

KÖZÉPISKOLÁBAN TANULT MOZGÁSOK ELEMZÉSE DOPPLER-EFFEKTUSSAL – AVAGY »LÁTNI A HANGOT«

Stonawski Tamás, Gálik Tamás
Nyíregyházi Egyetem

A középiskolai természettudomány-oktatásban előforduló mozgástípusok időbeliségének megjelenítésére különböző $x-t$, $s-t$, $v-t$, $a-t$ – grafikonokat használunk. A grafikonok egy bizonyos időintervallum elvileg végtelen sok időpillanathoz rendelik az említett fizikai mennyiségeket, ezáltal értelmezhetővé válik a mozgás folyamata. Ezen fizikai mennyiségek mérése visszavezethető egyszerű távolság- és időmérésre, és ezzel kapcsolatosan a különórákon

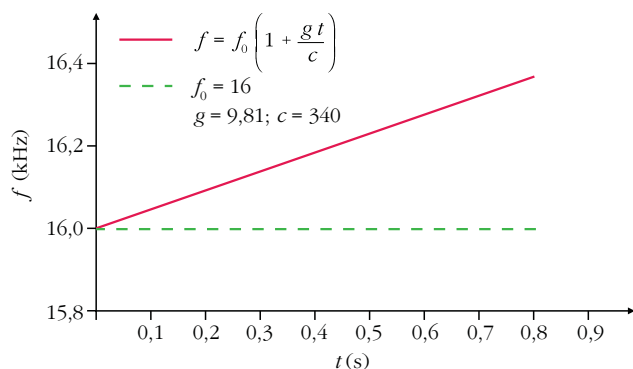
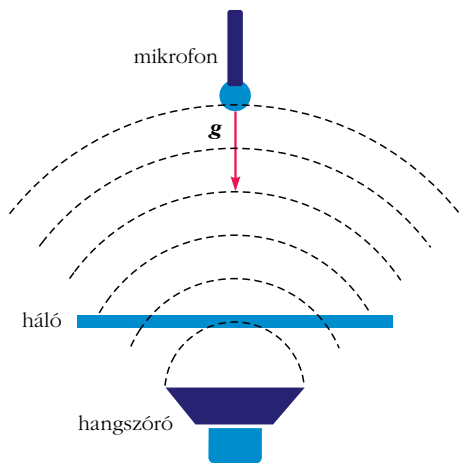
mélyebb matematikai összefüggések is feltárhatók (idő szerinti differenciálás). A diákok későbbi tanulmányaik során viszont olyan fizikai mennyiségekkel is találkozhatnak (például hőmérséklet), amelyek közvetlenül nem, csak a makroszkopikus test valamilyen más fizikai tulajdonságának változásán keresztül mérhetők. Ez a fajta közvetett szemlélet, amikor például egy folyadékos hőmérő használatánál már nem a tényleges hőmérsékletet, hanem egy hőmérsékletre kalibrált értéket olvasnak le a tanulók, bizonyos absztrakciót követel. A diákok már a fizikatanulmányaik előtt is használtak folyadékos hőmérőt, de annak alkalmazhatósági korlátait csak a hőmérséklet és hőtágulás fenomenológikus tárgyalásakor érthetik meg. A hőmérők más típusainál további közvetett mérésre alkalmas fizikai jelenségeket is tárgyalhatunk, mint például az ellenállás- vagy a frekvenciaváltozás. Hogy az anyag milyen tulajdonságát választhatjuk ki egy bizonyos fizikai mennyiség mérésére, azt a vele kapcsolatosan feltárt összefüggés határozza meg (hasonlóan a skálázást és az érvényességi határokat is). Azaz a matematikai összefüggésekből mérési eljárásokat dolgozhatunk ki. A képletek kreatív felhasználása gazdagíthatja a tanórák, szakkörök anyagát. Érdekes tehát a hőmérsékletméréshez hasonló, más közvetett méréseket is bemutatni a tehetséges tanulóknak, és ha van rá lehetőség, igazolni is az összetartozó mennyiségek kapcsolatát. A különböző témakörök szakkörön történő összekapcsolása növeli a problémamegoldó-képességet, élénkíti a kreativitást és a memorizálásban is sokat segít.



