

CSATOLT REZGÉSEK

Kedves barátom, Skrapits Lajos tanár úr emlékére

Schipp Ferenc
ELTE IK Numerikus Analízis Tanszék

A szabadon eső rugó fizikája

Húsz évvel ezelőtt az ELTE Általános Fizika Tanszék hagyományos téli visegrádi konferenciáján *Skrapits* tanár úr egy érdekes, és első pillanatra meglepő, kísérletet mutatott be. A kísérletet filmen rögzítették, azt *Medgyessy Gábor*, a tanszék mérnöke gondosan megőrizte és rendelkezésemre bocsátotta. Az 1. és 2. ábra képei a film alapján készültek.

Az 1. ábra bal oldalán egy felfüggesztett hosszú rugó látható, amely súlyánál fogva 1,29 méterre megnyúlik és felveszi egyensúlyi helyzetét. Skrapits tanár úr elégeti a tartó szálat és a 2. ábra 8 felvétele mutatja, mi történik ezután. Látható, a rugó oly módon húzódik össze, hogy az alja egy ideig (0,3 másodpercig) helyben marad. Miután a rugó teteje eléri az alját az egész szabadon esik tovább. A kísérlet során készített felvétel alapján rekonstruált rugóadatokat a 2. ábra képein tüntettük fel.

A matematikai modellben a rugót N részre bontva az $x_k(t)$ ($t \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, N$) függvényekkel leírjuk

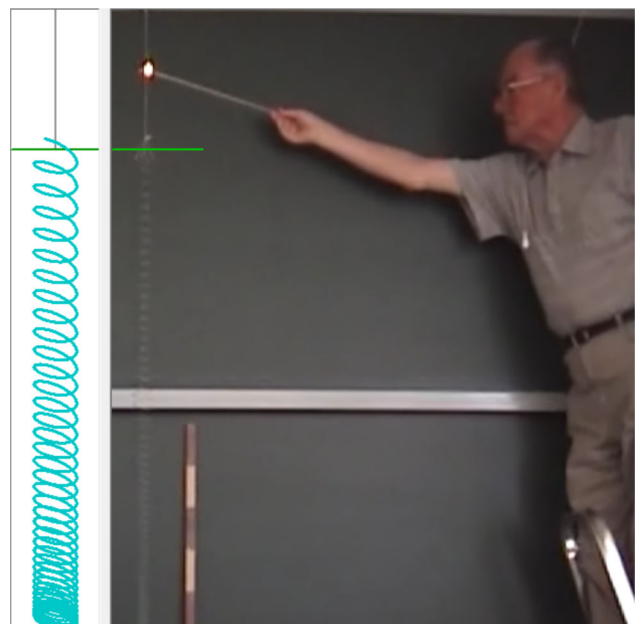


Schipp Ferenc Széchenyi-díjas matematikus az ELTE IK Numerikus Analízis Tanszék professzor emeritusa, az MTA doktora. Több mint 150 tudományos dolgozat, két angol nyelvű monográfia és számos egyetemi tankönyv és jegyzet szerzője, illetve társszerzője. Többek között a harmonikus és diadikus analízis, a Fourier-sorok, a rendszer- és irányításelmélet, a numerikus módszerek, a jel- és képfeldolgozás elméleti kérdéseivel és alkalmazásaival foglalkozik.

az m tömegű részek időbeli mozgását. A k -ik tömegpontra a gravitációs erő és a csatlakozó egy vagy két rugó feszítő ereje hat. Ha $1 < k < n$, akkor a k -ik tömegpontra az alatta és felette lévő rugók feszítő ereje, míg az N -ikre csak a felette lévő, az elsőre pedig rögzített esetben a gravitációs erőn kívül a rögzítő fonál is hat.

Azonos d rugóállandókat feltételezve és az egyes tömegpontokra felírva Newton 2. törvényét a csatolt

1. ábra



rezgéseket leíró alábbi lineáris inhomogén differenciálegyenlet-rendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_1 &= F + m g + d(x_2 - x_1) \\ &\vdots \\ m \ddot{x}_k &= m g + d(x_{k+1} - x_k) - d(x_k - x_{k-1}) \\ &\vdots \\ m \ddot{x}_N &= m g - d(x_N - x_{N-1}), \end{aligned} \quad (1)$$

ahol F a fonál által kifejtett erőt jelöli és $1 < k < N$. Az (1) differenciálegyenlet-rendszer a

