

# SUGÁRNYALÁBOK INGADOZÁSAI ÉS KORRELÁCIÓJA A RÉSZECSEKÉP ALAPJÁN

Györgyi Géza (1930–1973)

## Bevezetés

Az utóbbi években számottevő érdeklődés fordult a koherens nyalábokban kimutatott fotonok korrelációjának problémája felé. Hazánkban *Jánossy Lajos* és munkatársai [1] végeztek koincidenca-, továbbá interferencia-kísérleteket, a fény természetének részecske- és hullámtulajdonságainak beható vizsgálatára törekedve. *E. Brannen* és *H. J. S. Ferguson* [2] ugyancsak a fundamentális kérdések iránti érdeklődéstől sarkallva végeztek később koincidenca-kísérleteket koherens fénynyalábokkal. *R. Hanbury Brown* és *R. Q. Twiss* [3] pedig gyakorlati csillagászati probléma: a csillagok szögátmérőjének interferometrikus meghatározása kapcsán vizsgálták fotonok korrelációját koherens nyalábokban.

2014. október 1-jén egykori lakóházánál (Budapest, II. Szilágyi Erzsébet fasor 79.) emléktáblát avattak *Györgyi Géza* tiszteletére, aki egyebek között a *Fizikai Szemle* Szerkesztőbizottságának is aktív tagja volt. Idézzük fel emlékéit egy 53 éve megjelent – *Fiz. Szemle* 12 (1962) 146–152. –, aktualitását azóta sem veszített írásával.



Ezekben a kísérletekben szűk, közel monokromatikus sugárnyalábot ( $s$ ) ejtettek egy  $T$  féligáteresztő tükörrre, amelyen a nyaláb részben visszaverődött, részben áthaladt. Az így előállított  $s_1$ ,  $s_2$  koherens fénynyalábok az  $F_1$ , illetve az  $F_2$  felfogóberendezésekre estek. Az  $F_1$ -hez és  $F_2$ -höz csatlakozó  $K$  berendezés rendeltetése az volt, hogy megállapítsa az  $F_1$  és az  $F_2$  fotoelektron-sokszorozó által adott időköz folyamán kimutatott fotonok számának ingadozásainak korrelációját (1. ábra). A korrelációt koincidenca-kísérletek segítségével lehetett vizsgálni. A  $K$  koincidenca-számláló jelzése alapján megállapítható volt, ha egy-egy foton  $F_1$ -et és  $F_2$ -t adott  $\tau_f$  (= felbontási idő) hosszúságú időközön belül szólaltatta meg.

A koherens résznyalábokban észlelt fotonok korrelációjának megállapítására végzett, fent említett kísérletek eredményeit a következőkben foglalhatjuk össze. Mindaddig, míg a  $\tau_f$  felbontási idő nagy a vizsgált nyaláb  $\Delta\nu$  frekvenciaszélességének reciprokához, a  $\tau = 1/\Delta\nu$  mennyiségéhez viszonyítva:

$$\frac{\tau_f}{\tau} \gg 1, \quad (1)$$

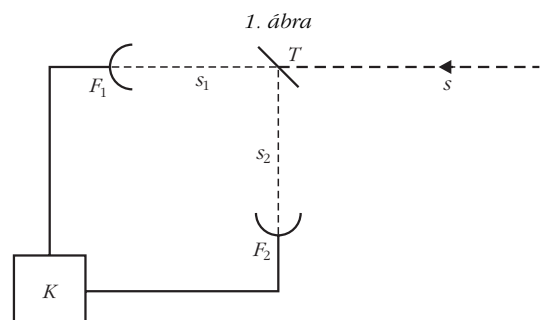
az  $F_1$  és  $F_2$  fotoelektron-sokszorozók által jelzett fotonok között nem tapasztalhatók szisztematikus koincidenca-kísérletek; az  $F_1$  és  $F_2$  által kimutatott fotonok között nem tapasztalnak korrelációt [1, 2]. Ha azonban a  $\tau_f$  felbontási idő a  $\tau$  reciprok vonalszélesség nagyságrendjébe esik:

$$\tau_f \approx \tau, \quad (2)$$

szisztematikus koincidenca-kísérletek észlelhetők; az  $F_1$  és  $F_2$  által kimutatott fotonok (intenzitások) ingadozásai között pozitív korreláció lép fel [3]. Ezt a korrelációt első ízben *R. Hanbury Brown* és *R. Q. Twiss* figyelték meg.

Megfelelnek-e ezek a kísérleti eredmények az elmélet várakozásainak? Miképpen magyarázhatók a (2) esetben megfigyelt szisztematikus koincidenca-kísérletek?

A korreláció eltűnése, amelyet az időrendben korábban az (1) feltétel mellett elvégzett kísérletekben



figyeltek meg, leegyszerűbben a fény leegyszerűsített részecskemodellje alapján, a klasszikus részecskék keretei között értelmezhető. Ha ugyanis a fénynyalábot mint klasszikus tömegpontokhoz hasonlatos részecskék áramát gondoljuk el (amint azt például annak idején *Newton* tette), úgy természetes a feltevés, hogy a nyalábban haladó fényrészecskék statisztikailag függetlenek. Egy ilyen nyalábból féligáteresztő tükör segítségével előállított résznyalábok nyilvánvalóan függetlenek lesznek. Eszerint tehát a résznyalábokhoz tartozó részecskeszámok ingadozásainak korrelációja el kell hogy tűnjék.