Stonawski Tamás a Nyíregyházi Egyetemen főiskolai adjunktus, óraadó az Ecsedi Bátor István Református Gimnáziumban. Az ELTE Fizika Tanítása doktori program doktorjelöltje. Kutatási területe a digitális média alkalmazása a tanulói kreativitás, problémamegoldás és önálló kísérletezés fejlesztésére általános és középiskolában.



Gálik Tamás a Nyíregyházi Főiskolán fizikusként végzett, jelenleg a Nyíregyházi Egyetem I. éves fizika-kémia mesterszakos hallgatója. Kísérleti és demonstrációs eszközök tervezésével és készítésével foglalkozik. Rendszeresen tart tudomány népszerűsítő előadásokat korosztálytól függetlenül az ország számos pontján.



1. ábra. Fölül a mérés elvi vázlata, alul pedig a (4) összefüggés grafikonja látható.

Mozgások elemzése Doppler-effektussal

11. osztályos fizikasakkörön a hullámmozgás témakörénél járva a diákokkal elhatároztuk, hogy a tanult

$$f = f_0 \frac{c}{c - v}, \quad (1)$$

$$f = f_0 \frac{c + v}{c} \quad (2)$$

Doppler-összefüggések segítségével is meg fogjuk vizsgálni a 9. osztályban tanult speciális mozgásokat. (Az f_0 az álló hangforrás frekvenciája, c az aktuális hangsebesség, f pedig a v sebességgel mozgó megfigyelő által észlelt frekvencia.) A (2) összefüggésben a megfigyelő sebessége a számlálóban van és a nevező sem összetett, így annak matematikai vizsgálata az egyszerűbb feladat. A (2) egyenlet számlálójának összetettségét megszüntetve a

$$f = f_0 \left(1 + \frac{v}{c} \right) \quad (3)$$

összefüggéshez jutunk.

A kísérletben alkalmazott mikrofon a mozgó megfigyelő, míg a nyugalomban lévő hangszóró a hangforrás szerepét játszotta. Ahhoz, hogy valós idejű f - t grafikon kaphassunk, egy valós idejű hanganalizátorra is

szükségünk volt. Mi a Realtime Analyser [1] programcsomagot használtuk méréseink során. A szoftver rendelkezik olyan jelgenerátorral, amelynek segítségével 0–24 kHz-es tartományban kényelmesen állíthatunk elő különböző hullámformájú, amplitúdójú és frekvenciájú hangokat. A program használatakor lehetőségünk van frekvenciapásztázásra is, ami nagyon hasznosnak bizonyul például a legnagyobb hatótávolságot biztosító frekvencia megtalálásához. A szoftver számunkra legfontosabb képessége a spektrogramkészítés volt, amit megadott frekvenciasávban, adott érzékenységgel és kiválasztható jelforrással végeztünk el.

Az egyes mozgástípusoknál tanult sebesség-idő összefüggéseket a (3) egyenletbe írva tanulmányoztuk az abból kapott frekvencia-idő összefüggéseket (lásd később).

Szabadesés

A (3)-ba helyettesítve a szabadesés $v(t) = gt$ sebességét az

$$f = f_0 \left(1 + \frac{gt}{c} \right) \quad (4)$$

egyenletet kapjuk (1. ábra, alul). Ezt rendezve az $f(t)$ függvényre az

$$f = \frac{f_0 g}{c} t + f_0 \quad (5)$$

lineáris összefüggés adódik. Az m meredekségből a nehézségi gyorsulás kifejezhető:

