

# A BOSE–EINSTEIN-KONDENZÁCIÓTÓL AZ ATOMLÉZERIG

Szépfalusy Péter

ELTE TTK, Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék,  
MTA Szilárdtestfizikai és Optikai Kutatóintézet

Csordás András

MTA–ELTE Statisztikus Fizikai Kutatócsoport

## Történeti áttekintés<sup>1</sup>

1924-ben Bose egy új típusú statisztikát vezetett be fotónokra és annak segítségével származtatta Planck 1900-ban felállított formuláját az eloszlásfüggvényre. Bose statisztikáját Einstein általánosította tömeggel rendelkező részecskékre.<sup>2</sup> Einstein felismerte, hogy rögzített  $N$  részecskeszámú bozont tartalmazó rendszerben létezik egy  $T_c$  kritikus hőmérséklet, amely alatt a termodinamikai határesetben a részecskék véges  $N_0/N$  hányada foglalja el a legalacsonyabb energiájú állapotot. Einstein az ideális gázt vizsgálta és azt találta, hogy

$$N_0(T) = N_0(0) \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{\frac{3}{2}} \right], \quad T \leq T_c. \quad (1)$$

Nyitott kérdés maradt, hogy a jelenség miként módosul a részecskék közötti kölcsönhatás következté-

ben. London volt az első, aki egy kísérletileg megvalósított fázisátalakulásról, nevezetesen a héliumfolyadékban szuperfolyékony állapotra vezető fázisátalakulásról, 1938-ban feltételezte, hogy Bose–Einstein típusú kondenzáció eredménye. Másrészt viszont a szuperfolyékony állapot tulajdonságainak Landau által kidolgozott fenomenologikus elmélete (1941), amely a jelenségek egész skálájáról számot tudott adni, nem támaszkodott ilyen feltevésre. Csak Bogoliubov 1947-ben közzétett, ritka Bose-gázra alkalmazható elmélete nyitotta meg az utat a Bose–Einstein-kondenzációt feltételező, az ötvenes évek végétől óriási fejlődést felmutató mikroszkopikus elmélet és a Landau-féle fenomenologikus elmélet összekapcsolása előtt [1].

Az is kiderült azonban, először O. Penrose és L. Onsager [2] számítása szerint (1956-ban), hogy a He-atomok közötti viszonylag erős kölcsönhatás és a gázokéhoz képest a héliumfolyadék igen nagy sűrűsége miatt a Bose–Einstein-kondenzátumban lévő részecskék száma még zérus hőmérsékleten is csak a teljes részecskeszám kevesebb, mint 10%-át teszi ki. Problémát jelentett, hogy a kondenzátum létezésének meggyőző kísérleti kimutatása nagy akadályokba ütközött. Végül is a kondenzátum nagyságának közvetlen mérése csak 1998-ban, Wyattnak sikerült [3], ami az említett elméleti értékkel jól egyező eredményre vezetett.

Olyan Bose–Einstein-kondenzátum létrehozása, amely a rendszert alkotó atomok nagy részét tartalmazza sokáig reménytelen feladat maradt a várható rendkívül alacsony kritikus hőmérséklet miatt. A kritikus hőmérséklet megbecsléséhez használjuk fel a

Bakos J., Sörlei Zs., Varró S. (szerk.): *Fény-anyag kölcsönhatás, kvantumoptika. Az 5. Kvantumelektronikai Tavaszi Iskolán elhangzott előadások anyaga* című kötetben, 2000-ben megjelent cikk újraközlése.

Az ilyen témájú hazai kutatásokat az FKFP0159/1997, az OTKA T017493, T029552, F020094 pályázatok és az MTA–DFG 95. számú projektje részben támogatták.

<sup>1</sup> Az áttekintés atomok Bose–Einstein-kondenzációjára korlátozódik, és nem tér ki olyan fontos kapcsolatokra, mint a szupravezető állapot kialakulása, vagy az excitonok gázában bekövetkező fázisátalakulás.

<sup>2</sup> Az ilyen statisztikát követő részecskéket később nevezték el bozonoknak, amelyekről kiderült, hogy spinjük  $\hbar$  egész számú többszöröse lehet. E tekintetben nem követjük az időrendet és a következőkben használjuk a bozon elnevezést.

homogén, nem-kölcsönható gáz modelljét! Vezessük be a termikus de Broglie-hullámhosszt

$$\lambda_{dB} = \left( \frac{2\pi\hbar^2}{m k_B T} \right)^{1/2},$$

ahol  $m$  az atom tömege. Jelöljük a részecskesűrűséget  $n$ -nel! A nem-kölcsönható modell szerint Bose–Einstein-kondenzáció lép fel, ha  $\lambda_{dB}$  összemérhető az átlagos részecsketávolsággal, pontosabban:

$$n\lambda_{dB}^3 > 2,6 \quad g; \quad g = 2s + 1,$$

s a részecske spinje, amiből  $T_c$ -re kapjuk, hogy

$$T_c = 0,53 \frac{2\pi\hbar^2}{m k_B} \left( \frac{n}{g} \right)^{2/3}.$$

A részecskék közötti átlagos távolságot  $10^{-4}$  cm-re becslve (ami a kölcsönhatás feltételezett kis befolyásával összhangban van, hiszen az  $10^{-6}$  cm nagyságrendű hatótávolsággal rendelkezik)  $T_c$ -re  $\mu\text{K}$ -nél lényegesen alacsonyabb érték adódik. A  $T_c$  alatti jelenségek tanulmányozásához tehát igen alacsony hőmérsékletek elérése szükséges. Frontáttörést jelentett, hogy atomok gőzeit lézer segítségével  $\mu\text{K}$  hőmérséklet alá sikerült hűteni a '80-as években. Ez irányú eredményeikért *Steven Chu*, *Claude Cohen-Tannoudji* és *Bill Phillips* megkapta 1997-ben a Nobel-díjat. A hűtési folyamatot a mágneses csapdába zárt gáz párologtatásával tovább folytatva, 1995-ben létrehozták az első Bose–Einstein-kondenzátumot. Ez az eredmény robbanásszerű fejlődést indított el, ami a jelenségben rejlő hatalmas alap- és alkalmazási lehetőségekkel magyarázható.