Az előzőekben alapul vett klasszikus részecskék természetesen szélsőségesen leegyszerűsített képe a fénynek. Ismeretes például, hogy a hőmérsékleti sugárzás spektrumára a klasszikus részecskék keretei között levezetett Wien-féle törvény kis rezgésszámok és nagy hőmérsékletek ( $h\nu/kT \ll 1$ ) mellett egyáltalán nem egyezik a megfigyelésekkel, illetve a megfigyeléseket helyesen leíró Planck-féle törvényvel. Ugyanígy a klasszikus részecskék korlátozottságát mutatja a (2) feltétel mellett megfigyelt pozitív korreláció.

Módosulnak a következtetések, ha a fénynyaláb viselkedését a klasszikus hullámkép keretei között vizsgáljuk. Itt a nyalábot nyilván az egyes atomi fénykibocsátási aktusokban keletkezett csillapított hullámvonulatokból állónak kell elgondolnunk. Míg e hullámvonulatok nem fedik egymást, a statisztikus függetlenség feltevése ezekre nézve is fenntartható. Az ilyen hullámvonulatok (amelyek egy-egy foton megismerésüknek tekinthetők) által  $F_1$ -en, illetve  $F_2$ -n okozott beütések között nincs korreláció. – Más azonban a helyzet, ha a nyalábban haladó két hullámvonulat átfedi egymást, interferál. Ilyenkor az interferencia miatt az  $F_1$ -en és  $F_2$ -n kiváltott fotoelektronok nem tekinthetők statisztikusan függetleneknek, a beütésszámok ingadozásai között korreláció lép fel. – R. H. Hanbury Brown és R. Q. Twiss ténylegesen a fény klasszikus hullámelmélete alapján vonták le a következtetésüket, amely szerint a koherens résznyalábok intenzitásingadozásai között korrelációnak kell lennie. Ez az elméleti következtetés ösztönözte őket kísérletük elvégzésére, amelyben első ízben sikerült megfigyelniük a korrelációt. Ezt követően megelénkült az érdeklődés a fénynyalábok ingadozásainak és korrelációjának elmélete iránt. Igen részletes tárgyalását adta a jelenségeknek a fény klasszikus elektromágneses hullámelmélete alapján több dolgozatában *Jánosy Lajos* [4]. Más szerzők is legnagyobb részben a klasszikus hullámkép keretei között vizsgálták a problémát. Ugyanakkor több hullámelméleti dolgozatban, így például *E. M. Purcell* munkájában [5] olvashatunk megjegyzéseket és megállapításokat, amelyekből kitűnik: tévedés volna azt gondolni, mintha a fény részecskéje alapján nem volna megérthető a (2) esetben megfigyelt korreláció.

Ez nem meglepő. Ismeretes például, hogy a hőmérsékleti sugárzás Planck-féle törvénye is levezethető nemcsak a hullámkép alapján (egy tükröző falú üveg

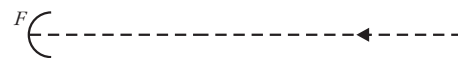
elektromágneses sajátrezgéseit szemügyre véve), de a részecskék alapján is (kiindulva a fotongáz statisztikai tárgyalásából). Ez a részecskék természetesen nem azonos a klasszikus részecskékkel (amely, mint említettük, a Planck-törvény helyett a Wien-törvényhez vezet). Ahhoz, hogy a részecskék a (klasszikus modellel nem szemléltethető) kvantált elektromágneses sugárzási tér viselkedését hűen ábrázolja, tekintetbe kell vennünk egy nemklasszikus vonást: a részecskék azonosságát.<sup>1</sup>

Cikkünk célja, hogy bemutassa a fénynyalábok ingadozásainak és korrelációjának tárgyalását a részecskék keretei között, figyelembe véve a részecskék azonosságát.

## Sugárnyaláb ábrázolása a fázissíkon.

### Elemi fáziscellák

A koherens résznyalábok között fellépő korreláció tárgyalásának előkészítése céljából vizsgáljuk meg előbb egyetlen fénynyaláb ingadozásait, statisztikus viselkedését. Az intenzitás (a fotonok beütésszáma) és vele együtt az ingadozások jelzésére szolgáljon az  $F$  felfogóberendezés (2. ábra). Az egyszerűség ked-



2. ábra

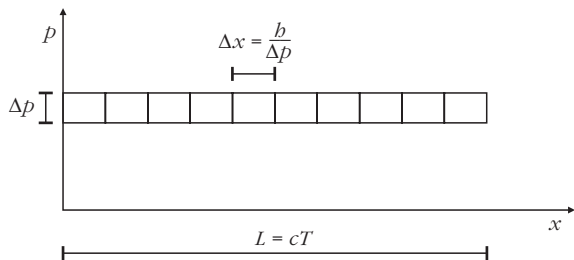
véért tegyük fel, hogy a nyalábban a  $(\nu_0 - \Delta\nu/2, \nu_0 + \Delta\nu/2)$  közbeeső frekvenciák egyenlő intenzitással vannak képviselve, e közön kívül pedig az intenzitás legyen zérus. Más szóval: feltesszük, hogy a nyaláb spektruma négyzet alakú; a spektrum szélességét  $\Delta\nu$ , a frekvencia középértékét pedig  $\nu_0$  jelöli. Mint-hogy a foton  $p$  impulzusa a  $\nu$  rezgésszámmal a  $p = h\nu/c$  kapcsolatban áll,<sup>2</sup> ez azt jelenti, hogy a nyaláb fotonjainak impulzusértékei egy  $\Delta p = h\Delta\nu/c$  nagyságú közbé esnek.