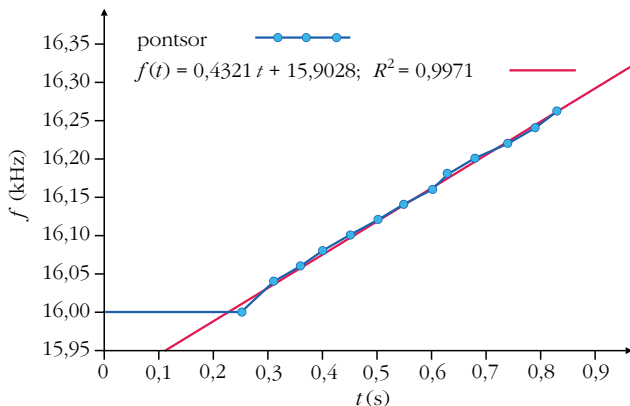
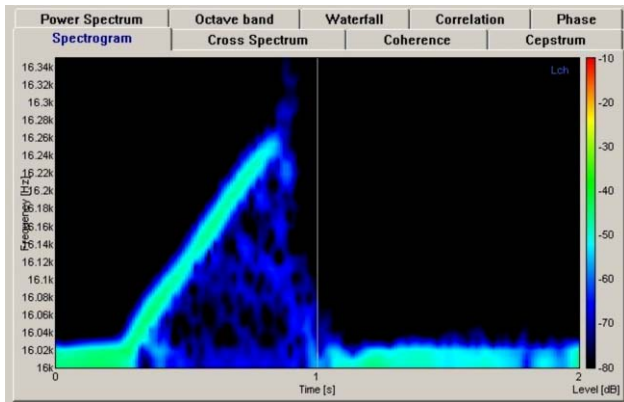
$$g = \frac{m c}{f_0}. \quad (6)$$

Azaz, ha a mikrofont ejtjük a hangszóró felé (1. ábra, fölül), a mikrofon által detektált f - t grafikon alapján – ha ismert az alapfrekvencia és a hangsebesség – a helyi nehézségi gyorsulás mérésére nyílik lehetőségünk.

A kísérletet elvégezve a 2. ábrán látható f - t grafikon kaptuk. A meredekséget a grafikon alapján intervallumfelezéssel kinyert adatok ábrázolásával határoztuk meg:

$$g = \frac{(0,43 \pm 0,02) \frac{\text{kHz}}{\text{s}} \cdot 350 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{16 \text{ kHz}} = (9,4 \pm 0,4) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (7)$$

A g számított értéke itt a hangsebességtől is függ, amit a levegő hőmérséklete alapján táblázatból kereshetünk ki – ha időnk és lehetőségünk engedi, a helyszínen a kísérlet előtt érdemes megmérni a hangsebességet. A mérés legnagyobb hibáját a frekvenciaértékek körülbelül 20 Hz-es szórása adta. (A mérést befolyásoló tényező még a közegellenállás, és a mikrofon vezetéke, tehát g -nél kisebb értéket kellett kapnunk.)



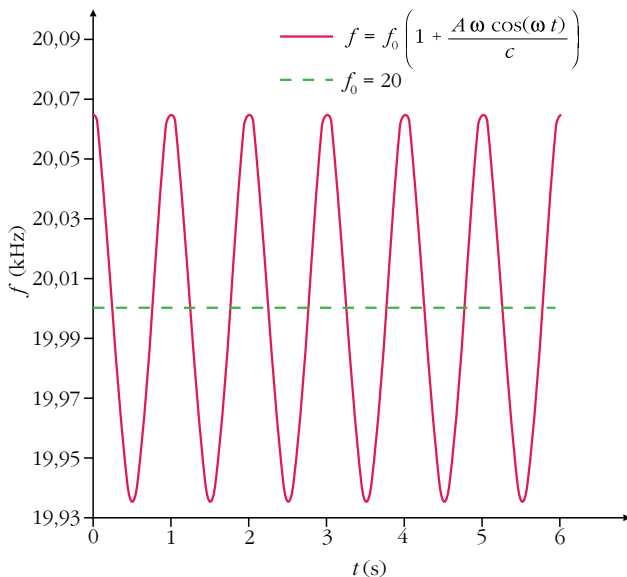
2. *ábra.* A szoftver adatai alapján 0,02 kHz frekvenciaváltozásokhoz tartozó intervallumok alapján elkészített f (kHz) – t (s) grafikon. A grafikon 0,25–0,86 s intervallumára illesztett egyenes meredekségét a Graph [2] program számította ki.

Harmonikus rezgőmozgás

A harmonikus rezgőmozgás pillanatnyi sebességére vonatkozó

$$v = A \omega \cos(\omega t) \quad (8)$$

3. *ábra.* Bal oldalon a (9) összefüggés grafikonja, a jobb oldalon az összeállított kísérlet látható.



