SZÁMOLÁSI FÜGGELÉK

– Ragasztószalagok leválásának dinamikája: sebességfüggés és instabilitás

Máté Mihály, Nguyen Q. Chinh
ELTE, Fizikai Intézet, Anyagfizikai Tanszék

A ragasztószalagok leválási folyamatainak modellszerű, egységes leírása

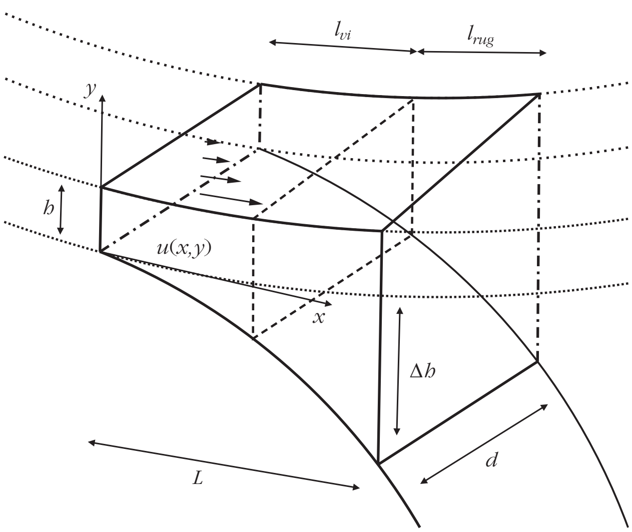
Az általunk javasolt modell egyik alapfeltevése, hogy elemi lépésként a viszkoelasztikus töltőanyag deformációja egy meghatározott térrészben megy végbe, amely a leválás természete miatt különböző leválási sebességű – és emiatt különböző mechanizmusra jellemző – zónákra osztható. Ezt a folyamatot sematikusan mutatja az *F1. ábra*. A szóban forgó térrész egy h töltőanyag-vastagságban, d szalagszélességben elterülő téglatest, amely a szalaggal párhuzamosan, az elválás vonalától L mélységig nyúlik be a töltőanyagba. Továbbá feltételezzük, hogy a leválási folyamat az L hosszúságú szakasz egy részén rideg (rugalmas) leválással, míg másik részén viszkózus folyással megy végbe l_{rug}, illetve l_{vi} nagyságú szakaszokon. Így

$$L = l_{rug} + l_{vi}. \tag{F1}$$

A javasolt modellünk szerint egy beállított, átlagos v sebesség esetén különböző sebességgel és így különböző mechanizmussal válik le az elemi térrész l_{rug} és l_{vi} szakaszán, amelyeken a leváláshoz szükséges részerőt F_{rug} rugalmas, illetve F_{vi} viszkózus erőnek nevezzük. A párhuzamos kapcsolás miatt a kísérletileg mérhető – eredő – F erő a két részerő összege lesz, azaz

$$F(v) = F_{rug}(v) + F_{vi}(v). \tag{F2}$$

F1. ábra. A folyamatok felbontásának sematikus rajza.



Részerők

Rugalmas erő

A rugalmas térfogatban kijelölt kis tégla egytengelyű nyújtására alkalmazva a Hooke-törvényt:

$$\sigma = E\,\varepsilon, \tag{F3}$$

ahol σ az alkalmazott feszültség, ε a relatív deformáció és E pedig a töltőanyag nagyobb sebességtartományokra jellemző Young-modulusa. A

$$\sigma = \frac{F_{rug}}{A} = \frac{F_{rug}}{d\,l_{rug}} \quad \text{és} \quad \varepsilon = \frac{\Delta h}{h}$$

mennyiségekkel az (F3) képlet kifejezhető az F_{rug} erőt és Δh megnyúlást is tartalmazó formában:

$$F_{rug} = E A \frac{\Delta h}{h} = E\,d\,l_{rug} \frac{\Delta h}{h}, \tag{F4}$$

ahol $A = d\,l_{rug}$ a rugalmas térrész keresztmetszete.

Viszkózus erő

Az előbbinél összetettebb folyamat írja le a sűrű töltőanyag belső súrlódásából származó erőt. Tekintsük a d, h, l_{vi} élhosszúságú téglatestet, amelyben a szalag hosszával párhuzamos áramlás valósul meg az elválási él mögött. Feltételezve, hogy az u sebességtér a d szélesség mentén homogén, továbbá a szalaggal párhuzamosan $x \in [0, l_{vi}]$ intervallumban a sebesség nullától lineárisan nő egészen a v leválási sebességig; $y \in [0, h]$ rétegvastagság irányában szintén lineárisan változik a sebesség úgy, hogy h-ban zérus. Ezekkel a feltevésekkel a sebességtér:

$$u(x, y) = \frac{x}{l_{vi}} \frac{h - y}{h} v, \tag{F5}$$

amelynek alapján az $u(x, y)$ y irányú gradiense:

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{x}{h\,l_{vi}} v. \tag{F6}$$

Ennek ismeretében a $\tau = K \dot{\gamma}^n$ egyenletnek megfelelően a τ nyírófeszültség is megkapható,

$$\tau = K \left| \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right|^n = K \left(\frac{x}{h\,l_{vi}} v \right)^n, \tag{F7}$$

amiből pedig az F_{vi} is meghatározható:

$$F_{vi} = \int \tau \,\mathrm{d}A = \int_0^{l_{vi}} \tau\, d\mathrm{d}x = \int_0^{l_{vi}} K d \left(\frac{v}{h\,l_{vi}} \right)^n x^n \,\mathrm{d}x, \tag{F8}$$

vagy egyszerűbb alakban

$$F_{vi} = \frac{K\, d\, l_{vi}}{h^n (n+1)} v^n. \quad \text{(F9)}$$

Az eredő erő sebességfüggése

Az általunk javasolt modell másik lényeges pontja az eredő erő sebességfüggéséhez szükséges l_{vi} és l_{rug} hosszúságok sebességfüggésének megadása. Az előbbiekben tárgyalt szerkezetváltozásból és tapasztalatokból mondható, hogy a nagyon kicsi sebességek tartományában szinte csak a viszkózus folyás határozza meg a leválási folyamatot. A sebesség növekedésével a rugalmas tartomány kiszélesedik. A nagy sebességek tartományában pedig a rugalmas deformáció fogja meghatározni a leváláshoz szükséges erőt.