Azok a fotonok, amelyek egy megadott  $T$  hosszúságú időköz folyamán esnek rá  $F$ -re, ezen időköz kezdetén egy  $L = cT$  hosszúságú szakasz mentén helyezkednek el. E fotonok fotonjainak helyzetét a koordinátára vonatkozó  $0 \leq x \leq L$  egyenlőtlenség zárja közre. A sokaság fotonjainak helyzetét ( $x$ ) és mozgását ( $p$ ) jellemző pontok az  $(x, p)$  síkon, az úgynevezett fázissíkon eszerint  $L\Delta p$  területű négyzetet töltnek ki (3. ábra).

Részecskesokaságok statisztikus tárgyalásában alapvető a következő (sokszorosan beigazolódott) feltevés: annak valószínűsége, hogy egy  $(x, p)$  fázispont a fázissík adott területű tartományába jusson, arányos e tartomány területével. Eszerint, ha a vizsgált fotonnyalábhöz tartozó fázisnégyzetet egyenlő nagyságú cellákra osztjuk be (3. ábra), úgy egy fotont ábrázol-

<sup>1</sup> Megjegyezzük, hogy ugyanígy a hullámkép használata esetén is figyelembe veendő egy nem klasszikus vonás: a sugárzási tér saját rezgéseinél kvantáltsága.

<sup>2</sup> Itt a  $h$  a Planck-állandó,  $c$  a fénysebesség.



3. ábra

ló  $(x, p)$  fázispont egyenlő valószínűséggel kerülhet a cellák mindegyikébe.

A kvantumelmélet megadja a fázissík legfinomabb felosztásával adódó elemi cellák területét. Ha egy részecske állapotát (koordinátáját és impulzusát) a lehető legpontosabban határozzuk meg, a koordináta, illetve az impulzus határozatlanságát jellemző  $\Delta x$  és  $\Delta p$  mennyiségek szorzata a Planck-állandót kell hogy adja:  $\Delta x \cdot \Delta p = h$  (Heisenberg-féle határozatlansági összefüggés). Ez az egyenlet határozza meg egy elemi fáziscella nagyságát: egy cella területe  $h$ -val egyenlő. Ennek alapján megállapíthatjuk: az  $L\Delta p$  területű fázisnégyzetben az elemi cellák száma

$$Z_p = \frac{L\Delta p}{h} = \frac{L\Delta v}{c}. \quad (3)$$

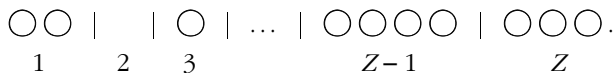
$Z_p$  a haladó mozgás szabadsági fokaihoz tartozó független fotonállapotok számát adja meg. Adott haladó mozgás esetén a foton polarizációja számára két különböző független állapot lehetséges. A független fotonállapotok teljes számát  $Z_p$  csak rögzített polarizáció (polarizált nyaláb) esetén adja meg. Ha mindkét polarizáció megengedett, az állapotok (cellák) teljes  $Z$  száma  $Z_p$  kétszerese:

$$Z = 2 \frac{L\Delta v}{c}. \quad (4)$$

## A fotonszám valószínűség-eloszlása egy elemi fáziscellában

A fénynyaláb ingadozásainak, statisztikus viselkedésének meghatározása érdekében foglalkozzunk most a következő feladattal: mi annak a valószínűsége, hogy egy kiszemelt fáziscellába pontosan  $n$  foton kerüljön?

Legyen a nyalábban haladó fotonok száma  $N$ . Hányféleképpen helyezhető el ez az  $N$  foton a  $Z$  számú cellában? Az esetek megszámlálását a fotonok azonosságának szem előtt tartásával kell elvégeznünk; két elrendezést, amelyek a fotonok felcserélésében különböznek, azonosnak kell tekintenünk. A megszámlálás így történhet [6]. A fotonokat ábrázolják körök. Először írjunk le annyi kört, ahány foton az első cellába jut, majd húzzunk egy vonalat; ezután írjuk le a második cellába került köröket, és ismét húzzunk egy vonalat és így tovább, végül a  $Z-1$ -edik vonal után írjuk le az utolsó ( $Z$ -edik) cellába jutó fotonoknak megfelelő köröket:



Az összes lehetséges elhelyezés számát úgy kapjuk meg, hogy az  $N$  foton (kör) és a  $Z-1$  vonal összes permutációinak  $(N+Z-1)!$  számát elosztjuk a  $N!$ -sal és  $(Z-1)!$ -sal, a fotonok, illetve a vonalak egymás közötti felcseréléseinek számával. A keresett szám tehát:

$$\frac{(N+Z-1)!}{N!(Z-1)!} = \binom{N+Z-1}{N}. \quad (5)$$

Ezen kívül meg kell határozni azon elhelyezkedések számát, amelyeknél a kiszemelt cellába pontosan  $n$  részecske jut. Ezen elhelyezkedések számát úgy kapjuk, hogy a fennmaradó  $N-n$  foton az összes lehetséges módon elhelyezzük a fennmaradó  $Z-1$  cellába. Az elhelyezkedések számát (5)-ből nyilván a  $N \rightarrow N-n$ ,  $Z \rightarrow Z-1$  helyettesítéssel kapjuk:

$$\binom{N+Z-n-2}{N-n}. \quad (6)$$

Annak valószínűségét kívánjuk tudni, hogy egy kiszemelt cellába pontosan  $n$  részecske jusson. E valószínűséget a „kedvező” esetek (6) s az összes esetek (5) számának hányadosa szolgáltatja:

$$\frac{\binom{N+Z-n-2}{N-n}}{\binom{N+Z-1}{N}}. \quad (7)$$

Itt feltehető, hogy  $N$  igen nagy szám, hiszen az ingadozásokra, korrelációra igen sok fotonnal elvégzett megfigyelésekből következtetnek. Elvégezhetjük tehát (7)-ben az  $N \rightarrow \infty$  határátmenetet, ugyanakkor szükséges  $Z \rightarrow \infty$  is, miután az egy cellára eső átlagos fotonszámot, a  $v = N/Z$ -t (az intenzitás spektrális sűrűségét) a kísérleti feltételek meghatározzák. A (7)-es kifejezést célszerűen átalakítva és a mondott határátmenetet elvégezve kapjuk:

$$\begin{aligned} & \frac{(N+Z-n-2) \dots (Z-1)}{(N-n)!} = \\ & \frac{(N+Z-1) \dots Z}{N!} = \\ & = \frac{(Z-1)(N-n+1)(N-n+2) \dots N}{(N+Z-1)(N+Z-2) \dots (N+Z-n-1)} = \\ & = \left(1 - \frac{1}{Z}\right) \left(v - \frac{n-1}{Z}\right) \left(v - \frac{n-2}{Z}\right) \dots \left(v - \frac{1}{Z}\right) v \rightarrow \\ & = \frac{\left(1 - \frac{1}{Z}\right) \left(1 + v - \frac{1}{Z}\right) \left(1 + v - \frac{2}{Z}\right) \dots \left(1 + v - \frac{n+1}{Z}\right)}{\left(1 + v - \frac{1}{Z}\right) \left(1 + v - \frac{2}{Z}\right) \dots \left(1 + v - \frac{n+1}{Z}\right)} \rightarrow \\ & \rightarrow v(n) = \frac{1}{1+v} \left(\frac{v}{1+v}\right)^n, \quad (8) \end{aligned}$$

ha  $N = vZ \rightarrow \infty$  ( $v = \text{const.}$ ). A kapott  $v(n)$  kifejezés



$N, Z \gg 1$  és rögzített  $v = N/Z$  esetén közelítőleg megadja annak valószínűségét, hogy egy kiszemelt fáziscellában pontosan  $n$  foton legyen jelen.<sup>3</sup>

## A valószínűség-eloszlás több elemi cellából álló fázistartományban

Ahhoz, hogy a fénynyaláb ingadozásai stb. kapcsolatban feltett kérdésekre válaszolhassunk, ismernünk kell annak  $v_z(n)$  valószínűségét, hogy a fázissík egy tartományába, amely  $z$  elemi cella egyesítése útján állt elő, pontosan  $n$  foton essék. A keresett valószínűség (8)-ból a

$$v_z(n) = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_z=n} v(k_1) v(k_2) \dots v(k_z) \quad (9)$$

képlet szerint kapható. A (8) kifejezést (9)-be helyettesítve kapjuk:

$$v_z(n) = \left( \frac{1}{1+v} \right)^z \sum_{k_1+k_2+\dots+k_z=n} \left( \frac{v}{1+v} \right)^{k_1+k_2+\dots+k_z}$$

Az itt álló  $z$ -szeres összeg minden tagja ugyanakkora:

$$\left( \frac{v}{1+v} \right)^n \text{-nel}$$

egyenlő. A tagok száma pedig annyi, ahányféleképpen  $n$ -et  $z$  számú nemnegatív egész szám összegeként előállíthatjuk. E lehetőségek száma  $n$  elem  $z-1$ -edrendű ismétléses kombinációi számával,

$$\binom{n+z-1}{z-1} \text{-gyel}$$

egyenlő. Írható tehát:

$$v_z(n) = \binom{n+z-1}{z-1} \left( \frac{1}{1+v} \right)^z \left( \frac{v}{1+v} \right)^n. \quad (10)$$

Ez tehát annak valószínűsége, hogy a fázissík egy  $z$  elemi cella egyesítése útján kapott tartományában pontosan  $n$  foton legyen jelen. A (10) valószínűség ismeretében már következtethetünk a fotonnyaláb statisztikus viselkedésére. Következtetéseink levonásához azonban meg kell még határozni a kapott valószínűség-eloszlás várható értékét és szórását; szükségünk lesz továbbá a  $v_z(n)$  valószínűség  $z \rightarrow \infty$  ( $zv = \text{const.}$ ) határátmenettel adódó alakjára. Ha az olvasó a (14) és (15) végképleteket igazolás nélkül elfogadja, az apró betűs szakaszban közölt számításokat átugorhatja.