összefüggést behelyettesítjük a (3)-ba, ekkor az

$$f = f_0 \left(1 + \frac{A \omega \cos(\omega t)}{c} \right) \quad (9)$$

egyenletet kapjuk. Néhány egyszerű matematikai átalakítás után az

$$\begin{aligned} f &= \frac{A \omega f_0}{c} \cos(\omega t) + f_0 = \\ &= A' \cos(\omega t) + \text{konst.} \end{aligned} \quad (10)$$

összefüggéshez jutunk, ami egy megváltozott, A' amplitúdójú,

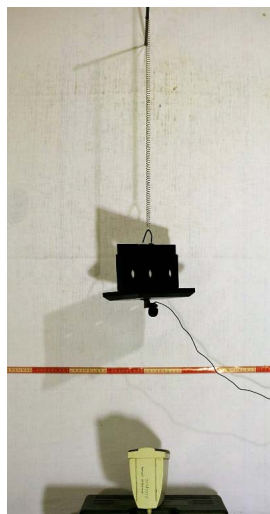
$$A = \frac{A' c}{\omega f_0} \quad (11)$$

(úgynevezett virtuális amplitúdó) koszinuszfüggvény (3. *ábra* bal oldala).

A kísérlet során egy M tömegű testet és egy mikrofont erősítettünk a rugóra, a hangszórót pedig az összeállítás alatt helyeztük el (3. *ábra* jobb oldala). A mikrofon által detektált f - t grafikon alapján leolvastuk a periódusidőt és kiszámoltuk az amplitúdót. A kapott eredményeket manuális mérésekkel (stopper, vonalzó) és videoanalízissel (rögzített videofelvételek alapján) is ellenőriztük (4. *ábra*).

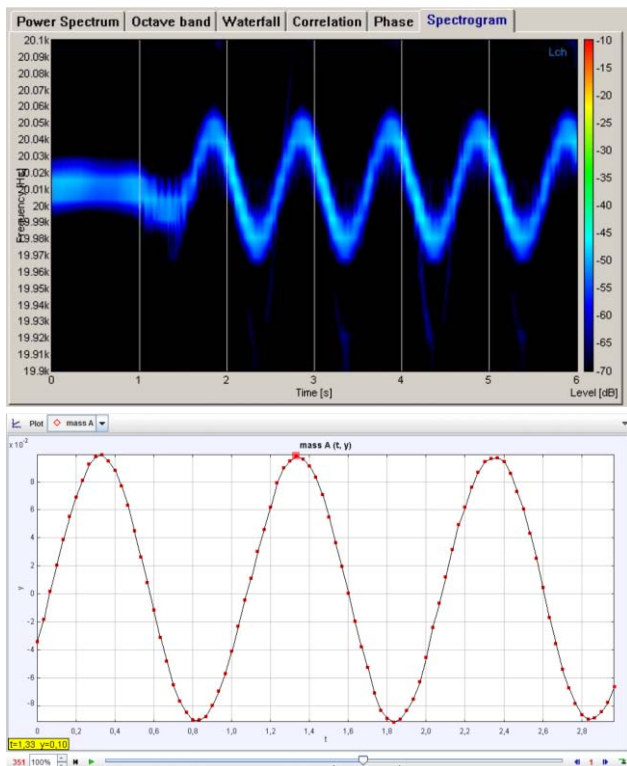
A kísérletben viszonylag nagyobb rugóállandójú rugót választottunk (így a közegellenállás és a kábel miatt disszipálódó energia elhanyagolható a rugó energiájához viszonyítva). Esetünkben a 7 kg-os súly hatására 25 cm-rel megnyúlt rugó rugóállandója 275 N/m volt. A rezgésidő 1 másodpercnek adódott. Ezt az értéket stopperes méréssel, videoanalízissel és az f - t grafikon alapján is megkaptuk.

Az f - t grafikon alapján leolvasott virtuális amplitúdó és az aktuális hangsebesség alapján ($A' = 0,07$ kHz, $c = 341$ m/s) a (11) képletbe helyettesítve a legnagyobb kitérésre 19 cm adódott, ami jól közelíti a videoanalízis és a manuális mérések 18 cm-es eredményeit.