## Bose–Einstein-kondenzáció létrehozása gázokban

Az első három sikeres kísérlet *Eric Cornell* csoportjában a JILA-ban (Joint Institute for Laboratory Astrophysics) [4]  $^{87}\text{Rb}$ -mal, *Randy Hulet* csoportjában a Rice Egyetemen (Houston, Texas)  $^7\text{Li}$ -mal [5], illetve *Wolfgang Ketterle* csoportjában az MIT-n  $^{23}\text{Na}$ -mal történt [6]. Azóta számos kutatóhelyen sikerült kondenzátum létrehozása (Rowland Institute  $^{23}\text{Na}$ , Yale  $^{87}\text{Rb}$ , Texas  $^{87}\text{Rb}$ , Konstanz  $^{87}\text{Rb}$ , München  $^{87}\text{Rb}$ , NIST Gaithersburg  $^{23}\text{Na}$ , Paris  $^{87}\text{Rb}$ , Orsay  $^{87}\text{Rb}$ , Hannover  $^{87}\text{Rb}$ , Otago  $^{87}\text{Rb}$ , Sussex  $^{87}\text{Rb}$ ). Újabb fejlemény, hogy 1998-ban *Kleppneréknek* az MIT-ban hidrogéngáz esetében sikerült kondenzátum kimutatása. Jelenleg intenzív kutatások folynak káliummal (Olaszország), a hélium triplétt (metastabil) állapotával (Hollandia), illetve – a nagy technikai nehézségek miatt mérsékelt intenzitással – céziummal.

A kölcsönhatást az  $s$ -hullámú szórási hosszal jellemezhetjük az itt előforduló igen alacsony energiákon, és ennek előjelétől függően beszélünk taszító, illetve vonzó kölcsönhatásról. A Rice Egyetemen végzett

kísérlet érdekességét az adja, hogy a  $^7\text{Li}$  atomok között a kölcsönhatás vonzó. Homogén rendszerben ilyenkor Bose–Einstein-kondenzáció nem léphet fel, mert a kondenzátum mechanikailag instabil. Csapdában tartott atomok esetében azonban a kísérlet szerint lehetséges Bose–Einstein-kondenzátumot létrehozni, de csak egy kritikus részecskeszám alatt ( $N_0 \sim 1000$ ) a kondenzátumban. A továbbiakban azonban a vonzó kölcsönhatás esetével nem foglalkozunk.

Röviden ismertetjük a legelső kísérletben használt berendezés és eljárás jellemzőit. A [4] kísérletben lézerral  $\sim\mu\text{K}$ -re lehűtött, magneto-optikai csapdába zárt  $^{87}\text{Rb}$  atomok gázának hőmérsékletét párologtatásos hűtéssel tovább csökkentették. Ez a technika igen alkalmas alkáli atomok gázában, mivel azok jól hűthetőek és befogathatók lézerral, valamint alkáliakra a szórási hatáskeresztmetszet nagy, ami kedvező a párologtatásos hűtéshez.

$^{87}\text{Rb}$ -ban egy elektron van a külső héjon, így az atom teljes impulzusmomentumát az elektron  $1/2$  spinje adja. A magspin  $3/2$ . Ennek megfelelően az atom teljes spinje  $F = 2$  és  $F = 1$  lehet. Az atom eredő  $\mu_m$  mágneses momentumát azonban lényegében az elektron mágneses momentuma határozza meg, ami ellentétes irányú az elektron spinjével. Mágneses térben az atomi szintek  $2F+1$  nívóra hasadnak fel (Zeeman-felhasadás). A [4] kísérletben két, úgynevezett anti-Helmholtz tekercssel kvadrupól mágneses teret hoztak létre az atomok befogására. Ez a tér a csapda közepétől távolodva növekszik. Ezért a mágneses csapdába befogható atomok azok, amelyek gyenge mágneses teret keresnek, azaz állapotaik  $F = 2$ ,  $m_F = 2, 1$ , illetve  $F = 1$ ,  $m_F = -1$ . A csapda közepén a potenciál viselkedése kedvezőtlen, mert ott nagy a spinátfordulás valószínűsége. Ezért transzverzálisan egy kicsiny, forgó mágneses teret szuperponáltak a kvadrupól térre, amelynek paramétereit úgy állították be, hogy az atomok mozgásuk során gyakorlatilag az időben kiátlagolt teret érezzék (TOP-trap: Time Orbiting Potential). Így sikerült a kvadrupól tér közepén lévő „lyukat” betömni. A kísérletben az  $F = 2$ ,  $m_F = 2$  állapotot választották. A mágneses momentum mindenütt a mágneses tér irányába lett beállítva, így az atomok számára a csapda egy helytől függő potenciállal volt leírható. Ez a csapdapotenciál igen jó közelítéssel harmonikus potenciálnak vehető, nem csak ebben a kísérletben, hanem valamennyi kísérleti elrendezésnél. Az energiaviszonyok jellemzésére megjegyezzük, hogy az  $F = 2$  és  $F = 1$  hiperfinom nívók közti különbség GHz rendű, míg az alkalmazásra kerülő mágneses terekben a Zeeman-felhasadás nagyságrendje MHz.