### Várható érték, szórás és a határátmenet

A  $z$  elemi cellát magában foglaló fázistartományban a fotonszám várható értékét az

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n v_z(n)$$

<sup>3</sup> A (7)-ből (8)-hoz vezető határátmenet analóg a binomiális eloszlástól a Poisson-eloszláshoz vezető határátmenettel [6].

képlet szolgáltatja. Helyettesítsük be ide (10)-et, és alkalmazzuk az  $\alpha = v/(1+v)$  jelölést:

$$\begin{aligned} \bar{n} &= (1-\alpha)^z \sum_{n=0}^{\infty} n \binom{n+z-1}{z-1} \alpha^n = \\ &= \frac{(1-\alpha)^z}{(z-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} (n+z-1)(n+z-2)\dots(n+1) n \alpha^n = \\ &= \frac{(1-\alpha)^z}{(z-1)!} \alpha \sum_{m=z-1}^{\infty} m(m-1)(m-2)\dots(m-z+1) \alpha^{m-z} = \\ &= \frac{(1-\alpha)^z}{(z-1)!} \alpha \left( \frac{d}{d\alpha} \right)^z \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^m = \\ &= \frac{(1-\alpha)^z}{(z-1)!} \alpha \left( \frac{d}{d\alpha} \right)^z \frac{1}{1-\alpha} = \\ &= \frac{z!}{(z-1)!} \alpha \frac{(1-\alpha)^z}{(1-\alpha)^{z+1}} = \\ &= z \frac{\alpha}{1-\alpha}. \end{aligned} \quad (11)$$

Itt felhasználtuk a mértani sor összegképletét:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \alpha^m = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Beírva (11)-be az  $\alpha = v/(1+v)$  jelölést, kapjuk:

$$\bar{n} = zv. \quad (12)$$

A  $(\overline{\Delta n})^2$  szórásnégyzetet a

$$(\overline{\Delta n})^2 = \overline{(n-\bar{n})^2} = \overline{n^2} - \bar{n}^2 = \overline{n(n-1)} - \bar{n}(\bar{n}-1) \quad (13)$$

képlet definiálja. Az  $\overline{n(n-1)}$  várható értéket a (11) mintára elvégzett átalakítások segítségével kapjuk.

$$\begin{aligned} \overline{n(n-1)} &= (1-\alpha)^z \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \binom{n+z-1}{z-1} \alpha^n = \\ &= \frac{(1-\alpha)^z}{(z-1)!} \alpha^2 \left( \frac{d}{d\alpha} \right)^{z+1} \frac{1}{1-\alpha} = (z+1) z v^2. \end{aligned}$$

Ezt az eredményt és (12)-t felhasználva, (13)-ból a szórásnégyzetre

$$(\overline{\Delta n})^2 = \bar{n} \left( 1 + \frac{\bar{n}}{z} \right) \quad (14)$$

adódik.

Érdekes végül megvizsgálni, mi a határértéke a (10) valószínűségnek nagyon sok elemi cellát tartalmazó fázistartomány vagyis  $z \rightarrow \infty$  esetén, ha eközben az  $\bar{n} = zv$  várható értéket rögzítjük. Átalakítjuk (10)-et, alkalmazva a  $\mu = zv$  jelölést:

$$\begin{aligned} v_z(n) &= \frac{(n+z-1)(n+z-2)\dots(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (z-1)} \left( \frac{1}{1+v} \right)^z \left( \frac{v}{1+v} \right)^n = \\ &= \frac{\mu^n}{n!} \left( 1 + \frac{\mu}{z} \right)^{-z} \left( \frac{n-1}{z} + 1 \right) \left( \frac{n-2}{z} + 1 \right) \dots \left( \frac{1}{z} + 1 \right). \end{aligned}$$

Bármely rögzített  $n$ , valamint rögzített  $\mu$  mellett  $z \rightarrow \infty$  esetén  $(1 + \mu/z)^{-z} \rightarrow \exp(-\mu)$ , az utolsó tényezőként álló emeletes tört határértéke pedig 1. A határátmenet eredménye tehát:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} v_z(n) = e^{-\mu} \frac{\mu^n}{n!}, \quad (15)$$

vagyis: (az átlagos fotonszámhoz képest) nagyon sok elemi cellát tartalmazó fázistartományban a fotonszám valószínűség-eloszlása Poisson-eloszlás.

## Következtetések

A levezetett eredmények birtokában megadhatjuk a választ a fényingadozással és korrelációval kapcsolatos felvetett kérdésekre.