Körmozgás

A körmozgás vizsgálatához 26 cm átmérőjű, állandó szögsebességű, elektromos fazekaskorongót használtunk. A korong külső részére, a hangszóróval megegyező magasságba mikrofont erősítettük (5. *ábra*). A mikrofon által felvett hang frekvenciáját az idő függvényében vizsgáltuk: a grafikon képe szinuszgörbének adódott. A grafikon képeről (6. *ábra*, fölül) megállapítottuk, hogy az jellegét te-



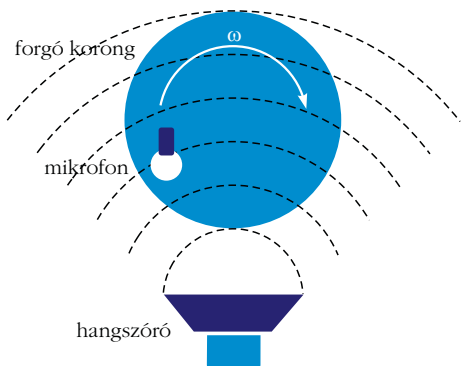
4. ábra. Fölül a harmonikus rezgőmozgás $f-t$, alul a videoanalízis [3] alapján meghatározott $y-t$ grafikon látható.

kintve megegyezik a harmonikus rezgőmozgás $f-t$ grafikonjával (4. ábra). Ezzel mintegy áttélesen igazoltuk, hogy a harmonikus rezgőmozgás az egyenes körmozgás merőleges vetülete.

A mikrofon által detektált $f-t$ grafikon alapján meghatároztuk a periódusidőt, a szögsebességet és a mikrofon kerületi sebességét. A mérést manuálisan és videoanalízissel is megismételtük (6. ábra, fölül).

A 6. ábrán nemcsak frekvencia-, hanem intenzitásváltozásokat is megfigyelhetünk. A grafikon pontjainak színeihez (a feketétől a piros színűig) a decibelskála értékei vannak hozzárendelve, így a mozgás során a hang erősségét is leolvashatjuk. Az ábrán látható szinuszrezgés felső részénél a hangerősség 10 decibellel erősebb, mint az alsó részénél, azaz a mikrofon ekkor van a hangszóróhoz legközelebbi pozícióban. A nagyobb hangerősség a grafikon szétfolyását is eredményezi. A frekvencia-diagramon még megfigyelhető a

5. ábra. A körmozgás vizsgálatához tartozó mérés elvi vázlata.



falról visszaverődött hang is (a hullámvonalatok tükörképe), amit például néhány hangcsapdának használt szembehelyezett tojástartóval lehet kiküszöbölni.

Ingamozgás

Egy szabadságfokú, csillapítatlan, szabad lengéseket végző rendszerre:

$$v = -\varphi_0 \omega l \sin(\omega t), \quad (12)$$

ahol v a pillanatnyi sebesség, φ^0 a kezdeti kitérés szöge, l az inga fonálhossza, ω a lengés frekvenciája. Ezt (3)-ba beírva az

