Szabály a szabálytalanban

Fraktálok

mindentudás az iskolában

Ha körülnézünk a szobánkban, elsőre csupa ismerős, szabályos, „euklideszi” formát látunk: az asztal lábai hasáb vagy henger alakúak, a teteje egy négyzet, vagy téglalap, a kicsit komplikáltabb tárgyak, mint például egy telefon vagy számítógép is néhány egyszerű forma kombinációjából áll. Persze ha szemünk rátéved a falon függő tájképre, már változik a helyzet, hiszen azon általában mindenféle kusza, cizellált formák is előfordulnak: a felhők pereme többnyire nagyon kacskaringós, és a bokrok, fák, hegygerincek ábrázolásai is gazdag, szabálytalan részleteket tartalmaznak.

Tehát az ember egyszerű, szabályos alakú tárgyakat készít, de az élő és élettelen természetben tipikusan nem szabályos, egyszerű formák fordulnak elő, hanem sokkal jellemzőbb rájuk a sok kis részlet, az adott szabályszerűség szerint ismétlődő mintázat. A komplikált alakzatok geometriájának ugyanis megvannak a saját törvényei. Döntő többségük *önhasonló,* ami azt jelenti, hogy egy kis részletük közelről nézve olyan, mint az egész objektum.

A képen *Jackson Pollock* világhírű amerikai festő *Levendula színű pára, No 1* című munkája látható. A *Nature* folyóirat 2006. februári számában ismertetik, hogy néhány újonnan előkerült, Pollocknak tulajdonított festmény eredetiségvizsgálatakor nagymértékben figyelembe vették Pollock ismert, eredeti képeinek jellegzetes fraktálgeometriai tulajdonságait.

Képzeljünk el egy tipikus, nagyméretű fakoronát, ahogy az télen kinéz: nagyon bonyolult, hiszen sok ezer kisebb-nagyobb ágat tartalmaz. Ha képzeletben kiragadjuk a fa valamelyik ágát, és éppen annyival nézzük közelebbről, mint ahányszor kisebb, mint az eredeti fa, akkor nagyjából (úgy mondjuk: statisztikai értelemben véve) ugyanazt látjuk, mintha az eredeti fát néznénk. Ezt a tulajdonságot hívjuk önhasonlóságnak, és a tipikus *fraktálok önhasonlóak.* Ha ugyanezt valamilyen egyszerűbb alakzattal próbáljuk megcsinálni, nagyon mást tapasztalunk. Vegyünk például egy számot, a 8-at. „Középtávolságról” egy értelmes jelet, magát a számot látjuk. Ha kivágjuk egy részét, akkor vagy egy kis x-szerűséget, vagy valamiféle görbe vonaldarabot kapunk. Aztán meg, minél közelebbről nézzük (minél kisebb darabját vágjuk ki), annál inkább kezd hasonlítani az, amit látunk, egy egyenes vonaldarabkára. Ezeket azután hiába nagyítjuk fel az eredeti 8-as méretére, az alakjuk teljesen más lesz.

Az alábbi képet ennek a cikknek az írása közben készítettem (lementem az utcára és kerestem egy, a célnak megfelelő fát, majd egy képszerkesztővel kivágtam és felnagyítottam belőle részeket), ezzel is próbálván demonstrálni, hogy mennyire spontán módon kerülhetünk kapcsolatba fraktálokkal, és győződhetünk meg geometriájuk önhasonlóságáról. Ha most a hagyományos eszközeinkkel jellemezni akarnánk a fa geometriáját, és a burkolójára koncentrálnánk, gömbszerűnek neveznénk, míg ha az ágacskákat tartanánk jellemzőbbnek, akkor inkább a vonal fogalmát használnánk, bár nyilvánvaló, hogy a valódi szerkezet valahol a kettő között van. A gömb háromdimenziós, a vonal egydimenziós, de hány dimenziós a fa koronája?

Faágak fraktálszerkezete

Képzeljük most el, hogy az alakzataink kis egységekből állnak. Ha most összehasonlítjuk, hogy egy kétszer akkora lineáris kiterjedésű vonalban hányszor több részecske van, azt találjuk, hogy kétszer annyi. Egy kétszer akkora kiterjedésű (átmérőjű) gömbben pedig nyolcszor annyi részecske van, mert a közönséges objektumokban levő részecskék száma $N(L)$ (tömegük, térfogatuk) a kiterjedésük (L) egész számú hatványával nő:

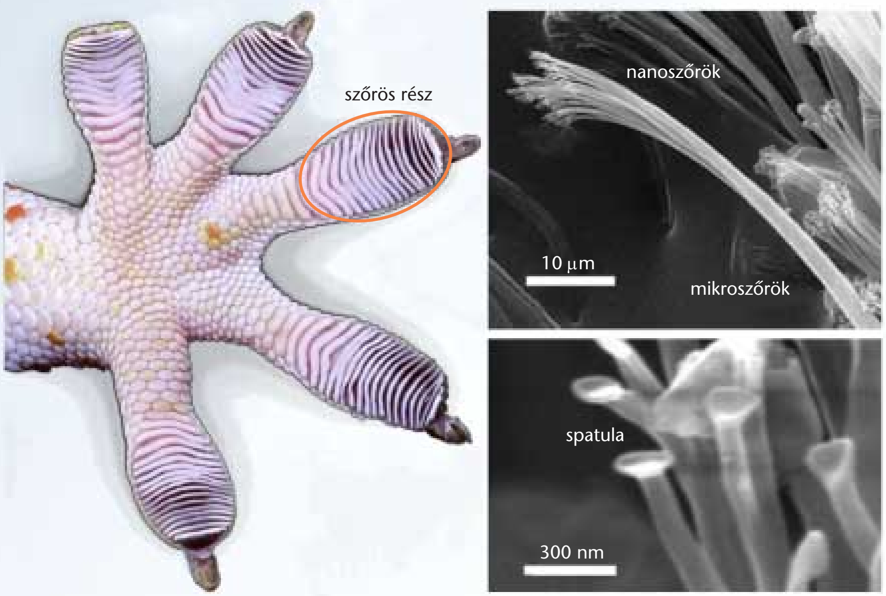
$$N(L) \sim L^d \qquad (d = 1,\ 2 \text{ vagy } 3),$$

ahol ~ az arányosság jele. Ha azonban most elképzeljük, hogy a fa koronájának egyre nagyobb kiterjedésű részeiben határozzuk meg a „részecskék” számát (az ágakat úgy tekinthetjük, mintha egységnyi térfogatú kis részekből állnának), azt tapasztaljuk, hogy az így mért részecskeszámra (tömegre, térfogatra) az alábbi összefüggés áll fent:

$$N(L) \sim L^D,$$

ahol D egy tört szám valahol 1 és 3 között. Ez a szám tört (latinul *fractio*), és az alakzat tömegének mérésére használt formulánkban ott szerepel, ahol euklideszi alakzatokra a közönséges dimenzió, ezért D-t *fraktáldimenzió*nak nevezzük. Egy fa jellegű, nagyon komplikált, önhasonló alakzat dimenziója tehát tört szám. Ezt nehéz elképzelni, de ugyanakkor ésszerűnek is tűnik. Az eredmény, amit a dimenzióra kapunk, ugyanis valahol a vonalra jellemző 1 és a gömbre vonatkozó 3 között van, és valóban, ez igaz arra a benyomásra, amit a fa koronája kelt bennünk.

Ha csak a fák és a felhők volnának fraktálszerkezetűek, valószínűleg nem volna az érdeklődés olyan nagy az ilyen fajta geometria iránt. Azonban számos olyan fizikai és élővilágbeli folyamat van, amelyek fraktáltulajdonságai meghatározóak a hétköznapjaink szempontjából is. Az áramlásokkal és az általuk nagyban befolyásolt időjárással kapcsolatos jelenségek számos törtdimenziójú struktúrát generálnak. Elég a turbulens folyadékok által kirajzolt komplex örvénymintázatokra vagy a rövid, de középtávon is véletlenszerűen fluktuáló, rendkívül részletgazdag hőmérsékleti grafikonokra gondolnunk. De a tőzsdei árfolyamok ingadozása is fraktálgörbét rajzol ki.



Gekkóláb, végén a szőrökkel, illetve azok szerkezete elektronmikroszkóppal vizsgálva.

De a fraktálok jelentőségét leginkább talán azzal lehet érzékeltetni, hogy számba vesszük, hányféle fraktálalakzat létezik mindannyiunk testében. A fák szerkezetéhez hasonlít érhálózatunk, és sokszorosan elágazó nyúlványokkal rendelkező idegsejtjeink is. A fraktáltulajdonság az időben is megjelenik. Egy adott idegsejt pillanatszerű elektromos impulzusokat produkál, úgy mondják, tüzel. Megfigyelték, hogy ezeket az impulzusokat időben (tehát egy vízszintes tengely mentén) ábrázolva fraktál ponthalmazt rajzolnak ki.

Egy nemrég felfedezett biológiai példával zárom a természetben előforduló fraktálokra vonatkozó illusztrációk sorát. Bizonyára sokan gondolják, hogy a gekkók azért tudnak a falakon vagy függőleges üvegfelületen is szaladni, mert a lábuk végén valamiféle szívókorongok vannak.

Valójában azonban másról van szó. A gekkók lábujjainak végén amolyan mikroszkopikus fastruktúraként több szinten át elágazó, a végső lépcsőben már nanométeres tartományig vékonyuló bolyhok (ágacskák) vannak, és ezek a mikroágacskák illeszkednek bele azokba a mikroszkopikus hasadékokba, amelyek minden felületre jellemzőek, hiszen – miért is lenne épp ez másképp – megmutatható, hogy nagyon közelről nézve szinte minden felület fraktálgeometriájú.

Vicsek Tamás
ELTE, Biológiai Fizika Tanszék