## Nem-kölcsönható bozonok harmonikus potenciálban

A mágneses csapdák közös jellemzője, hogy a potenciál igen jó közelítéssel

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2} m \omega_y^2 y^2 + \frac{1}{2} m \omega_z^2 z^2. \quad (2)$$

A Bose–Einstein-kondenzációra vezető fázisátalakulás természetének bemutatásához először tekintsünk el az atomok közti kölcsönhatástól. A legegyszerűbb tárgyalást a nagykanonikus sokaság teszi lehetővé. Kritikus hőmérséklet felett a részecskék átlagos száma:

$$N = \sum_{n_x, n_y, n_z} \frac{1}{\exp[\beta(\epsilon_{n_x, n_y, n_z} - \mu)] - 1}, \quad (3)$$

ahol a szokásos jelölést használtuk:  $\beta$  az inverz hőmérséklet és  $\mu$  a kémiai potenciál. Az atomok energiaszintjei az (2) potenciálban:

$$\epsilon_{n_x, n_y, n_z} = \left(n_x + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_x + \left(n_y + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_y + \left(n_z + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_z, \quad (4)$$

Látható, hogy  $\epsilon_{n_x, n_y, n_z} > \mu$  egyenlőtlenségnek kell teljesülnie ahhoz, hogy (3) értelmes legyen. Rögzített  $N$  mellett  $\mu$  a hőmérséklettől függ, és a  $0 \leq T \leq T_c$  hőmérséklet-tartományban

$$\mu \approx \mu_c = \hbar \frac{\omega_x + \omega_y + \omega_z}{2}.$$

Ekkor

$$N = N_0 + \sum_{n_x, n_y, n_z \neq 0} \frac{1}{\exp[\beta \hbar(\omega_x n_x + \omega_y n_y + \omega_z n_z)] - 1} \quad (5)$$

alakot célszerű használni, ahol az alapállapotban lévő részecskék számát,  $N_0$ -t különválasztottuk. Ezek alkotják a Bose–Einstein-kondenzátumot. (5)-ben a diszkrét értékekre való összegzést integrállal közelítve  $T_c$ -re az  $N_0 \rightarrow 0$ , ha  $T \rightarrow T_c - 0$  feltételből

$$k_B T_c^0 = \hbar \bar{\omega} \left(\frac{N}{\zeta(3)}\right)^{1/3} \sim N^{1/3} \quad (6)$$

adódik ( $\zeta(n)$  a Riemann-féle zéta-függvény). Ugyanabban a közelítésben  $T < T_c^0$ -re a kondenzált részecskék száma

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c^0}\right)^3 \quad (7)$$

szerint változik. A diszkrét esetben az átalakulás egy véges hőmérséklet-tartományban megy végbe, amely azonban nagy részecskeszám esetén olyan szűk, hogy célszerűen beszélhetünk a kritikus  $T_c$  hőmérsékletről.

Zérus hőmérsékleten  $N_0 = N$ , a rendszer alapállapotban van, aminek hullámfüggvénye:

$$\phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = \prod_i \phi_0(\mathbf{r}_i),$$

1. táblázat		
A [4] és [6] kísérlet karakterisztikus adatai		
	JILA TOP csapda [4] (1995)	MIT „lóhere”-csapda [7] (1996)
$\omega_z$	$2\pi \times 208$ Hz	$2\pi \times 18$ Hz
$\omega_\perp$	$\omega_z \cdot 8^{-1/2}$	$2\pi \times 320$ Hz
$d_\perp$	1,25 $\mu\text{m}$	1,7 $\mu\text{m}$
$d_z$	0,74 $\mu\text{m}$	7,0 $\mu\text{m}$
$T_c$	170 nK	2 $\mu\text{K}$

ahol

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \left(\frac{m\bar{\omega}}{\pi\hbar}\right)^{3/4} \exp\left[-\frac{m}{2\hbar}(\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z z^2)\right], \quad (8)$$

$$\text{itt } \bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}.$$

Az alapállapotú sűrűség,  $n(\mathbf{r}) = N|\phi_0(\mathbf{r})|^2$ , arányos  $N$ -nel, míg a kondenzátum mérete független  $N$ -től. A kísérletekben alkalmazott axiálszimmetrikus esetben ( $\omega_x = \omega_y = \omega_\perp$ ) a két irányban a Gauss-függvény alakú kondenzátum kiterjedése a  $z$  és az arra merőleges irányban

$$d_z = \left(\frac{\hbar}{m\omega_z}\right)^{1/2}, \quad \text{illetve} \quad d_\perp = \left(\frac{\hbar}{m\omega_\perp}\right)^{1/2}.$$

Mint láttuk, véges hőmérsékleten csak a bozonok egy része van alapállapotban, a többi termikusan oszlik el a gerjesztett állapotok között. Ez a termikus felhő kiterjedtebb, mint az alapállapot. Közelítőleg Maxwell–Boltzmann-eloszlást véve a felhő sűrűsége

$$\propto \exp\left[-\frac{V(\mathbf{r})}{k_B T}\right],$$

amelynek átlagos szélessége

$$\sim \bar{d} \left(\frac{k_B T}{\hbar\bar{\omega}}\right)^{1/2}, \quad \text{ahol} \quad \bar{d} = \left(\frac{\hbar}{m\bar{\omega}}\right).$$

A [4] és [6] kísérlet karakterisztikus adatait az 1. táblázat tartalmazza.

## A kölcsönhatás figyelembevétele

Az ideálisgáz-modell jó közelítést ad a  $T_c$  hőmérséklet közelében, mert ott kicsi a részecskesűrűség. Így (6) általában megfelelő pontosságú eredményt ad a kritikus hőmérsékletre. Sőt a kondenzált részecskék számát (7) a mérési pontosságon belül adta meg egészen az elért legalacsonyabb hőmérsékletekig. Más a helyzet azonban a kondenzátum kiterjedését és dinamikáját nézve, ezek tekintetében a kölcsönhatásnak meghatározó szerepe van. A következőkben a kondenzátum tulajdonságait vizsgáljuk zérus hőmérsékleten.

