LISSAJOUS-GÖRBÉK ELŐÁLLÍTÁSA FERDESZÖGŰ REZGÉSEK EGYMÁSRA TEVŐDÉSÉVEL

Inczeffy Szabolcs Zsombor
Ócsai Bolyai János Gimnázium

Lissajous-görbék

Ismeretes, hogy a Lissajous-görbék merőleges rezgések egymásra tevődéseként jönnek létre. A rezgések amplitúdóját, frekvenciáját, illetve kezdőfázisát változtatva különböző méretű és alakú látványos görbéket, alakzatokat kapunk.

A *GeoGebra* (ingyen letölthető) számítógépes program segítségével a Lissajous-görbe a két rezgés egymásra tevődésének nyomvonalaként jön létre.

Az *1.* és *2. ábrákon* látható P pont helyzetét meghatározó $\boldsymbol{p}$ vektor a $\boldsymbol{p}_1$ és a $\boldsymbol{p}_2$ vektorok összege. A $\boldsymbol{p}_1$ és $\boldsymbol{p}_2$ vektorok hosszát és irányítását a

$$p_1 = A_1 \cos(2\,\pi\, f_1\, t) = A_1 \sin\left(2\,\pi\, f_1\, t + \frac{\pi}{2} + \varphi_1\right)$$

és a

$$p_2 = A_2 \sin(2\,\pi\, f_2\, t + \varphi_2)$$

rezgés (kitérés) egyenletek határozzák meg. Ahol A_1 és A_2 a rezgések legnagyobb kitérését, f_1 és f_2 a rezgésszámokat, t az időt, φ_1 és φ_2 a kezdőfázisokat jelölik.

A $\boldsymbol{p}$ vektor nagyságát Pitagorasz tételével a

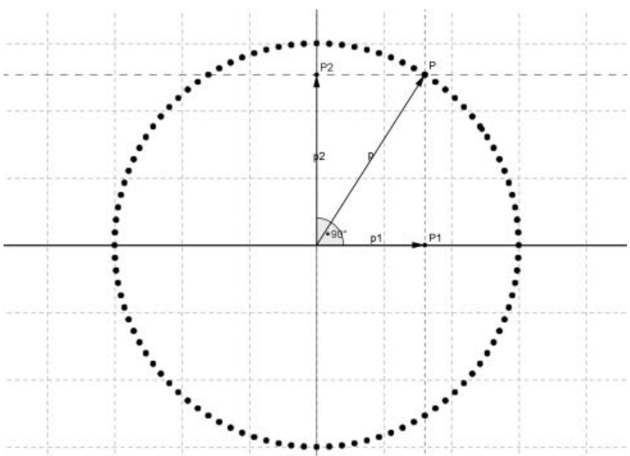
$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$$

összefüggésből számolhatjuk ki, míg irányát a

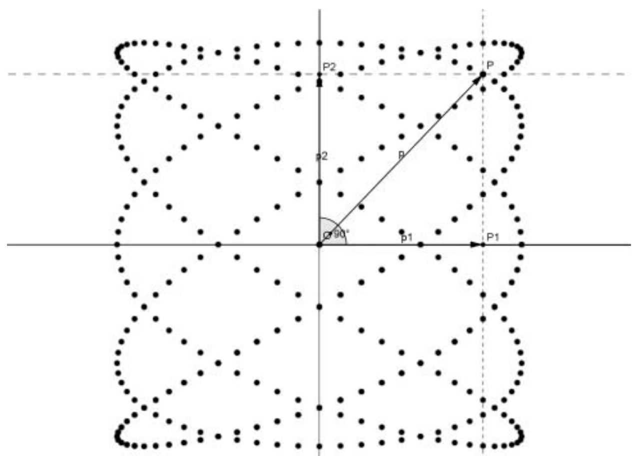
$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{p_2}{p_1} \;\Rightarrow\; \varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

képlettel határozhatjuk meg!

1. ábra. f_1:f_2 = 1:1 rezgésszámarányú Lissajous-görbe.