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + b$$

hullámegyenlet diszkretizációjából is származtatható, ha a $\partial^2 x / \partial y^2$ parciális deriváltat a

$$(\Delta^2 x)_n := x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} \quad (2)$$

$$(x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N, n = 1, 2, \dots, N)$$

másodrendű differencia-operátorral helyettesítjük, ahol az $x \in \mathbb{R}^N$ vektort az $x_0 := x_1, x_{N+1} := x_N$ szabály (diszkrét peremfeltétel) szerint kiterjesztjük. Ezt felhasználva az (1) differenciálegyenlet-rendszer

$$\ddot{x}(t) = \alpha^2 (\Delta^2 x)(t) + b \quad (x(t) \in \mathbb{R}^N) \quad (3)$$

alakba írható át. Az $x^0 \in \mathbb{R}^N$ vektort a (3) differenciálegyenlet-rendszer *egyensúlyi helyzetének* nevezzük, ha megoldása az

$$\alpha^2 \Delta^2 x^0 + b = 0 \quad (4)$$

lineáris algebrai egyenletrendszernek. Ekkor a $\phi_0(t) := x^0$ ($t \geq 0$) konstans függvény nyilván megoldása (3)-nak. Könnyű belátni, és fizikai jelentés alapján nyilvánvaló, hogy a (4) egyenletrendszernek csak akkor van megoldása, ha $F = -Nmg$ és ekkor

$$x_n^0 = \frac{1}{2} (2N - n)(n - 1) \frac{g m}{d} \quad (5)$$

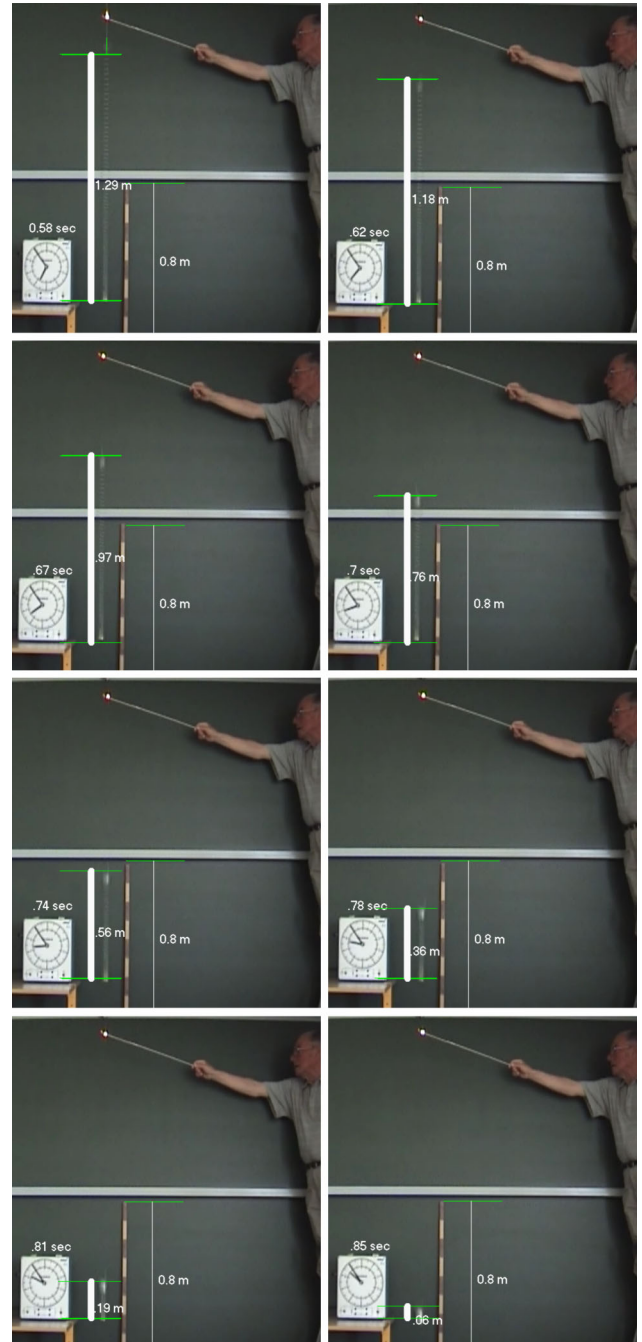
$$(n = 1, 2, \dots, N)$$

kielégíti a (4) egyenletet, amiről közvetlenül is meggyőződhetünk. A filmről készült fényképeken a rugó rozszul látható, ezért azt az egyensúlyi feltételből adódó (5) kezdeti feltételek alapján rekonstruáltuk és az 1. ábrán szemléltettük a kezdeti időpont állapotát.