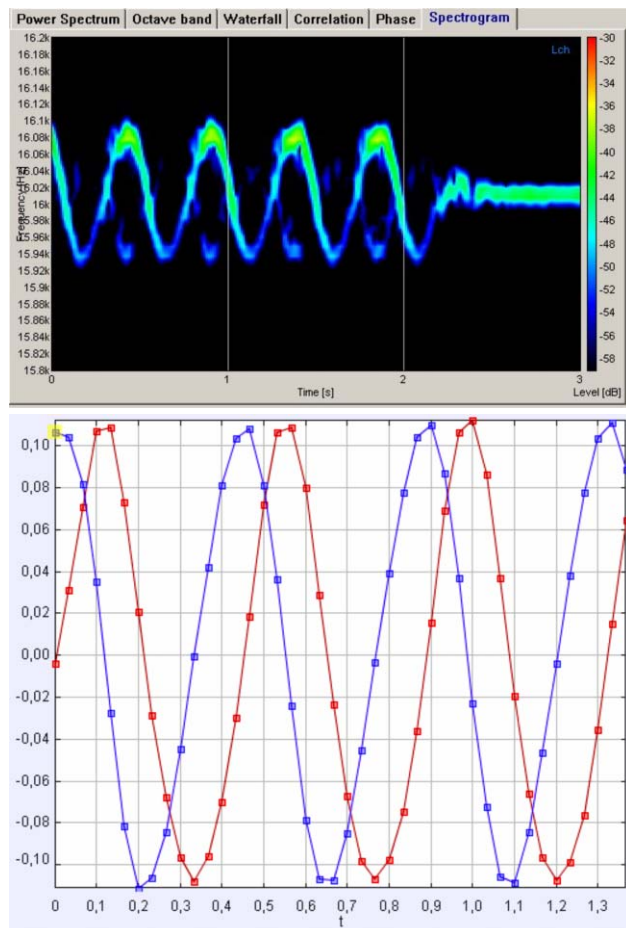
$$f = f_0 \left(1 - \frac{\varphi_0 \omega l \sin(\omega t)}{c} \right), \quad (13)$$

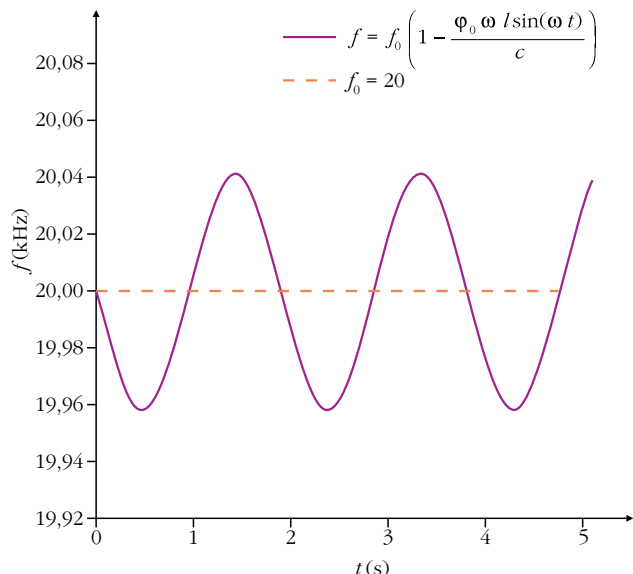
illetve az

$$\begin{aligned} f &= -\frac{\varphi_0 \omega l f_0}{c} \sin(\omega t) + f_0 = \\ &= A' \sin(\omega t) + \text{konst.} \end{aligned} \quad (14)$$

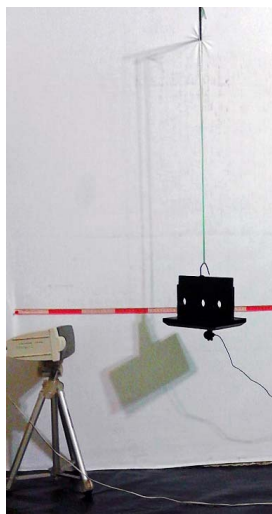
kifejezéseket kapjuk.

6. ábra. Fölül az $f-t$ grafikon (halványan a visszhangok is látszanak), alul a videoanalízissel kirajzoltatott $x-t$ és $y-t$ grafikonok közös rendszerben ábrázolva.





7. ábra. A (13) összefüggés függvényképe a kezdeti értékekkel és az ingás kísérlet összeállítása.



vencia 20 kHz volt. A T periódusidőt az $f-t$ grafikon alapján leolvastuk, amit ezt követően videoanalízissel és stopperes méréssel is ellenőriztünk ($\varphi_0 = 13^\circ$, $T = 1,9$ s, $l = 0,93$ m, $f_0 = 20$ kHz).

Az ingamozgás $f-t$ grafikonjának világosabb részei (8. ábra, fölül) a mikrofon hangszóróhoz közeli félperiódusait jelölik ki.