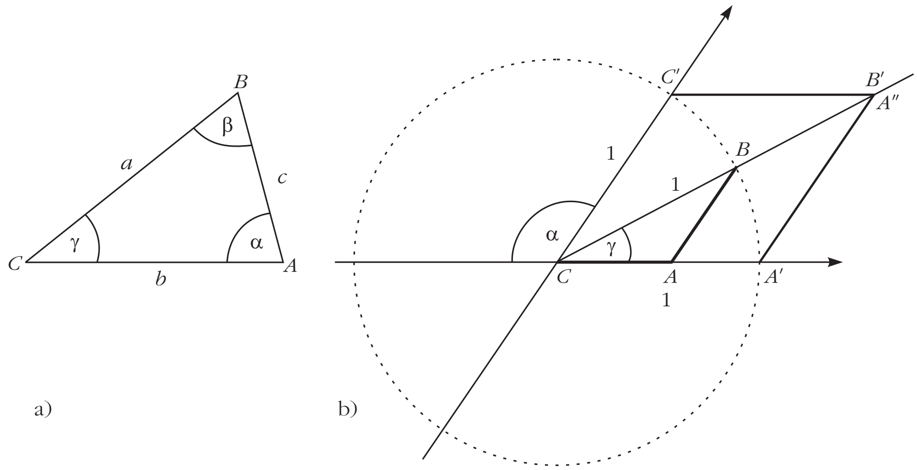


2. ábra. f_1:f_2 = 5:3 rezgésszámarányú Lissajous-görbe.



Sajátos esetben, ha $A_1 = A_2$, $f_1 = f_2$ és $\varphi_1 = \varphi_2$, akkor a nyomvonal egy kör (*1. ábra*), ha $A_1 = A_2$, $\varphi_1 = \varphi_2$ és $f_1 \neq f_2$, de a rezgésszámok úgy aránylanak egymáshoz, mint a természetes számok ($f_1 : f_2 = n_1 : n_2$), akkor a *2. ábrához* hasonló görbét kapunk.

A következőkben megvizsgáljuk a Lissajous-görbék előállítását egymással ferde szöget bezáró rezgések összegeként. Ehhez szükségünk lesz az általános háromszögben, illetve a trigonometrikus (egység sugarú) körben értelmezett általános szögfüggvényekre.



3. ábra. a) általános háromszög és b) egységsugarú (trigonometrikus) kör.

Általános szögfüggvények

Az általános szögfüggvények definíciói

A hagyományos szögfüggvényeket derékszögű háromszögben szokás értelmezni, illetve az egységnyi sugarú kör segítségével az értelmezést tetszőleges (forgás) szögekre is ki lehet terjeszteni.

Felvetődik a kérdés, hogy tovább lehet-e általánosítani a szögfüggvényeket, azaz az általános háromszögben lehet-e általános (alakú) szögfüggvényeket értelmezni? A válasz igen, sőt bizonyos esetekben az általános szögfüggvényeket előnyösebben lehet használni, mint egyéb tételeket, de lássuk miről is van szó!

Az általános háromszögben (*3.a ábra*), a szokásos jelöléseket használva és az α-t tekintve alapszögnek, a következő szögfüggvényeket értelmezhetjük:

$$\sin_\alpha\gamma = \frac{c}{a}, \quad \cos_\alpha\gamma = \frac{b}{a},$$

$$\mathrm{tg}_\alpha\gamma = \frac{c}{b}, \quad \mathrm{ctg}_\alpha\gamma = \frac{b}{c},$$

ha $\alpha+\gamma \neq 0°$. Természetesen α, β, $\gamma \neq 0°$ vagy 180° és $\alpha+\beta+\gamma = 180°$, illetve $a, b, c \neq 0$.

Ha $\alpha = 90°$, akkor visszakapjuk a hagyományos szögfüggvényeket, például $\sin_{90°}\gamma = \sin\gamma$.

Általánosabb definíciókat a trigonometriai (egységnyi sugarú) kör segítségével adhatunk meg: ha $|CB| = |CA'| = |C'A''| = 1$, akkor a *3.b ábra* szerint (a szakaszok valójában előjeles szakaszok):

$$\sin_\alpha\gamma = AB, \quad \text{ahol } \alpha \neq k \cdot 180°,$$

$$\cos_\alpha\gamma = CA, \quad \text{ahol } \alpha \neq k \cdot 180°,$$

$$\mathrm{tg}_\alpha\gamma = A'B', \quad \text{ahol } \gamma \neq -\alpha + k \cdot 180°,$$

$$\mathrm{ctg}_\alpha\gamma = C'A'', \quad \text{ahol } \gamma \neq k \cdot 180° \text{ és } k \text{ egész szám.}$$

Egy adott háromszög esetén a definíciók segítségével könnyen bizonyíthatók a következő összefüggések:

$$\mathrm{tg}_\alpha\gamma = \frac{1}{\mathrm{ctg}_\alpha\gamma} = \frac{\sin_\alpha\gamma}{\cos_\alpha\gamma},$$

illetve

$$\sin_\alpha\gamma = \frac{1}{\sin_\gamma\alpha} = \cos_\alpha\beta = \frac{1}{\cos_\gamma\beta} =$$

$$= \mathrm{tg}_\beta\gamma = \frac{1}{\mathrm{tg}_\beta\alpha} = \mathrm{ctg}_\beta\alpha = \frac{1}{\mathrm{ctg}_\beta\gamma}.$$

A szögeket megfelelően felcserélve még öt, a fentiekhez hasonló, összefüggést tudunk felírni.