A kölcsönhatást is figyelembe véve a Hamilton-operátor

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + V(\mathbf{r}_i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j=1}^N v(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (9)$$

alakú. Az energia átlagértéke függetlenrészecske-közelítésben a

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \prod_{i=1}^N \varphi(\mathbf{r}_i)$$

hullámfüggvénnyel

$$\begin{aligned} \langle \Psi, \hat{H} \Psi \rangle &= -N \frac{\hbar^2}{2m} \int d^3r \varphi^*(\mathbf{r}) \Delta \varphi(\mathbf{r}) + \\ &+ N \int d^3r \varphi^*(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) + \\ &+ \frac{N(N-1)}{2} \int d^3r d^3r' \varphi^*(\mathbf{r}) \varphi^*(\mathbf{r}') v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (10)$$

A  $\varphi(\mathbf{r})$  egyrészecske hullámfüggvényeket a

$$\delta [\langle \Psi, \hat{H} \Psi \rangle - E \langle \Psi, \Psi \rangle] = 0 \quad (11)$$

variációs elvből határozhatjuk meg, ahol  $E$  a  $\Psi$  normáltága miatt fellépő Lagrange-multiplikátor. A számítás eredménye: bevezetve  $\mu = E/N$ -t,  $\Psi_0(\mathbf{r}) = N^{1/2} \varphi(\mathbf{r})$ -t,

$$\int d^3r |\Psi_0(\mathbf{r})|^2 = N, \quad (12)$$

$\Psi_0$ -ra kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) \right) \Psi_0(\mathbf{r}) + \\ &+ \left( 1 - \frac{1}{N} \right) \int d^3r' v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') |\Psi_0(\mathbf{r}')|^2 \Psi_0(\mathbf{r}) = \\ &= \mu \Psi_0(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (13)$$

Nagy részecskeszám esetén az  $1/N$ -es tag elhanyagolható.

A kísérletben, illetve a későbbi kísérletekben a még kondenzátum legsűrűbb részén is az átlagos részecsketávolság nagyságrendekkel volt nagyobb, mint a tipikus atomi-kétrészecske kölcsönhatások karakterisztikus hatótávolsága. Minthogy az ütköző atomok energiája igen kicsi, a  $v(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  kölcsönhatást a

$$v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = v \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (14)$$

kontaktpotenciállal helyettesíthetjük, ahol

$$v = \frac{4\pi \hbar^2 a}{m},$$

$a$  pedig az  $s$ -hullám szórási hossz.

A fentiek figyelembevételével (13)-ból kapjuk a Gross–Pitaevskii-egyenletet:

2. táblázat		
A [4] és [6] kísérletek néhány jellemző adata		
	JILA TOP-csapda [4] (1995)	MIT „lóhere”-csapda [7] (1996)
$N_0$ (max)	2000 $^{87}\text{Rb}$	$5 \cdot 10^6$ $^{23}\text{Na}$
$a$	10 nm	4,9 nm
kiterjedés $z$ irányban	1,44 $\mu\text{m}$	300 $\mu\text{m}$
kiterjedés $\perp$ irányban	4,05 $\mu\text{m}$	17 $\mu\text{m}$
$n_0(0)$		$3 \cdot 10^{14}$ $\text{cm}^{-3}$

$$\begin{aligned} &\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) + v |\Psi_0(\mathbf{r})|^2 \right] \Psi_0(\mathbf{r}) = \mu \Psi_0(\mathbf{r}); \quad (16) \\ &n_0(\mathbf{r}) = |\Psi_0(\mathbf{r})|^2. \end{aligned}$$

Ez egy nemlineáris Schrödinger-egyenlet  $\Psi_0$ -ra és a  $\mu$  kémiai potenciálra a (12) normálás mellett.  $\Psi_0$ -t szokás a kondenzátum hullámfüggvényének tekinteni.

A ritkagáz-közelítés jóságát kontrolláló dimenziótlan paraméter az  $n a^3$ , úgynevezett gázparaméter, ahol  $n$  a gáz átlagos sűrűsége. Ez a kísérletekben mindig kisebb mint  $10^{-3}$ . Ez nem jelenti azt, hogy a kölcsönhatás elhanyagolható. Megbecsülhető, hogy

$$\frac{E_{int}}{E_{kin}} \propto \frac{N|a|}{d} \equiv \eta. \quad (17)$$

Ha  $N$  elegendően nagy  $\eta \gg 1$  lehet akkor is, ha  $a/d$  kicsi. A JILA-kísérletben  $\eta > 10$ , az MIT-kísérletben pedig  $10^3$ - $10^4$ . Nagy kondenzátum esetén az úgynevezett Thomas–Fermi-közelítés alkalmazható, ami a kinetikus energia operátorának elhanyagolását jelenti a Gross–Pitaevskii-egyenletben. Ekkor  $\Psi_0$ -ra algebrai egyenlet adódik:

$$n_0(\mathbf{r}) \equiv |\Psi_0(\mathbf{r})|^2 = \frac{1}{v} [\mu - V(\mathbf{r})] \Theta(\mu - V(\mathbf{r})), \quad (18)$$

ahol a  $\Theta$  függvény biztosítja, hogy  $n_0 \geq 0$ .

A [4] és [6] kísérletek néhány jellemző adatát a 2. táblázat mutatja. Látjuk, hogy a kondenzátum kiterjedése lényegesen nagyobb lehet, mint az oszcillátor-alapállapoté. Vagyis a kölcsönhatás, bármilyen gyenge is az, a kondenzátum számára meghatározó.

Az ebben a fejezetben alkalmazott közeletés azt is feltételezte, hogy valamennyi részecske a kondenzátumban van. Kölcsönható részecskék rendszerében ez természetesen egzaktul nem teljesülhet. A pontosabb számítás szerint azonban az itt tárgyalt rendszerek esetében a kondenzátumon kívüli részecskék száma alapállapotban nem haladja meg az 1-2%-ot.

Más típusú korrekciót jelentenek a kondenzátumban jelenlevő kvantum-fluktuációk. Ezek azt eredményezik, hogy a kondenzátumamplitúdó „squeezed” állapotban van, vagyis  $\Psi_0$  fázisának fluktuációi nagyok. Ez az itt tárgyalt kérdéseknél nem jelent problémát.