Egyenes vonalú, egyenletes mozgás

Tudjuk, ez a legegyszerűbb mozgásforma, a mérések során mégis ez okozta a legnagyobb gondot. Ahhoz, hogy értékelhető grafikont kapjunk,

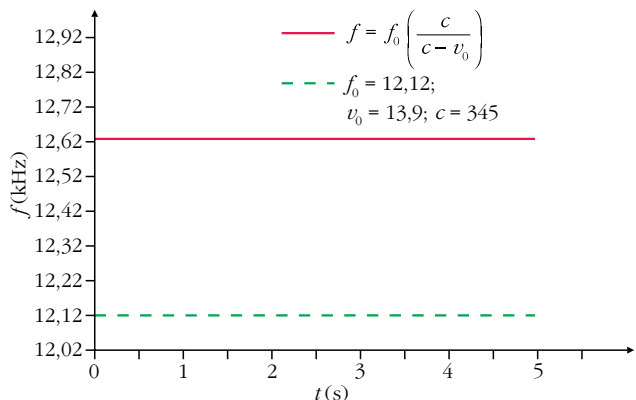
legalább 20 km/h sebességre kell felgyorsítani egy testet, és azt néhány másodpercig tartania is kell. Ehhez legalább 20 méter hosszú szabad területre van szükség, az osztályterem alkalmatlan a kísérlethez. A vezetékes mikrofont vezeték nélkülire kell cserélni. Külső helyszínt választottunk tehát, és egy személyautóval végeztük el a mérést. A terv szerint a kocsi szerelt mikrofon vette volna a nagyobb teljesítményű hangforrás jeleit, amíg a kocsi egyenletesen haladt volna felé. Sajnos a menetszél igen nagy háttérzajt okozott (a grafikon értékelhetetlen lett), így megcseréltük a jeladót és a -vevőt: a mikrofont helyeztük az út szélére és az autó beépített hangszóróit használtuk hangforrásként. Ekkor azonban a (3) helyett az (1) összefüggést kellett felhasználnunk.

A (1) összefüggésbe helyettesítve az egyenes vonalú egyenletes mozgás v_0 sebességét, kapjuk:

$$f = f_0 \left(\frac{c}{c - v_0} \right) = \text{konst.}, \quad (16)$$

ahogy a 9. ábra is mutatja. A (16)-ból kifejezhetjük az egyenletes mozgás sebességét:

9. ábra. A (16) összefüggés grafikonja vízszintes egyenes.



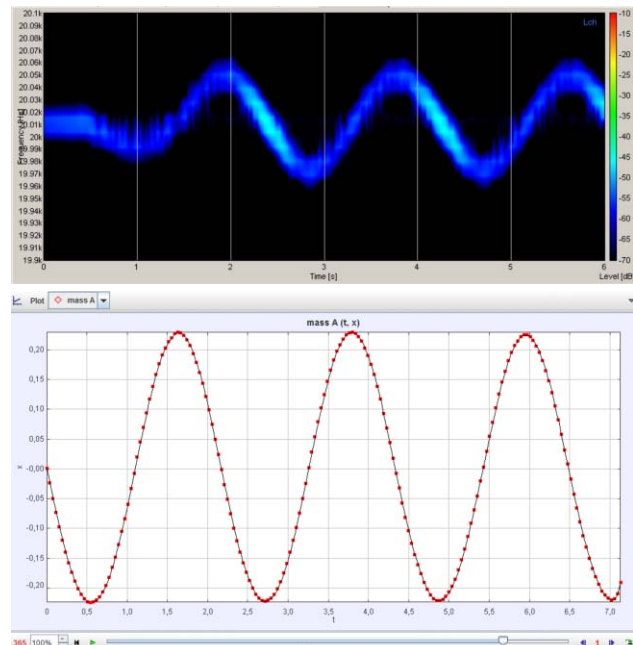
A (14)-ben A' -vel jelölt virtuális amplitúdót is értelmezhetünk, amiből a hangsebességet kifejezve a

$$c = - \frac{\varphi_0 \omega l f_0}{A'} \quad (15)$$

összefüggést kapjuk. A (15) alapján akár hangsebességet is számolhatunk, de a grafikon kiszélesedése miatt csak igen nagy hibával.