Az általános szögfüggvények kiszámítása

A szinusztétel segítségével könnyen igazolható, hogy

$$\sin_\alpha\gamma = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha},$$

de ennél több is igaz:

$$\sin_\alpha\gamma = \frac{\sin_\delta\gamma}{\sin_\delta\alpha}.$$

Ez az összefüggés az alapszög változtatását teszi lehetővé. Továbbá igaz, hogy

$$\cos_\alpha\gamma = \sin_\alpha\beta = \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha},$$

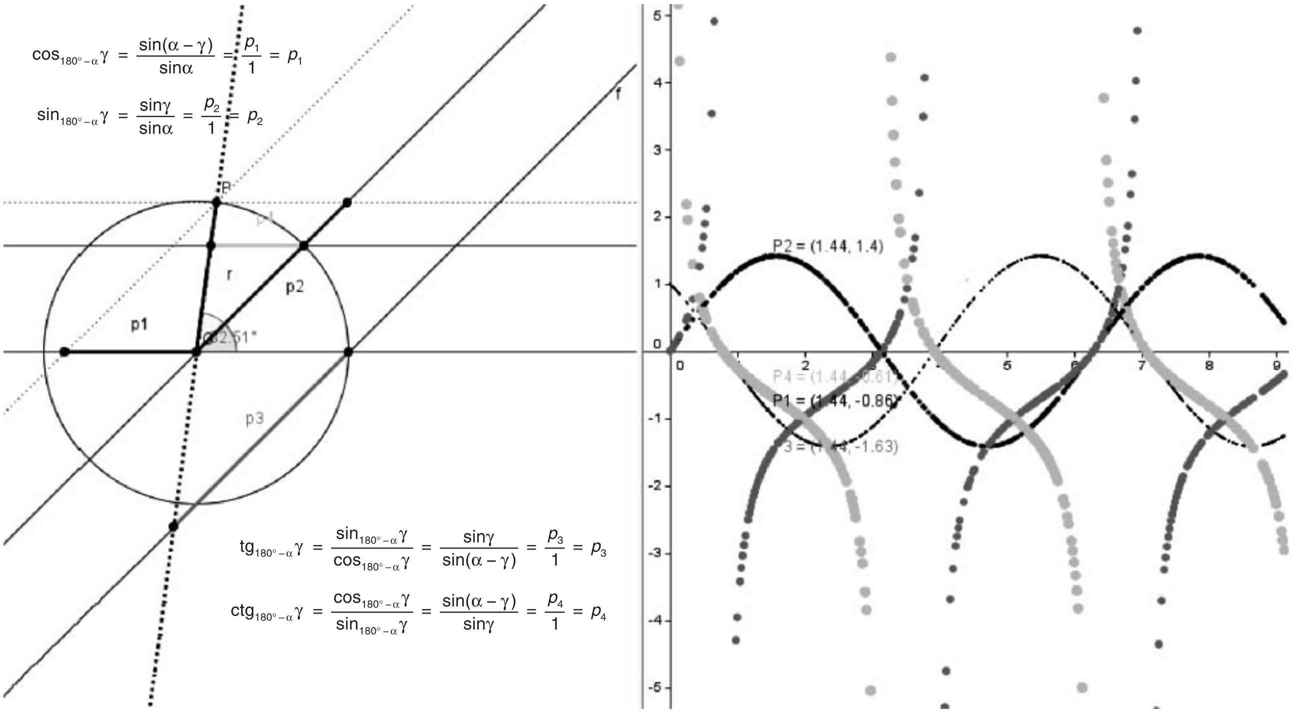
$$\mathrm{tg}_\alpha\gamma = \frac{\sin_\alpha\gamma}{\cos_\alpha\gamma} = \frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)} \quad \text{és}$$

$$\mathrm{ctg}_\alpha\gamma = \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\gamma}.$$

A bizonyítások és az általános szögfüggvények egyéb tulajdonságai az irodalomjegyzékben megtalálhatók.