Vegyünk először szemügyre egy nyalábot, mely essék egy felfogóberendezésre (2. ábra). A nyaláb  $l$  hosszúságú szakaszában foglalt fotonok a felfogóberendezést egy  $t = l/c$  hosszúságú időközben érik el. A nyaláb  $e$  szakaszához tartozó elemi fáziscellák száma (4) mintájára a  $z = 2l\Delta\nu/c$  alakban írható fel. Ha ide beírjuk  $l = ct$ -t és a  $\tau = 1/\Delta\nu$  reciprok frekvenciaszélességet, az elemi cellák számát a

$$z = 2 \frac{t}{\tau} \quad (16)$$

alakban kapjuk. Ezt (16)-ba helyettesítve a szórásnégyzetre

$$\overline{(\Delta n)^2} = \bar{n} \left( 1 + \frac{1}{2} \bar{n} \frac{\tau}{t} \right) \quad (17)$$

adódik. Ez a képlet jellemzi az  $F$  által egy  $t$  időközben kimutatott fotonszám ingadozásait. A következőkben megmutatjuk, hogy ezek az ingadozások a koherens résznyalábok között korrelációt eredményeznek.

Fordítsuk most figyelmünket a féligáteresztő tükörrel nyert résznyalábok korrelációjának vizsgálatát célzó kísérlet felé (1. ábra). Tegyük fel, hogy adott  $t$  idő alatt az  $F_1$  felfogóberendezés  $n_1$ ,  $F_2$  pedig  $n_2$  foton beérkezését mutatja. (Az egyszerűség kedvéért  $F_1$ -nek,  $F_2$ -nek és  $F$ -nek egységnyi megszólalási valószínűséget tulajdonítunk.) Alkalmazzuk (17)-et  $n_1$ -re és  $n_2$ -re:

$$\overline{(\Delta n_1)^2} = \bar{n}_1 \left( 1 + \frac{1}{2} \bar{n}_1 \frac{\tau}{t} \right), \quad (18)$$

$$\overline{(\Delta n_2)^2} = \bar{n}_2 \left( 1 + \frac{1}{2} \bar{n}_2 \frac{\tau}{t} \right).$$

$F_1$  és  $F_2$  együtt (képzeletben egyetlen  $F$  berendezéssé egyesítve)  $t$  idő alatt összesen  $n = n_1 + n_2$  foton jelez. Ha az  $n = n_1 + n_2$ -t (17)-be helyettesítjük, és felhasználjuk (18)-at, kapjuk:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta n_1 \Delta n_2} &\equiv \overline{(n_1 - \bar{n}_1)(n_2 - \bar{n}_2)} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \overline{(\Delta n)^2} - \overline{(\Delta n_1)^2} - \overline{(\Delta n_2)^2} \right] = \\ &= \frac{\bar{n}_1 \bar{n}_2 \tau}{2t}, \end{aligned} \quad (19)$$

vagyis: a koherens résznyalábokban kimutatott fotonszámok között pozitív korreláció észlelhető. Ez a képlet fejezi ki a *Bevezetésben* leírt Brown–Twiss-effektust. Egy koincidenciakísérletben a pozitív korreláció a koincidenciák számának növekedését eredmé-

nyezi: a véletlen koincidenciák mellett szisztematikus koincidenciák jelentkeznek.

Határozzuk meg a koincidenciák számát. Legyen a koincidenciaszámláló felbontási ideje  $\tau_f$ . Ha  $F_1$  valamely adott  $t_0$  pillanatban jelez egy foton, úgy ezzel az  $n_2$  foton van koincidenciában, amely  $F_2$ -t a  $t_0 - \tau_f$ ,  $t_0 + \tau_f$  időközben éri el. Ha  $F_1$ -re  $2\tau_f$  idő alatt  $n_1$  foton érkezik, úgy  $2\tau_f$  hosszúságú időközre  $n_1 n_2$  ko incidencia esik. Itt feltesszük, hogy  $n_1$  és  $n_2$  az egynél nagyobb értékeket elenyésző valószínűséggel veszi fel, más szóval

$$\bar{n}_1, \bar{n}_2 \ll 1. \quad (20)$$

Valamely  $T (\gg 2\tau_f)$  idő alatt a koincidenciák számának várható értéke eszerint

$$k = \frac{T}{2\tau_f} \bar{n}_1 \bar{n}_2.$$

A  $t = 2\tau_f$  esetre alkalmazott (19) képlet segítségével kapjuk:

$$\begin{aligned} k &= \frac{T}{2\tau_f} \left( \bar{n}_1 \bar{n}_2 + \overline{\Delta n_1 \Delta n_2} \right) = \\ &= \frac{T}{2\tau_f} \bar{n}_1 \bar{n}_2 \left( 1 + \frac{\tau}{4\tau_f} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Leolvashatjuk: az eltűnő korreláció ( $\overline{\Delta n_1 \Delta n_2} = 0$ ) esetében adódó  $k_r = (T/2\tau_f) \bar{n}_1 \bar{n}_2$  számú ko incidenciához, a véletlen ko incidenciákhoz a (19) pozitív korreláció folyamánaképpen  $k_s = (\tau/4\tau_f) k_r$  számú szisztematikus ko incidencia járul. A kétféle ko incidencia számának  $\kappa = k_s/k_r$  viszonyára (19) alapján írható:

$$\kappa = \frac{\overline{\Delta n_1 \Delta n_2}}{\bar{n}_1 \bar{n}_2} = \frac{\tau}{4\tau_f}. \quad (22)$$

Ezzel a képlettel a *Bevezetésben* idézett, az (1) és a (2) feltétel mellett elvégzett kísérletek eredményei láthatóan összhangban vannak.

