törvény érvényességi körének biztosításához a szükséges körülményeket meg kell teremteni (azaz a 3.b ábra szerinti elrendezést kell tekinteni), hangsúlyozni kell, hogy az említett, a rajz síkjára merőleges indukciókomponensről nem kapunk információt.

Rámutattunk, hogy („álöltözetben”) magnetosztai problémák megoldása során körültekintőnek kell lenni az Ampère-féle gerjesztési törvény alkalmazása során. Az érvényességi kör az elektrodinamika-tankönyvek későbbi fejezetei ismeretében kristályosodik ki. Az okfejtést egy konkrét fizikai problémán keresztül bontottuk ki. Az általános tanulság levonása mellett bemutattuk a véges hosszú egyenes vezető szakasz mágneses terének gerjesztési törvényen alapuló, a Biot–Savart-törvény explicit alkalmazását mellőző levezetését. Az elemzett problémák során levont következtetések tükrében kijelenthetjük, hogy az elektrodinamika-kurzusok során az Ampère-féle gerjesztési törvény első felbukkanásakor már érdemes felhívni a hallgatóság figyelmét a

tankönyvekben (ezen a ponton még) nem hangsúlyozott követelményre, ugyanis pusztán a „*stacionárius* áramok mágneses tere” fejezetcím nem biztos, hogy elegendő.

Irodalom

1. J. D. Jackson: *Klasszikus elektrodinamika*. Typotex, Budapest, 2004.
2. D. Barchiesi: Didactical formulation of the Ampère law. *Eur. J. Phys.* 35 (2014) 038001.
3. Gnädig P.: A 2014. évi Eötvös-verseny 3. feladata
4. Gnädig P.: A 2014. évi Ortvány-verseny 17. feladata
5. Gnädig P., Honyek Gy., Vigh M.: *333 furfangos feladat fizikából* Typotex, Budapest, 2014.
6. M. Landini: About the physical reality of „Maxwell's displacement current” in classical electrodynamics. *Progress in Electromagnetics Research* 144 (2014) 329.