Áttérve az $y_n(t) := x_{n+1}(t) - x_n(t)$ ($t \geq 0, 1 \leq n < N$) különbségekre (3) a következő

$$\ddot{y}(t) = \mathbf{A} y(t) + b^1, \quad (6)$$

$$\ddot{x}_1(t) = g + \frac{F}{m} + \alpha^2 y_1(t) \quad (y(t) \in \mathbb{R}^{N-1})$$

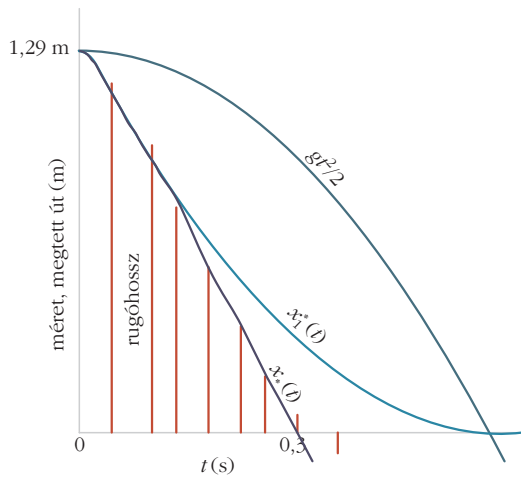
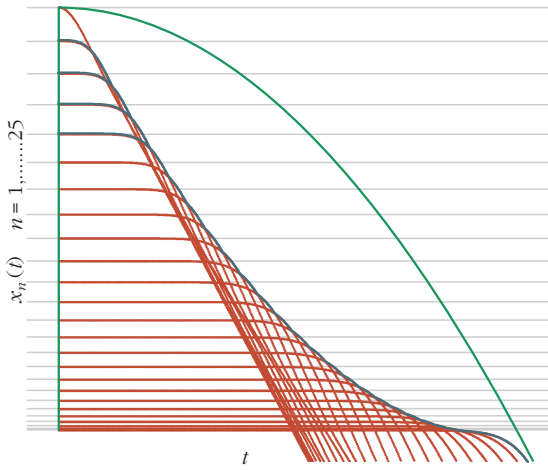


2. ábra

differenciálegyenlet-rendszerre vezethető vissza, ahol $b_n^1 := b_{n+1} - b_n$ ($1 \leq n < N$), továbbá

$$\mathbf{A} := \mathbf{A}_{N-1} := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

és $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$.



3. ábra. Az egyes elemi rugódarabok esése (föül) és a rugó összehúzódása, az $x(t) = \max\{x_n(t) : 1 \leq n \leq 5\}$ közelítés, az x_1^* alsó burkoló, valamint a szabadesés grafikonja (alul).

Az \mathbf{A} tridiagonális mátrixokat széles körben alkalmazták differenciálegyenletek numerikus megoldásában [3–5]. *Egerváry Jenő* elsőként felismerve jelentőségüket, akadémiai székfoglalójában [2] külön fejezetben foglalkozik ezekkel, meghatározva sajátértékeiket és sajátfüggvényeiket. Ezeket felhasználva az $x_n(t)$ ($t \geq 0$) függvények explicit alakban adhatók meg:

$$x_n(t) = \frac{1}{2} g t^2 + \phi_n(t),$$

$$\phi_n(t) := \frac{g m}{d} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\theta_1 \left(\frac{j\pi}{N} \right) - \theta_n \left(\frac{j\pi}{N} \right) \cos(\alpha \omega_j t) \right) \quad (8)$$

($t \geq 0$),

ahol

$$\omega_j := 2 \sin \left(\frac{j\pi}{2N} \right),$$

$$\theta_n(x) := \frac{\cos((n-1/2)x) \cos(x/2)}{2 \sin^2(x/2)} \quad (9)$$

$$\left(\alpha = \sqrt{\frac{d}{m}}, \quad 0 < x < \pi, \quad 1 \leq n \leq N \right).$$

Az \mathbf{A}_{N-1} sajátértékei a $\lambda_k = -\omega_k^2$ ($1 \leq k < N$) számok, a $v_k = (v_{1k}, v_{2k}, \dots, v_{(N-1)k})^T$, $v_{jk} := \sin(jk\pi/N)$ ($1 \leq j, k < N$) sajátvektorai azonosíthatók a diszkrét trigonometrikus rendszerrel. Ennek és az (5) speciális kezdeti feltételnek köszönhetően felhasználhatók a konjugált Dirichlet- és Fejér-féle magfüggvények [6], [8] és ennek alapján megkaphatjuk a (8) zárt formulát.