## Kvantum hidrodinamika<sup>3</sup>

A kondenzátum alacsonyenergiás gerjesztéseire *Stringari* [8] származtatta a hidrodinamikai hullámegyenletet a következő megfontolásokkal. Induljunk ki a (16) Gross–Pitaevskii-egyenlet általánosításából

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_0(\mathbf{r}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} |\Psi_0(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \Psi_0(\mathbf{r}, t), \quad (19)$$

amely a  $\delta S=0$ ,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \langle \Psi(t) | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} | \Psi(t) \rangle, \quad (20)$$

$$\delta \Psi(t_1) = \delta \Psi(t_2) = 0$$

variációs elvből kapható és a kondenzátum hullám-függvényének időbeli változását írja le. Ebből a kondenzátum

$$n_0(\mathbf{r}, t) = |\Psi_0(\mathbf{r}, t)|^2$$

sűrűségére, illetve a

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\Psi_0^* \nabla \Psi_0 - \Psi_0 \nabla \Psi_0^*}{2im n_0(\mathbf{r}, t)}$$

sebességterére a következő mozgásegyenleteket írhatjuk fel:

$$\frac{\partial}{\partial t} n_0 + \nabla(\mathbf{v} n_0) = 0 \quad (21)$$

(kontinuitási egyenlet), illetve

$$m \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \nabla \left( \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + V(\mathbf{r}) + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} n_0 - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n_0}} \Delta \sqrt{n_0} \right) = 0. \quad (22)$$

Az egyensúlyi esetben  $\mathbf{v} = 0$ ,  $n_0(\mathbf{r}, t) = n_0(\mathbf{r})$ . Vegyük  $n_0(\mathbf{r})$ -t a (18) Thomas–Fermi-közelítésben, azaz nagy kondenzátumot tételezünk fel, és (22)-ben hanyagoljuk el az utolsó, „kvantumnyomás” tagot. Az  $n_0(\mathbf{r})$  és  $\mathbf{v} = 0$  körül linearizált (21) és (22) egyenletekből, ha  $\delta \mathbf{v}$ -t elimináljuk, egy hullámegyenletet kapunk a  $\delta n(\mathbf{r}, t)$ -ra. Ennek megoldását

$$\delta n(\mathbf{r}, t) = \exp(\pm i\omega t) \delta n(\mathbf{r})$$

alakban keresve az  $\omega$  frekvenciájú módusra a következő sajátérték-egyenletet kapjuk:

$$\hbar^2 \omega^2 \delta n = \hat{H}_{\text{hyd}}^2 \delta n, \quad (23)$$

$$\hat{H}_{\text{hyd}}^2 = -\frac{\hbar^2}{m} \nabla(\mu - V(\mathbf{r})) \Theta(\mu - V(\mathbf{r})) \nabla,$$

(18), (23) egyenletek megoldása  $V(\mathbf{r}) = 0$  homogén rendszerben

$$\omega = ck, \quad c = \sqrt{\frac{n_0 v}{m}}$$

a Bogoliubov által talált fononspektrum. Érvényességi feltétele

$$k < \sqrt{8\pi n a}.$$

Nagyobb  $k$  értékekre az elhanyagolt kvantumnyomás-tag járuléka lényegessé válik. Általában is igaz, hogy (23) az alacsony energiájú gerjesztéseket írja le helyesen. A következőkben vizsgáljuk a háromdimenziós harmonikus oszcillátor csapdapotenciál esetét! Izo-tróp esetben ( $\omega_x = \omega_y = \omega_z = \omega_0$ )  $L^2$  és  $L_z$  kommutál  $\hat{H}_{\text{hyd}}^2$ -val, ezért  $l$  és  $m$  jó kvantumszámok, és mint gömbszimmetrikus problémák esetén a gerjesztési spektrum nem függ  $m$ -től. Stringari a következő diszperziós összefüggést találta:

$$\omega^2(n, l) = \omega_0^2(2n^2 + 2nl + 3n + l), \quad (24)$$

itt  $n, l = 0, 1, \dots$ ,

ahol  $n$  a gerjesztések radiális kvantumszáma.

Az axiálszimmetrikus esetben Stringari [8] megadta néhány módus frekvenciáját. Az általános megoldás [9, 10]-ben történt. A [9] cikkben a szerzők kimutatták, hogy a (23) hidrodinamikai egyenlet forgásszimmetrikus elliptikus koordinátákban teljesen szeparálható. A kísérletekben alkalmazott, csak a  $z$ -tengely körüli forgásszimmetrikus csapdapotenciál ( $\omega_x = \omega_y = \omega_\perp$ ) esetén  $L_z$  kommutál  $\hat{H}_{\text{hyd}}^2$ -val, tehát  $\hat{H}_{\text{hyd}}^2$  mellett megmaradó mennyiség operátora.

Létezik azonban egy harmadik, velük kommutáló operátor:

$$\hat{B} = -\frac{m\omega_\perp^2}{2\mu} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \frac{m\omega_z^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \mathbf{r} \nabla(\mathbf{r} \nabla + 3), \quad (25)$$

aminek spektruma  $(n + |m|)(n + |m| + 3)$ , ahol  $n = 0, 1, \dots$ . Rögzített  $n, m$  mellett a gerjesztések egy további, egész értéket felvevő  $j$  kvantumszámmal jellemezhetők, ami a  $j = 0, 1, \dots, [n/2]$  értékeket veheti fel. Az első néhány hidrodinamikai kvázirészecske gerjesztés  $\omega(n, j, m)$  frekvenciája:

<sup>3</sup> Zérus hőmérsékleten hidrodinamikáról akkor beszélhetünk, ha a gerjesztések karakterisztikus hossza sokkal nagyobb, mint az átlagos részecsketávolság.

$$\begin{aligned}
\omega^2(0, 0, m) &= \omega_z^2 |m| \lambda, \\
\omega^2(1, 0, m) &= \omega_z^2 (1 + |m| \lambda), \\
\omega^2(2, j, m) &= \omega_z^2 \left( \frac{3}{2} + 2(|m| + 1) \lambda \pm \right. \\
&\quad \left. \pm \frac{1}{2} [9 - 4(|m| + 4) \lambda + \right. \\
&\quad \left. + 4(|m| + 2)^2 \lambda^2] \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (26) \\
\omega^2(3, j, m) &= \omega_z^2 \left( \frac{7}{2} + 2(|m| + 1) \lambda \pm \right. \\
&\quad \left. \pm \frac{1}{2} [25 + 4(|m| - 4) \lambda + \right. \\
&\quad \left. + 4(|m| + 2)^2 \lambda^2] \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

ahol  $\lambda = (\omega_x/\omega_z)^2$ .