Ilyen megfontolások, valamint az (F1) összefüggés alapján a két keresett hosszúság sebességfüggésének olyannak kell lennie, hogy

$$\begin{aligned} l_{vi} &\to L, \ \text{ha} \ v \to 0 \ \text{és} \\ l_{rug} &\to L, \ \text{ha} \ v \to \infty. \end{aligned} \quad \text{(F10)}$$

Így kézenfekvő, hogy a két szakasz hosszúságát telítési függvénnyel írjuk le, oly módon, hogy a modellben feltételezett aktuális térrész L karakterisztikus hosszúságát állandónak tartjuk. Tekintsük egy elemi – L hosszúságú – anyagdarab leválását eredményező kötések felszakadását! Az l_{vi} sebességfüggésének értelmezésében abból indulunk ki, hogy az említett termikus aktiválás hatása mellett a t időpontban még nem felszakadt kötések N száma kis $\mathrm{d}t$ idő alatt $\mathrm{d}N$-nel változik, és

$$\begin{aligned} \mathrm{d}N \propto \mathrm{d}t \ \text{ és } \ \mathrm{d}N &\propto N, \\ \mathrm{d}N &= -\alpha\, N \mathrm{d}t, \end{aligned} \quad \text{(F11)}$$

ahol α egy állandó. Ebben a megfontolásban hallgatólagosan feltételezzük, hogy az L karakterisztikus hosszúságnak megfelelően összesen N_0 kötést kell felszakítani a leválási folyamatban. Az (F11) egyenletből könnyen kiszámítható, hogy a t időpontban még nem felszakadt kötések száma:

$$N = N_0 \exp(-\alpha\, t), \quad \text{(F12)}$$

amiből a viszkózus folyamat során felszakadt kötések N_{fel} számát a következő formulával kapjuk:

$$N_{fel} = N_0 \left[1 - \exp(-\alpha\, t)\right]. \quad \text{(F13)}$$

A modellben feltételezett l_{vi} szerepéről könnyen belátható, hogy

$$\frac{l_{vi}}{L} = \frac{N_{fel}}{N_0} = 1 - \exp(-\alpha\, t), \quad \text{(F14)}$$

amiből pedig

$$l_{vi} = L\left[1 - \exp(-\alpha\, t)\right]. \quad \text{(F15)}$$

Az állandó v sebességű leválási folyamat során nyilvánvalóan az l_{vi} (és l_{rug}) hosszúságok értéke stacionárius lesz. Azonban feltételezhető, hogy a stacionárius állapot beállásához szükséges t idő függ a v sebességtől. Nagyobb t kis v mellett valósítható meg és fordítva. Így fordított arányosságot feltételezve az (F15) összefüggés átírható úgy, hogy

$$l_{vi} = L\left[1 - \exp\left(-\frac{v_0}{v}\right)\right] \quad \text{(F16.a)}$$

és ezzel együtt

$$l_{rug} = L \exp\left(-\frac{v_0}{v}\right), \quad \text{(F16.b)}$$

ahol v_0 a felszakadási folyamat időbeli lefolyásának gyorsaságát kifejező állandó.

Az (F16.a) és (F16.b) kifejezéseket az (F9), illetve (F4) formulákba behelyettesítve, az (F2) egyenlet alapján a ragasztószalag leválásának konstitutív egyenletét a következő alakban kapjuk:

$$\begin{aligned} F(v) = {} & \frac{d\, E\, \Delta\, h\, L}{h} \exp\left(-\frac{v_0}{v}\right) + \\ & + \frac{d\, K\, L}{h^n (n+1)} \left[1 - \exp\left(-\frac{v_0}{v}\right)\right] v^n. \end{aligned} \quad \text{(F17)}$$

Érdemes belátni, hogy a (17) konstitutív egyenletet az alábbi módon is kifejezhetjük:

$$\begin{aligned} F(v) = {} & \frac{d\, E\, \Delta\, h\, L}{h} p_{rug}(v) + \\ & + \frac{d\, K\, L}{h^n (n+1)} v^n p_{vi}(v), \end{aligned} \quad \text{(F18)}$$

ahol

$$p_{vi} = 1 - \exp\left(-\frac{v_0}{v}\right), \quad \text{(F19.a)}$$

$$p_{rug} = \exp\left(-\frac{v_0}{v}\right), \quad \text{(F19.b)}$$

amely mennyiségek a viszkózus folyás, illetve a rugalmas deformáció (rideg leválás) bekövetkezési valószínűségét jelölik. Ezzel a makroszkopikusan mérhető F erő – mint várható érték – valószínűségi értelmezést kap és az (F17), illetve az (F18) alakban írható. Ez az általunk javasolt konstitutív egyenlet fizikai jelentése. A valószínűségi kép minden bizonnyal érthetőbbé teszi és alátámasztja a téglatestté absztrahált deformációs térrészek nehezen elképzelhető dinamikáját.