A 3. ábrán szemléltetjük az $x_n(t)$ ($t \geq 0$) függvények grafikonját $N = 25$ választás mellett és ugyanitt ábrázoltuk a $g t^2/2$ ($t \geq 0$) függvényt. A kinyújtott rugó hosszát $x_{25}^0 = 1,29$ méternek véve $\alpha = 47,8 \text{ s}^{-1}$ -nek adódik.

A kísérleti eredmény úgy interpretálható, amint azt az ábra is mutatja, hogy az $x_n(t)$ függvények egy n -től függő $[0, t_n]$ intervallumon közelítőleg állandók. Ez azon meglepő tulajdonság következménye, hogy az x_n -ek a $t = 0$ pontban $(2n-1)$ -ed rendben érintkeznek a konstans függvénnyel:

$$x_n^{(j)}(0) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 2n-1), \quad (10)$$

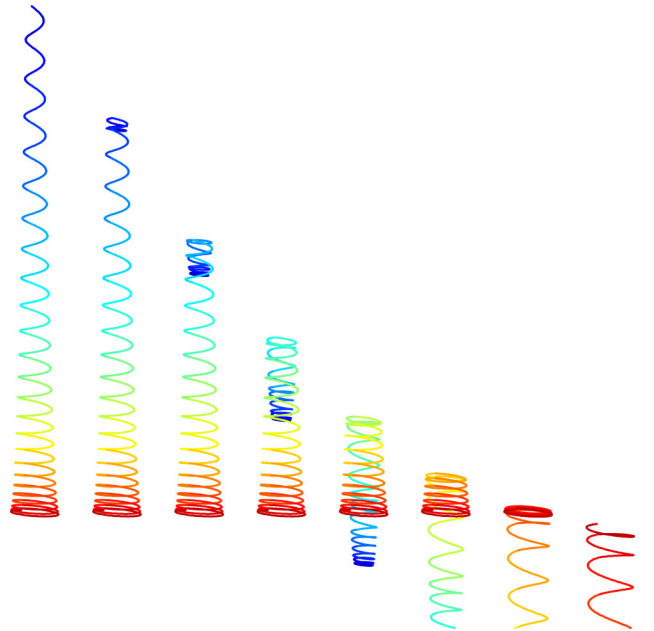
$$x_n^{(2n)}(0) \neq 0.$$

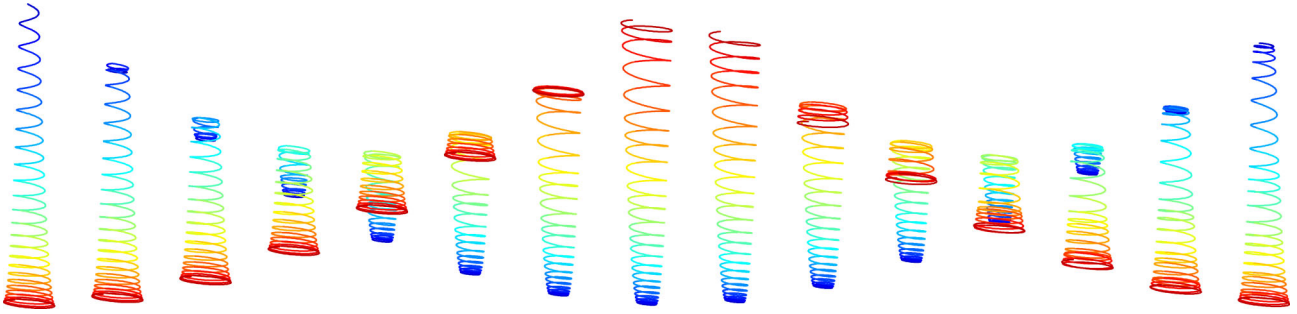
Megjegyzem, a 3. ábra alapján látható, hogy a tömegpontok az esés során ütköznek és erről a leírt modell nem ad számot. Érdeemes lenne ezt figyelembe véve módosítani az itt ismertetett modellt. Az $x_n(t)$ ($t \geq 0$ és $1 \leq n \leq N$) függvények helyett a