Megjegyezzük, hogy teljesen anizotróp harmonikus oszcillátor csapdapotenciál esetén ( $\omega_x \neq \omega_y \neq \omega_z$ ) már  $\hat{L}_z$  sem megmaradó mennyiség operátora. Azonban a hidrodinamikai egyenlet általános elliptikus koordinátákban szeparálható marad [11]. Megtalálhatók azon egymással kommutáló operátorok, amelyek sajátértékei a szeparációs konstansok. Ezek közül egyik  $\hat{H}_{\text{hyd}}^2$ , egy másik a fenti  $\hat{B}$  triviális módosításával kapható. Létezik továbbá egy kvadratikus deriváltakat tartalmazó harmadik operátor, amely ezen általános eset egy szimmetria-operátora. Ennek az esetnek is van kísérleti relevanciája. Az NIST-ben (National Institute of Standard, Gaithersburg) olyan harmonikus oszcillátor csapdapotenciált használtak a nátriumatomokból álló kondenzátum összetartására, amely teljesen anizotróp volt.

A módusok meghatározására magasabb energiákon a függelékben ismertetett Bogoliubov-egyenletek szolgálnak. A mérési eredményekkel való összehasonlításról a következő fejezetekben lesz szó.

## Főbb kísérleti eredmények a Bose–Einstein kondenzált gázokkal és elméleti hátterük (1995–1999)

Bevezetésként megjegyezzük, hogy tekintettel az óriási ütemű fejlődésre az irodalomjegyzék távolról sem lehet teljes. További referenciák számára három összefoglaló cikkre utalunk: [12–14].

1. Kondenzált részecskék száma:  
kísérlet: [15],  
elmélet: [16, 17].
2. Elemi gerjesztések energiája és csillapodása:  
kísérlet: [18–22],  
elmélet:  
a. energia: [23–37],  
b. csillapodás: [38–45].

3. Kétkomponensű kondenzátum:  
kísérlet: [46–49],  
elmélet: [50–53].
4. Kondenzátumok interferenciája:  
kísérlet: [54],  
elmélet: [55–57].
5. Optikai csapda:  
kísérlet: [58–60],  
elmélet: [61].
6. A kondenzátum kialakulásának dinamikája:  
kísérlet: [62],  
elmélet: [63–66].
7. Feshbach-rezonancia:  
kísérlet: [67, 68]  
elmélet: [69–73].
8. Elméleti munkák, amelyek kísérleti vizsgálatot motiválhatnak:  
a. hidrodinamikai módusok ( $T > 0$ ): [74, 75] (és hivatkozások ezekben),  
b. rugalmatlan fényszórás: [35, 76, 77].

## Atomlézer

Az előző fejezetben szerepelt több téma is szoros kapcsolatban van az atomlézer problémájával (például kondenzátumok interferenciája; kondenzátum kialakulása, tekintettel az ott meghatározó szerepet játszó Bose-faktorra), azokat akár ide is lehetne sorolni.

- a. Kísérlet: [78, 79],
- b. elmélet: [12, 80] (és hivatkozások ezekben).

## Függelék

### Mikroszkopikus elmélet (Bogoliubov-egyenletek)

A csapdapotenciál explicit térfüggése miatt a homogén rendszerben impulzustérben származtatott Bogoliubov-egyenleteket most valós térben kell felírni. Az (9)-nek megfelelő másodkvantált Hamilton-operátor:

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= - \int \hat{\Psi}^+(\mathbf{r}) \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \hat{\Psi}(\mathbf{r}) d^3r + \\
&\quad + \int \hat{\Psi}^+(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) d^3r + \\
&\quad + \frac{1}{2} \int \hat{\Psi}^+(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^+(\mathbf{r}') v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}') d^3r d^3r', \quad (27)
\end{aligned}$$

ahol  $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$  Bose-típusú téroperátor a szokásos kommutátorral:

$$[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}^+(\mathbf{r}')] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (28)$$

A téroperátor mozgásegyenlete:

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = [\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \hat{H} - \mu \hat{N}], \quad (29)$$

ahol  $\hat{N}$  a részecskeszám operátora:

$$\hat{N} = \int \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) d^3r, \quad (30)$$

$\mu$  pedig a kémiai potenciál. A Bose-kondenzáció kritikus hőmérséklete alatt (így zérus hőmérsékleten is) a téroperátor várható értéke zérustól különböző, amit a téroperátorban egy  $C$ -számfüggvénnyel érdemes le választani:

$$\hat{\Psi} = \Psi_0 + \hat{\Phi}. \quad (31)$$

$\Psi_0$  a kondenzátum hullámfüggvénye, ami a kondenzátumban lévő részecskék  $N_0$  számára normált:

$$\int |\Psi_0|^2 d^3r = N_0. \quad (32)$$

A kondenzátum feletti részecskéket leíró  $\hat{\Phi}$  operátor szintén a szokásos Bose-kommutációs szabályokat követi:

$$[\hat{\Phi}(\mathbf{r}), \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{r}')] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (33)$$

A továbbiakban a kétrészecske-potenciált

$$v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = v \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

alakúnak vesszük, ahol

$$v = \frac{4 \pi \hbar^2 a}{m}.$$

Bogoliubov-közelítésben a (29) egyenletbe helyettesítjük a (31) felbontást és  $\hat{\Phi}$ -ben másod és harmadfokú tagokat elhanyagoljuk. A  $\hat{\Phi}$ -től nem függő tagok adják a korábban már (16)-ban felírt Gross–Pitaevskii-egyenletet. A (29) téroperátor-mozgásegyenletben a  $\hat{\Phi}$ -ben elsőrendű tagok a

$$i \hbar \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} =$$

$$= \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\mathbf{r}) - \mu + 2 |K(\mathbf{r})| \right) \hat{\Phi} + K \hat{\Phi}^\dagger \quad (34)$$

mozgásegyenletet adják, ahol

$$K(\mathbf{r}) \equiv \frac{4 \pi \hbar^2 a}{m} \Psi_0^2(\mathbf{r}). \quad (35)$$

Ez az egyenlet a

$$\hat{\Phi} = \sum_{j \neq 0} \left[ u_j(\mathbf{r}) \hat{\alpha}_j \exp(-i \omega_j t) - v_j^*(\mathbf{r}) \hat{\alpha}_j^\dagger \exp(i \omega_j t) \right] \quad (36)$$

transzformációval szétesik módusokra, ahol  $\hbar \omega_j = E_j$  a módusok energiája,  $\hat{\alpha}_j$ -k Bose kommutációs szabályok szerinti (tértől és időtől már nem függő) eltüntető operátorok.