Ingatestként a rezgőmozgásnál is alkalmazott viszonylag nehéz, 7 kg-os súlyt alkalmaztuk (7. ábra jobb oldala). A kezdeti kitérítés szögét és az inga hosszát, a szemből készített fotó segítségével, szög- és pixelmérő szoftverrel mértük meg [4], az alapfrek-

8. ábra. Ingamozgás Doppler-képe. Az $f(\text{kHz}) - t(\text{s})$ grafikon képe szinuszhullám, amelynek periodicitása megegyezik az ingamozgás lengésidejével.



$$v_0 = c - \frac{c f_0}{f}. \quad (17)$$

Leolvasható, ha v állandó akkor f is az, azaz amíg a hangforrás (vektoriális értelemben, nem csupán nagyságára nézve) állandó sebességgel mozog, a mikrofon által detektált frekvencia is állandó marad.

A gépkocsi sebességmérője 50 km/h-t mutatott, az $f-t$ grafikon alapján (10. ábra) 45,5 km/h sebességet számoltunk. (Meggjegyezzük, hogy ilyen tempónál minden gépjármű „kilométerórája” a valóságosnál körülbelül 10%-kal magasabb értéket mutat.) A mérést most is videoanalízissel is ellenőriztük.

Konklúzió és a hogyan tovább

A doppleres mérések izgalmasak és különlegesek voltak. Kivitelezésük csak középiskolai matematikatudást igényelt, mégis betekintést engedtek a fizikaképek gazdag világába. Felfedeztük, hogy egy-egy összefüggés más irányú megközelítése nagyon érde-

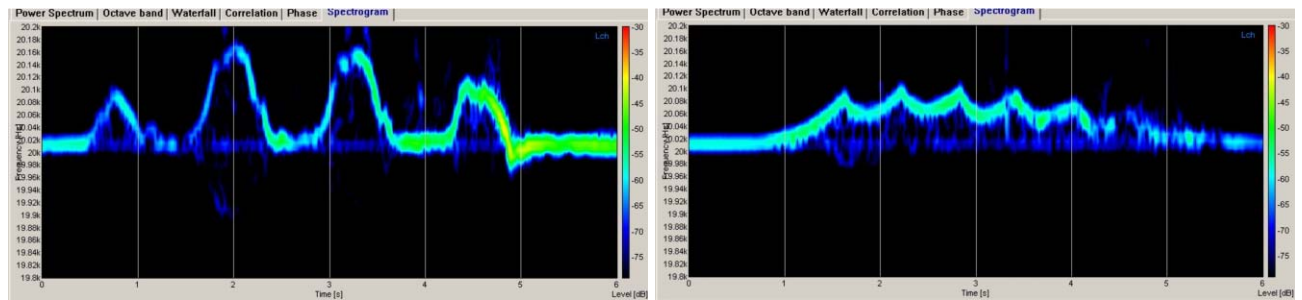
kes lehet és elmélyítheti a fizikai mennyiségek közötti kapcsolatok értelmezését is.

A kísérletezés során sok ötlet hangzott el, de a legeredetibbnek az tűnt, ha a doppleres méréseinket olyan mozgások vizsgálatára tudnánk felhasználni, amelyek más mérésekkel nem, vagy csak nehezen kivitelezhetők (11. ábra). A továbbiakban ilyen mozgástípusok keresésével és mérésével szeretnénk foglalkozni.

A kísérletezés során sok ötlet hangzott el, de a legeredetibbnek az tűnt, ha a doppleres méréseinket olyan mozgások vizsgálatára tudnánk felhasználni, amelyek más mérésekkel nem, vagy csak nehezen kivitelezhetők (11. ábra). A továbbiakban ilyen mozgástípusok keresésével és mérésével szeretnénk foglalkozni.

Irodalom

1. <http://www.ymec.com/products/dssf3e/>
2. <https://www.padowan.dk/download/>
3. <http://physlets.org/tracker/>
4. <http://ngwin.com/picpick>



Jobb egy mentőötlet mint öt mentő egylet

– írta Karinthy Frigyes az egyletistápolás margójára.

Most Társulatunknak lenne szüksége egyletmentő ötletekre!



Ezek az ötletek nem vesznek el, ha a <http://forum.elft.hu> linken, az ELFT stratégiai vitafórumán adjuk elő.