$$x_n^*(t) := \min\{x_k(t) : n \leq k \leq N\}$$

alsó burkolókat véve a rugó összehúzódásának egy jobb leírását kapjuk. Ezeket szemléltetjük a 3. ábrán. A numerikus számítások azt mutatják, hogy az alsó burkolóknak létezik határértéke, ha $N \rightarrow \infty$. $N = 25$ esetén már a határérték egy jó közelítését kapjuk. A 3. ábra alsó részén a kísérleti adatokat, az $x_1^*(t)$ ($t \geq 0$), valamint az $x(t) = \min_{1 \leq n \leq 5} x_n(t)$ ($t \geq 0$) függvény

4. ábra. Csonkakúp alakú rugó esése.





5. ábra. Csonkakúp alakú rugók rezgései a mozgó koordinátarendszerben.

grafikonját szemléltetjük, amely a mérési adatok egy jobb közelítését adja.

A jelzett probléma formális kezelése helyett a modellt a részek ütközését leíró feltétellel kellene kiegészíteni. Erre történik kísérlet a folytonos modell esetén az [1, 7] dolgozatokban.

Az itt bemutatott modell egy csonkakúp alakú rugó szabadesését írja le. Ebben az esetben a rugó részei nem ütköznek egymással. A (8) összefüggések alapján könnyen készíthetünk olyan animációkat, amelyek hűen tükrözik a kifeszített, csonkakúp alakú rugók szabadesését. A 4. és 5. ábrák az animációs program felhasználásával készültek.

Az 5. ábrán a $\phi_n(t)$ ($t \geq 0$ és $1 \leq n \leq N$) függvények grafikonját szemléltetjük. Ezek írják le a rugó rezgéseit a (szabadon eső) mozgó koordinátarendszerben.

Felhasználva a szóban forgó differenciálegyenlet-rendszer speciális tulajdonságait a meglepő fizikai jelenség matematikai hátterét jelentő (10) tulajdonságot anélkül igazolhatjuk, hogy a differenciálegyenlet-rendszert megoldanánk.

A rugó egyensúlyi helyzetből induló szabadesését leíró kezdetiérték-probléma:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \alpha^2 \Delta^2 x + b(0), \\ x(0) &= x^0 \quad (\Leftrightarrow \alpha^2 \Delta^2 x^0 + b(F) = 0), \\ \dot{x}(0) &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

következésképpen

$$\ddot{x}(0) = b(0) - b(F) := c.$$

Megjegyezzük, hogy a c vektor koordinátáira

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{-F}{m}, \\ c_k &= 0 \quad (2 \leq k \leq N). \end{aligned}$$

Ennek alapján a megoldás Taylor-sorát explicit alakban írhatjuk fel. Nevezetesen a (11) egyenletről $2k$ -szor differenciálva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x^{(2k+1)}(0) &= 0, \\ x^{(2k+2)}(0) &= \alpha^{2k} \Delta^{2k} (x^{(2)}(0)) = \alpha^{2k} \Delta^{2k} c \quad (k \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Innen a $c_l = 0$ ($l > 1$) feltételt figyelembe véve adódik (10).

A matematikai modelltől több érdekes trigonometrikus összefüggés következik. Például a (3) kezdeti feltétel ekvivalens az

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (2N - n)(n - 1) &= \sum_{j=1}^{N-1} \left(\theta_1 \left(\frac{j\pi}{N} \right) - \theta_n \left(\frac{j\pi}{N} \right) \right) \\ (1 < n < N) \end{aligned}$$

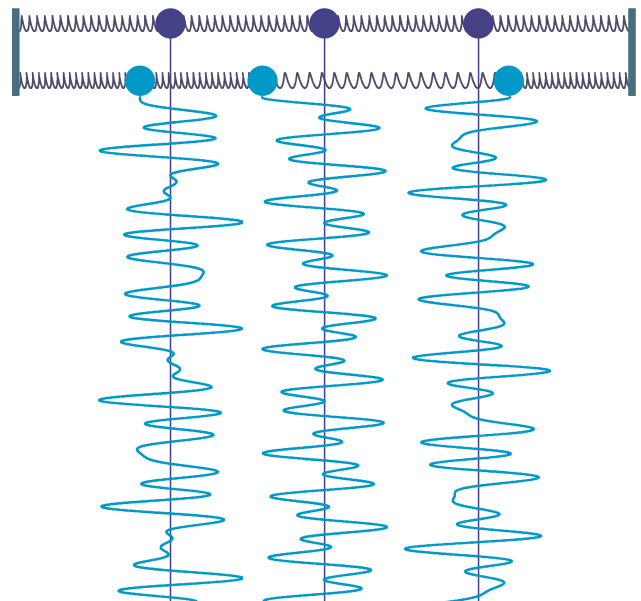
egyenlőséggel. Ezek az egyenlőségek elemi eszközökkel igazolhatók. Ugyancsak elemi eszközökkel megmutatható, hogy a (8)-ban adott függvények $F = 0$ esetén kielégítik az (1) differenciálegyenlet-rendszert.