Lássunk egy példát, számítsuk ki a $\mathrm{tg}_{45°}45°$ értékét! A fenti összefüggés segítségével:

$$\mathrm{tg}_{45°}45° = \frac{\sin 45°}{\sin(45° + 45°)} = \frac{\sin 45°}{\sin 90°} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



4. ábra. Az α = 45°-os alapszögű szögfüggvények grafikus képei.

A programozható számológépek vagy a számítógépek segítségével könnyen kiszámítható az értelmezési tartományon belüli tetszőleges szög tetszőleges alapú szögfüggvényértéke.

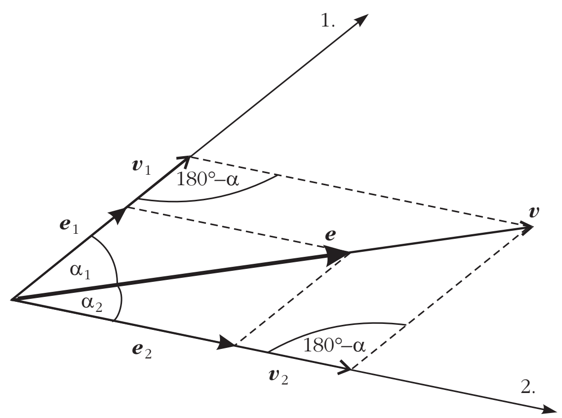
Grafikus kép

Az általános szögfüggvények grafikus képei hasonlók a 90°-os alapszögűekéhez, csak az értékhelyek és az értékek mások. Az *4. ábrán* az α = 45°-os alapszögű szögfüggvények grafikus képei nyomvonalként ábrázolva láthatók.

Alkalmazás

A továbbiakban vizsgáljuk meg az általános szögfüggvények alkalmazását a vektorok ferdeszögű koordináta-rendszerben történő felbontásakor keletkezett kontravariáns koordináták kiszámítására (*5. ábra*)!

5. ábra. A $\boldsymbol{v}$ vektor felbontása két egymással α szöget bezáró irány szerint.



Az 1., illetve 2. irányokba eső egységvektorok $\boldsymbol{u}_1$, illetve $\boldsymbol{u}_2$, így a $\boldsymbol{v}$ vektor irányába eső $\boldsymbol{e}$ egységvektor:

$$\boldsymbol{e} = \cos_{180°-\alpha}\alpha_1\,\boldsymbol{u}_1 + \cos_{180°-\alpha}\alpha_2\,\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,$$

ahol $\boldsymbol{e}_1$ és $\boldsymbol{e}_2$ az $\boldsymbol{e}$ egységvektor 1., illetve 2. irányba eső összetevő vektorai. A $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, ahol $\boldsymbol{v}_1 = v_1\boldsymbol{u}_1$ és $\boldsymbol{v}_2 = v_2\boldsymbol{u}_2$. A kontravariáns koordinátákra, pedig a $v_1 = v\cos_{180°-\alpha}\alpha_1$ és a $v_2 = v\cos_{180°-\alpha}\alpha_2$ összefüggéseket írhatjuk fel. Könnyen ellenőrizhető, hogy α = 90° esetben, vagyis derékszögű koordináta-rendszerben, visszakapjuk a szokásos koordinátákat.

Látható tehát, hogy a kontravariáns koordináták felírása (kiszámítása) olyan egyszerűvé válik, mint derékszögű koordináta-rendszer esetén.