Könnyen felismerhetjük az (1), (2) feltételek szemléletes jelentését. A (16) képlet mutatja, hogy a nyaláb  $t$  idő alatt beérkező szakaszához  $z = 2t/\tau$  számú elemi cella tartozik. A szisztematikus ko incidenciák relatív számát megadó (22) alatti  $\kappa$  mennyiség eszerint a  $2\tau_f$  kétszeres felbontási időnek megfelelő cellaszám reciproka. Ahhoz, hogy  $\kappa \geq 1$  legyen, a ko incidenciaszámlálónak legalábbis egy elemi cellát fel kell oldania!

Megfontolásaink és számításaink alapján egy fotonnyaláb statisztikus viselkedését, ingadozásait a következőképpen jellemezhetjük. Míg az egy cellára eső átlagos fotonszám kicsi:  $\bar{n}/z \ll 1$ , úgy a fotonszámra jó közelítésben a (15) Poisson-eloszlás érvényes. Ilyenkor (14) szerint a fotonszám ingadozásait kifejező szórásnégyzet a független eseményekre jellemző ( $\overline{(\Delta n^2)} = \bar{n}$ ) alakot ölti, és a koherens résznyalábokban kimutatott  $n_1$ ,  $n_2$  részecskeszámok ( $n_1 + n_2 = n$ ) korrelációja eltűnik:



$$\overline{\Delta n_1 \Delta n_2} = \frac{(\overline{\Delta n})^2 - \overline{(\Delta n_1)^2} - \overline{(\Delta n_2)^2}}{2} =$$

$$= \frac{\bar{n} - \bar{n}_1 - \bar{n}_2}{2} = 0,$$

szisztematikus koincidenciák nem jelentkeznek. A fotonok ilyenkor független részecskék módjára viselkednek, és amint arra a *Bevezetésben* is rámutattunk, alkalmazható a klasszikus részecskekép.

Általában azonban (ha tudniillik az  $\bar{n}/z \ll 1$  feltétel nem teljesül) a fotonok nem tekinthetők független részecskéknek. A fotonszámra a részecskék azonossága figyelembevételével kapott, a Poisson-eloszlástól eltérő (10) valószínűség-eloszlás érvényes, a szórásnégyzet a „normális”  $\bar{n}$  értéknél  $(1 + \bar{n}/z)$ -szer nagyobb. E „hipernormális” szórás következménye a résznyalábokba kimutatott fotonszámok pozitív korrelációja. – A szórásnégyzet  $\bar{n}$  tagjának megfelelő ingadozásokat (utalva az izzókatódók elektronemissziójánál fellépő analóg ingadozásokra) sörétzajnak, az ehhez járuló  $\bar{n}^2/z$  tagot pedig interferencia-zajnak nevezhetjük. Megjegyezzük, hogy *Vavilov* fényingadozás-kísérleteiben [7] a sörétzajt figyelték meg.

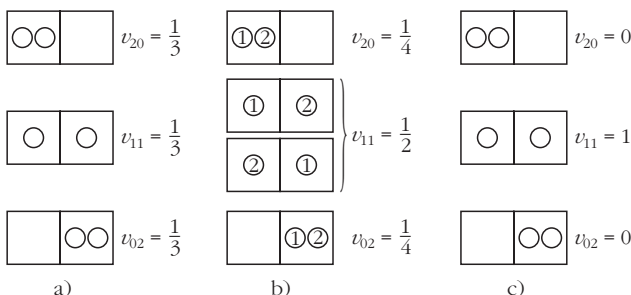
Az, hogy a  $v_z(n)$  eloszlás és a hozzátartozó,

$$\overline{(\Delta n)^2} = \bar{n} + \frac{\bar{n}^2}{z}$$

szórásnégyzet alakja függ  $z$ -től, vagyis attól, hogy a nyaláb szemügyre vett szakaszához tartozó fázisstartomány hány  $b$  nagyságú elemi cellát tartalmaz, mutatja, hogy a vizsgált ingadozási és korrelációs jelenségeket – a részecskekép keretei között szemlélve – jellegzetesen kvantumos effektusnak kell tekintenünk.

Milyen szemléletes kép kapcsolható a fotonok „hipernormális” ingadozásaihoz? Könnyű belátni, hogy azonos részecskék esetében nagyobb annak a valószínűsége, hogy két (vagy több) részecske ugyanazon elemi cellába kerüljön, mint megkülönböztethető klasszikus részecskék esetén (példaként lásd a

4. ábra. a) Fotonok különböző lehetséges elhelyezkedései két kvantumcellában, a részecskék azonosságának figyelembevételével. b) Klasszikus (megkülönböztethető) részecskék lehetséges elhelyezkedései két kvantumcellában. Az a) és b) ábrákat összevetve látjuk: annak valószínűsége ( $v_{20}$ , illetve  $v_{02}$ ), hogy két részecske ugyanabba a cellába kerüljön, azonos részecskékre nagyobb, mint a klasszikus esetben. c) Elektronok esetében a részecskék azonossága mellett érvényesül a Pauli-féle kizárási elv is. Így annak valószínűsége, hogy egy cellába egynél több részecske kerüljön, eltűnik:  $v_{20} = v_{02} = 0$ .