Ez természetesen csak akkor igaz, ha az  $u_j(\mathbf{r})$  és  $v_j(\mathbf{r})$  függvények nem tetszőlegesek, hanem ha kielégítik a valós térben felírt

$$\begin{pmatrix} \hat{H}_{HF} & -K \\ -K^* & \hat{H}_{HF} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix} = E_j \begin{pmatrix} u_j \\ -v_j \end{pmatrix} \quad (37)$$

kétkomponensű Bogoliubov-egyenleteket a

$$\int d^3r (u_j u_i^* - v_j v_i^*) = \delta_{ij},$$

$$\int d^3r (u_j v_i - v_j u_i) = 0$$

normálás mellett. A  $\hat{H}_{HF}$ -operátor:

$$\hat{H}_{HF} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\mathbf{r}) + 2 |K(\mathbf{r})| - \mu. \quad (38)$$

Az  $\hat{\alpha}_j^\dagger$  operátorok az  $E_j$  energiájú, kondenzátum feletti kvázirészecske-állapotok keltő operátorai. A  $j = 0$  esetben a diagonalizálás nem végezhető el a (36) transzformációval. Ez a járuléka a kondenzátum fázisának diffúziójára vezet, ami ebben a közelítésben az elemi gerjesztések spektrumától független [81, 82].

Bogoliubov-közelítésben először meg kell oldani a Gross–Pitaevskii-egyenletet  $\Psi_0$ -ra. Ezt a Bogoliubov-egyenletekbe írva a következő lépés, hogy alkalmasan választott bázison a (37) egyenleteket diagonalizáljuk. A sajátértékek adják a kvázirészecske-energiákat, a sajátvektorokból pedig kiszámítjuk az  $u_j$  és  $v_j$  függvényeket. Véges hőmérsékleten a probléma még lényegesen bonyolultabbá válik, mert a Gross–Pitaevskii-egyenletben és a Bogoliubov-egyenletekben is megjelenik a termikusan gerjesztett részecskék sűrűsége. Az irodalomban számos módszert dolgoztak ki a numerikus probléma kezelésére [23, 30, 36].

## Irodalom

1. A. Griffin: *Excitations in a Bose-Condensed Liquid*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
2. O. Penrose, L. Onsager, *Phys. Rev.* 104 (1956) 576.
3. A. F. G. Wyatt, *Nature* 391 (1998) 56.
4. M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wiemann, E. A. Cornell, *Science* 269 (1995) 198.
5. C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* 75 (1995) 1687.
6. K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. D. Durfee, D. M. Kurn, W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* 75 (1995) 3969.
7. M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. M. Kurn, D. S. Durfee, W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* 77 (1996) 416.
8. S. Stringari, *Phys. Rev. Lett.* 77 (1996) 2360.
9. M. Fliesser, A. Csordás, P. Szépfalussy, R. Graham, *Phys. Rev. A* 56 (1997) R2533.
10. P. Öhberg, E. L. Surkov, I. Tittonen, S. Stenholm, M. Wilkens, G. V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. A* 56 (1997) R3346.
11. A. Csordás, R. Graham, *Phys. Rev. A* 59 (1999) 1477.
12. A. S. Parkins, D. F. Walls, *Physics Reports* 303 (1998) 1.
13. F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari, *cond-mat/9806038*.
14. E. A. Cornell, J. R. Ensher, C. E. Wieman, *cond-mat/9903109*.
15. J. R. Ensher, D. S. Jin, M. R. Matthews, C. E. Wieman, E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* 77 (1996) 4984.