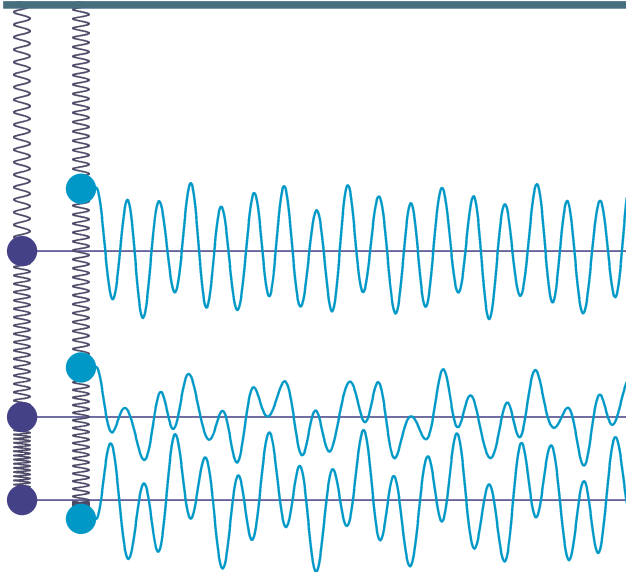
Csatolt rezgések

Hasonló egyenletekkel írhatók le a mindkét végpontjában rögzített, illetve egy szabad végponttal rendelkező csatolt rezgések:

$$\begin{aligned} \text{i) } \ddot{x}(t) &= \alpha^2 \mathbf{A} x(t) + b, \\ \text{i') } \ddot{x}(t) &= \alpha^2 \tilde{\mathbf{A}} x(t) + \tilde{b} \quad (t \geq 0), \end{aligned} \quad (12)$$

6. ábra. Rögzített végpontú rendszer rezgései.





7. ábra. Szabad végpontú rendszer rezgései a gravitációs erőterében.

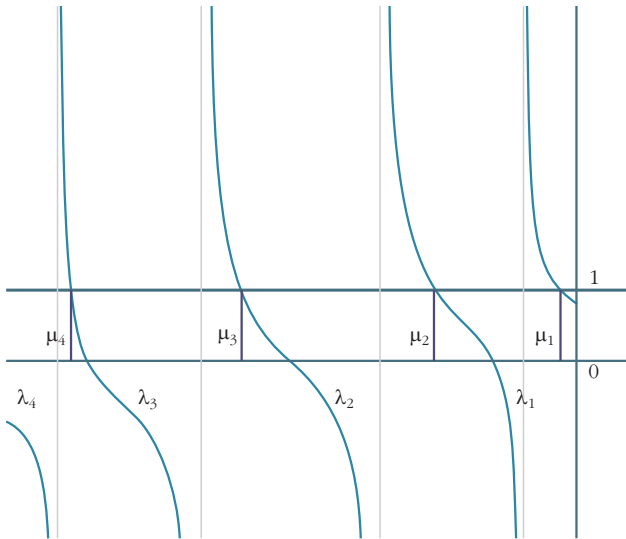
ahol az $\tilde{\mathbf{A}}$ mátrix abban különbözik az \mathbf{A} -tól, hogy ennek jobb alsó eleme helyén -2 helyett -1 áll.

Az i) differenciálegyenlet-rendszer egy rögzített végpontú csatolt rendszer rezgéseit írja le. Ennek egyensúlyi helyzetét és megoldásait szemléltetjük a 6. ábrán.

A 7. ábrán egy három rugóból álló, egy szabad végponttal rendelkező rendszer egyensúlyi állapotát, és az abból kimozdított rendszer rezgéseit, az i) differenciálegyenlet-rendszer megoldásait, szemléltetjük.