4.a, b ábrát). A részecskék azonossága kedvez annak, hogy egy elemi cellában több foton tömörüljön: a fotonok „kedvelik” egymás társaságát. Ez a tömörülési tendencia eredményezi a hipernormális ingadozásokat.

Jobban bepillantathatunk a jelenség fizikai hátterébe, ha tekintetbe vesszük a részecskék (fotonok) hullámtermészetét: az elemi fáziscella fogalma így mélyebb szemléletes tartalmat nyer. Egy elemi cella kiterjedése a koordinátatengely mentén  $\Delta x = b/\Delta p = c/\Delta \nu = c\tau$ . A  $\tau$  reciprok vonalszélesség a fotont kibocsátó atom átlagos élettartamát, vagyis a sugárzás időtartamát jellemzi. Ennek megfelelően  $\Delta x = c\tau$  a kibocsátott hullámvonulat hosszára jellemző. A sugárnyaláb  $l$  hosszúságú szakaszához tartozó  $l\Delta p$  fázisstartomány eszerint annyi  $\Delta x\Delta p = b$  nagyságú elemi cellát tartalmaz, ahány (adott polarizációjú) hullámvonulat az  $l$  szakaszon számottevő átfedés nélkül elhelyezhető. A most felismert „cellák száma = átfedés nélkül elhelyezhető hullámvonulatok száma” kapcsolat alapján megállapíthatjuk:

Az  $\bar{n}/z \ll 1$  esetben a fotonokhoz rendelt hullámvonulatok ritkásan érkeznek, közöttük nincs számottevő átfedés. A *Bevezetésben* megállapítottuk, hogy ilyenkor a nyaláb független részecskék nyalábjaként viselkedik. Ezzel összhangban van az  $\bar{n}/z \ll 1$  határesetben talált (15) eredmény, amely szerint a fotonszámra a Poisson-eloszlás érvényes, a szórás normális, a korreláció pedig eltűnik.

Az  $\bar{n}/z \geq 1$  esetben, midőn egy cellába számottevő valószínűséggel kerülhet egynél több foton is, a hullámvonulatok jelentékeny mértékben átfedik egymást és interferencia jön létre. Ilyenkor tér el a fotonszám-eloszlás a Poisson-eloszlástól, a szórás hipernormálisá válik, és ennek folyamánaképpen fellép a pozitív korreláció. Levonhatjuk ebből a következtetést: a hipernormális ingadozásokat (az interferencia-zajt) valóban az interferencia, a hullámvonulatok átfedése eredményezi.

## Függelék

Ha fotonok helyett elektronok statisztikus viselkedését vizsgáljuk, a részecskék azonosságán kívül figyelembe kell vennünk a Pauli-elvet, amely szerint egy elemi cellát legfeljebb egy részecske foglalhat el. Ekkor a részecskeszám valószínűség-eloszlására (10) helyett

$$v_z(n) = \binom{z}{n} (1-v)^{z-n} v^n, \quad (0 \leq n \leq z)$$

adódik, a szórásnégyzet pedig

$$\overline{(\Delta n)^2} = \bar{n} \left(1 - \frac{\bar{n}}{z}\right). \quad (*)$$

Ha  $z v = \bar{n} = \text{const.}$  mellett elvégeztük a  $z \rightarrow \infty$  határátmenetet, most is megkapjuk a Poisson-eloszlást.

Mint (\*) mutatja, most a  $\overline{(\Delta n)^2}$  szórás kisebb, mint a „normális”  $n$  érték; ennek folyamánaképpen koherens résznyalábokban kimutatott elektronok között negatív korreláció lép fel.

A magyarázat kézenfekvő. Láttuk, hogy a fotonok „szívesen” tömörülnek össze többen egy elemi cellában: ez vezetett a hipernormális ingadozásokhoz. Az elektronok esetében a Pauli-elv éppen az ilyen tömörülést tiltja meg (4.c ábra). Ha a fotonokat „társaságkedvelők”-nek nevezték, az elektronokra a „magánykedvelők”

jelző illik. Természetüknek ez a vonása magyarázza, hogy ingadozásaik a normális érték alatt maradnak, és ha az *1. ábra* koincidenckiakísérletét elektronokkal végeznénk el, a (2) feltétel teljesülése mellett a függetlenség feltevése alapján várható (véletlen) koincenciaszámnál is kevesebb koincidenckiát kapnánk.

#### Irodalom

1. A. Ádám, L. Jánossy, P. Varga, *Acta Phys. Hung.* 4 (1955) 301; lásd még: Jánossy L., Náray Zs., *Fiz. Szemle* 8 (1958) 3.
2. E. Brannen, H. I. S. Fergusson, *Nature* 178 (1956) 481.
3. R. Hanbury Brown, R. Q. Twiss, *Nature* 177 (1956) 27; R. Q. Twiss, A. G. Little, R. Hanbury Brown, *Nature* 180 (1957) 324.
4. L. Jánossy, *Il Nuovo Cimento* 6 (1957) 111; 12 (1959) 369; G. Graff, L. Jánossy, *Acta Phys. Hung.* 10 (1959) 291.
5. E. M. Purcell, *Nature* 178 (1956) 1449.
6. Rényi A.: *Valószínűesszámitás*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.
7. S. I. Wawilow: *Die Mikrostruktur des Lichtes*. Akademie-Verlag, Berlin, 1954.