16. C. Herzog, M. Olshanii, *Phys. Rev. A* 55 (1997) 3254.
17. A. Minguzzi, S. Conti, M. P. Tosi, *J. Phys. C* 9 (1997) L33.
18. D. S. Jin, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* 77 (1996) 420.
19. M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. M. Kurn, D. S. Durfee, C. G. Townsend, W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* 77 (1997) 988.
20. D. S. Jin, M. R. Matthews, J. R. Ensher, C. E. Wieman, E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* 78 (1997) 764.
21. M. R. Andrews, D. M. Kurn, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, C. G. Townsend, S. Inouye, W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* 79 (1997) 553.
22. D. M. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, S. Inouye, M. R. Andrews, W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* 81 (1998) 500.
23. M. Edwards, P. A. Ruprecht, K. Burnett, R. J. Dodd, C. W. Clark, *Phys. Rev. Lett.* 77 (1996) 1671.
24. P. A. Ruprecht, M. Edwards, K. Burnett, C. W. Clark, *Phys. Rev. A* 54 (1996) 4178.
25. K. G. Singh, D. S. Rokhsar, *Phys. Rev. Lett.* 77 (1996) 1667.
26. L. You, W. Hoston, M. Lewenstein, *Phys. Rev. A* 55 (1997) R1581.
27. A. Smerzi, S. Fantoni, *Phys. Rev. Lett.* 78 (1997) 3589.
28. F. Dalfovo, S. Giorgini, M. Guilleumas, L. P. Pitaevskii, S. Stringari, *Phys. Rev. A* 56 (1997) 3840.
29. B. D. Esry, *Phys. Rev. A* 55 (1997) 1147.
30. D. A. W. Hutchinson, E. Zaremba, A. Griffin, *Phys. Rev. Lett.* 78 (1996) 1842.
31. J. F. Dobson, *Phys. Rev. Lett.* 73 (1994) 2244.
32. A. L. Fetter, D. Rokhsar, *Phys. Rev. A* 57 (1998) 1191.
33. M. Fliesser, A. Csordás, R. Graham, P. Szépfalusy, *Phys. Rev. A* 56 (1997) 4879.
34. A. Csordás, R. Graham, P. Szépfalusy, *Phys. Rev. A* 56 (1997) 5179.
35. A. Csordás, R. Graham, P. Szépfalusy, *Phys. Rev. A* 57 (1998) 4669.
36. J. Reidl, A. Csordás, R. Graham, P. Szépfalusy, *Phys. Rev. A* 59 (1999) 3816. és *cond-mat/9811012*.
37. M. J. Bijlsma, H. T. C. Stoof, *cond-mat/9902065*.
38. P. Szépfalusy, I. Kondor, *Ann. Phys. (N.Y.)* 82 (1974) 1.
39. W. V. Liu, *Phys. Rev. Lett.* 79 (1997) 4056.
40. L. P. Pitaevskii, S. Stringari, *Phys. Lett. A* 235 (1997) 398.
41. H. Shi, A. Griffin, *Physics Reports* 304 (1998) 1.
42. S. Giorgini, *Phys. Rev. A* 57 (1998) 2949.
43. P. O. Fedichev, G. V. Slyapnikov, J. T. M. Walraven, *Phys. Rev. Lett.* 80 (1998) 2269.
44. Gy. Bene, P. Szépfalusy, *Phys. Rev. A* 58 (1998) R3391.
45. S. Choi, S. A. Morgan, K. Burnett, *Phys. Rev. A* 57 (1998) 4057.
46. C. J. Myatt, E. A. Burt, R. W. Ghrist, E. A. Cornell, C. E. Wieman, *Phys. Rev. Lett.* 78 (1997) 586.
47. D. S. Hall, M. R. Matthews, J. R. Ensher, C. E. Wieman, E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* 81 (1998) 1539.
48. D. S. Hall, M. R. Matthews, C. E. Wieman, E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* 81 (1998) 1543.
49. J. Williams, R. Walser, J. Cooper, E. Cornell, M. Holland, *cond-mat/9806337*.
50. H. Pu, N. P. Bigelow, *Phys. Rev. Lett.* 80 (1999) 1130.
51. H. Pu, N. P. Bigelow, *Phys. Rev. Lett.* 80 (1999) 1134.
52. J. I. Cirac, M. Lewenstein, K. Mølmer, P. Zoller, *Phys. Rev. A* 57 (1998) 1208.
53. B. D. Esry, C. H. Greene, J. P. Burke Jr., J. L. Bohn, *Phys. Rev. Lett.* 78 (1997) 3594.
54. M. R. Andrews, C. G. Townsend, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn, W. Ketterle, *Science* 275 (1997) 637.
55. M. Naraschewski, A. Schenzle, H. Wallis, *Phys. Rev. A* 56 (1997) 603.
56. H. Steck, M. Naraschewski, H. Wallis, *Phys. Rev. Lett.* 80 (1998) 1.
57. M. Naraschewski, R. J. Glauber, *cond-mat/9806362*.
58. D. M. Stamper-Kurn, M. R. Andrews, A. P. Chikkatur, S. Inouye, H.-J. Miesner, J. Stenger, W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* 80 (1998) 2027.
59. J. Stenger, S. Inouye, D. M. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, A. P. Chikkatur, W. Ketterle, *cond-mat/9901072*.
60. D. M. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, A. P. Chikkatur, S. Inouye, H.-J. Miesner, W. Ketterle, *cond-mat/9902301*.
61. Tin-Lun Ho, *Phys. Rev. Lett.* 81 (1998) 742.
62. H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, M. R. Andrews, D. S. Durfee, S. Inouye, W. Ketterle, *Science* 279 (1998) 1005.
63. Yu. Kagan, E. L. Surkov, G. V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. A* 55 (1997) R18.
64. H. T. C. Stoof, *Phys. Rev. Lett.* 78 (1997) 768.
65. C. W. Gardiner, P. Zoller, R. J. Ballagh, M. J. Davis, *Phys. Rev. Lett.* 79 (1997) 1793.
66. C. W. Gardiner, M. D. Lee, R. J. Ballagh, M. J. Davis, P. Zoller, *cond-mat/9801027*.
67. S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, W. Ketterle, *Nature* 392 (1998) 151.
68. J. Sterger, S. Inouye, M. R. Andrews, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, W. Ketterle, *cond-mat/9901056*.
69. K. Burnett, *Nature* 392 (1998) 125.
70. A. J. Moerdijk, B. J. Verhaar, A. Axelson, *Phys. Rev. A* 51 (1995) 4852.
71. H. M. J. M. Boesten, J. M. Vogels, J. G. C. Templaars, B. J. Verhaar, *Phys. Rev. A* 54 (1996) R3726.
72. J. M. Vogels, C. C. Tsai, R. S. Freeland, S. J. J. M. F. Kokkermans, B. J. Verhaar, D. J. Heinzen, *Phys. Rev. A* 56 (1997) 1067.
73. E. Timmermans, P. Tommasini, R. Côté, M. Hussein, A. Kerman, *cond-mat/9805323*.
74. Milena Imamović-Tomasović, A. Griffin, *cond-mat/9812281*.
75. E. Zaremba, T. Nikuni, A. Griffin, *cond-mat/9903029*.
76. A. Csordás, R. Graham, P. Szépfalusy, *Phys. Rev. A* 54 (1996) R2543.
77. E. Timmermans, P. Tomassini, *cond-mat/9707319*.
78. M.-O. Mewes, M. R. Andrews, D. M. Kurn, D. S. Durfee, C. G. Townsend, W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* 78 (1997) 582.
79. I. Bloch, Th. W. Hänsch, T. Esslinger, *cond-mat/9812258*.
80. R. Graham, D. F. Walls, *cond-mat/9902153*.
81. M. Lewenstein, L. You, *Phys. Rev. Lett.* 77 (1996) 3489.
82. A. I. Imamoglu, M. Lewenstein, L. You, *Phys. Rev. Lett.* 78 (1997) 2511.