Az $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{N-1}$ mátrix $\lambda_k = -\omega_k^2$ ($1 \leq k < N$) sajátértékei és $v_k = (v_{1k}, \dots, v_{(N-1)k})^T$ sajátvektorait felhasználva egyszerűen meghatározhatók az $\tilde{\mathbf{A}}$ mátrix $\mu_k := \tilde{\lambda}_k$

8. ábra. Az F_μ függvény grafikonja és a λ_k, μ_k sajátértékek.



($1 \leq k < N$) sajátértékei és \tilde{v}_k ($1 \leq k < N$) sajátvektorai. Nevezetesen a sajátértékek az

$$F_\mu(z) := \sum_{j=1}^{N-1} \frac{|v_{j(N-1)}|^2}{z - \lambda_j} = 1$$

$$(z \in \mathbb{R}, z \neq \lambda_j, 1 \leq j < N)$$

egyenlet megoldásai:

$$F_\mu(\mu_k) = 1 \quad (1 \leq k < N),$$

$$\lambda_{N-1} < \mu_{N-1} < \dots < \lambda_1 < \mu_1 < 0.$$

A 8. ábra alapján nyilvánvaló, hogy a szóban forgó egyenletnek pontosan $N-1$ megoldása létezik, amelyek (például intervallum-felezéssel) egyszerűen meghatározhatók.

A sajátvektorok:

$$\tilde{v}_k = \left(\frac{v_{1(N-1)}}{\mu_k - \lambda_1}, \dots, \frac{v_{(N-1)(N-1)}}{\mu_k - \lambda_{N-1}} \right) \quad (1 \leq k < N). \quad (13)$$

Ezeket felhasználva felírhatjuk az i) nulla sebességgel indított (az $\dot{x}_n(0) = 0, 1 \leq n < N$) kezdeti feltételnek megfelelő megoldásait:

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{N-1} c_k v_{nk} \cos(\alpha \omega_k t) + x_n^0 \quad (14)$$

$$(1 \leq n < N, t \geq 0),$$

ahol x^0 az i) egyenlet egyensúlyi helyzete, és a c_k állandók a helyre vonatkozó kezdeti feltételek alapján határozhatók meg. A $\tilde{\lambda}_k = -\omega_k^2$ jelöléssel hasonló formulák adódnak az i) megoldásaira. Ezek alapján készültek a 6. és 7. ábra grafikonjai.

Irodalom

1. R. C. Cross, M. S. Wheatland: Modelling a falling slinky. *arXiv:1208.4629v1*, 2012.
2. Egerváry Jenő: Mátrix függvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról. (Akadémiai székfoglaló, 1953. I. 5.) *MTA III. Mat. Fiz. Osztály Közleményei* (1953) 417–458.
3. Kátai Imre: *Numerikus analízis*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.
4. Rózsa Pál: *Bevezetés a mátrixelméletbe*. Typotex Kiadó, Budapest, 2009.
5. Stoyan Gisbert, Takó Galina: *Numerikus módszerek I, II*. ELTE-TypoTEX, Budapest, 1995.
6. Szőkefalvi-Nagy Béla: *Valós függvények és függvénysorok*. Polygon, Szeged, 2002.
7. W. G. Unruh: The Falling Slinky. *arXiv:1110.4368v1*, 2011.
8. A. Zygmund: *Trigonometric series*. Cambridge University Press, New York, NY, 1959.

Szerkesztőség: 1092 Budapest, Ráday utca 18. földszint III., Eötvös Loránd Fizikai Társulat. Telefon/fax: (1) 201-8682

A Társulat Internet honlapja <http://www.elft.hu>, e-postacímje: elft@elft.hu

Kiadja az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, felelős: Szatmáry Zoltán főszerkesztő.

Kéziratokat nem őrünk meg és nem küldünk vissza. A szerzőknek tiszteletpéldányt küldünk.

Nyomdai előkészítés: Kármán Stúdió, nyomdai munkálatok: OOK-PRESS Kft., felelős vezető: Szatmáry Attila ügyvezető igazgató.

Terjeszti az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, előfizethető a Társulatnál vagy postautalványon a 10200830-32310274-00000000 számú egyzámlán.

Megjelenik havonta, egyes szám ára: 800.- Ft + postaköltség.

HU ISSN 0015–3257 (nyomtatott) és HU ISSN 1588–0540 (online)