Lissajous-görbék ferdeszögű koordináta-rendszerben

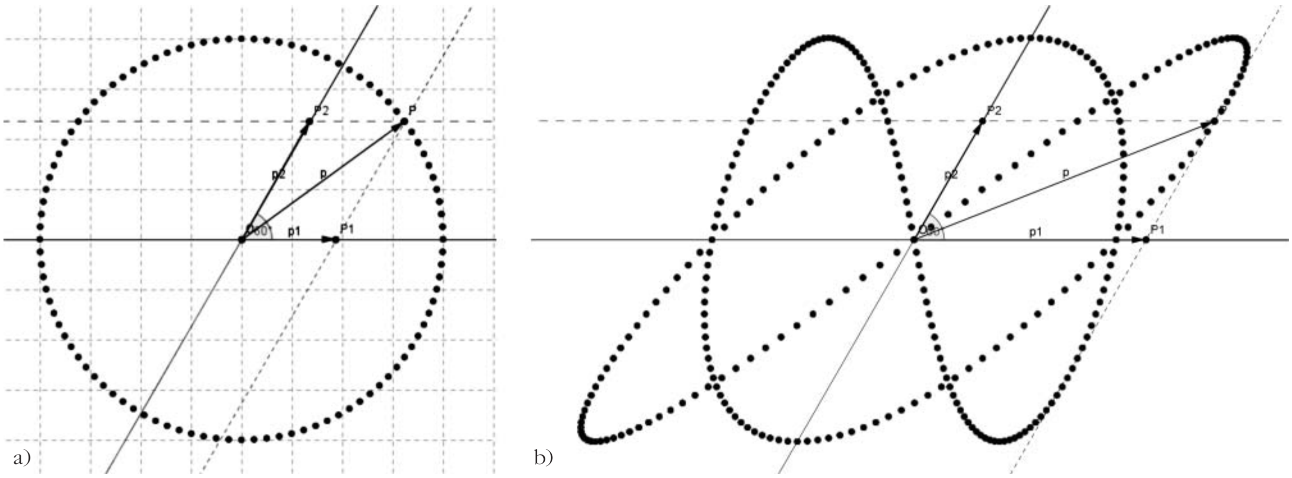
Az általános szögfüggvények, illetve a GeoGebra utolsó alkalmazásaként vizsgáljuk meg az egymással ferde szöget ($\alpha \neq 90°$) bezáró rezgések egymásra tevődését, amely a Lissajous-görbékhez hasonló görbék előállítását teszi lehetővé!

A P pont nyomvonalát továbbra is a $\boldsymbol{p}_1$ és a $\boldsymbol{p}_2$ vektorok összege határozza meg. A $\boldsymbol{p}_1$ és a $\boldsymbol{p}_2$ vektorok hosszát és irányát a

$$p_1 = A_1\cos_{\pi-\alpha}(2\pi f_1 t + \varphi_1) =$$

$$= A_1\frac{\sin(2\pi f_1 t + \pi - \alpha + \varphi_1)}{\sin(\pi-\alpha)} =$$

$$= A_1'\sin(2\pi f_1 t + \pi - \alpha + \varphi_1),$$



6. ábra. a) az f_1:f_2 = 1:1 és b) az f_1:f_2 = 2:3 rezgésszámarányú Lissajous-görbéhez hasonló görbe.

valamint a

$$p_2 = A_2 \sin_{\pi-\alpha}(2\pi f_2 t + \varphi_2) =$$

$$= A_2 \frac{\sin(2\pi f_2 t + \varphi_2)}{\sin(\pi - \alpha)} = A_2' \sin(2\pi f_2 t + \varphi_2)$$

rezgés (kitérés) egyenletek határozzák meg, ahol az

$$A_1' = \frac{A_1}{\sin(\pi - \alpha)} \text{ és az } A_2' = \frac{A_2}{\sin(\pi - \alpha)}$$

a legnagyobb kitérések. A $\boldsymbol{p}$ vektor nagyságát a koszinusztétel (általános Pitagorasz-tétel) segítségével, a

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - 2\, p_1 p_2 \cos\alpha}$$

összefüggésből számolhatjuk ki, míg a vektor irányát a

$$\mathrm{tg}_{\pi-\alpha}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)} = \frac{p_2}{p_1}$$

képletből (egyenletből) határozhatjuk meg.

Sajátos esetben, ha $A_1 = A_2$, $f_1 = f_2$ és $\varphi_1 = \varphi_2$, akkor a nyomvonal egy kör (*1. ábra*), ha $A_1 = A_2$, $\varphi_1 = \varphi_2$ és $f_1 \neq f_2$, de a rezgésszámok úgy aránylanak egymáshoz, mint a természetes számok (f_1:f_2 = n_1:n_2), akkor a *2. ábrához* hasonló görbét kapunk (*6.a* és *6.b ábra*).

Irodalom

1. Budó Á.: *Kísérleti fizika II.,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.
2. Inczeffy Sz.: A trigonometrikus függvények általános alakjai. *A matematika tanítása 3/3* (1995).
3. Inczeffy Sz.: *A GeoGebra számítógépes program felhasználása, Lissajous-görbék előállítására derékszögű, illetve ferdeszögű rezgések egymásra tevődéseként.* Műhelyvezetés az 58. Országos Fizikatanári Ankét és Eszközbemutatón, Hévíz, 2015.