

eloszlások azok, amelyeket a fent említett szimulációval számoltunk ki. Ezeket a görbékét összehasonlítva a 2.a. ábrán mutatottakkal elfogadhatjuk, hogy ez az egyezés igen jó. Gondolatmenetünket folytatva tehát azt mondjuk, hogy az ini-vel jelölt görbék mutatják a minta szerkezetét. Ezek igen sok információt tartalmaznak. Például mutatják, hogy a hordozó és az első kobaltréteg közötti átmenet éles, tehát a kobalt párologtatása folyamán kémiai reakció nem történt 150 K-en. Ami még érdekesebb, a kobaltra párologtatott réz és kobalt közötti határfelület is éles. Ez viszont nem igaz a következő réz–kobalt határfelületre, ez elkent. Tehát arra a meglepő következtetésre jutottunk, hogy még 150 K-es hordozó hőmérséklet esetén is a határfelület minősége függ attól, hogy *A* anyag kerül *B*-re, vagy fordítva. Ennek a furcsának tűnő viselkedésnek az okát meg tudjuk magyarázni a kétdimenziós fázisdiagramok segítségével (amelyek lényegileg eltérhetnek a 3-dimenziós fázisdiagramoktól). Ennek a cikknek

nem célja ennek a viselkedésnek a magyarázata, de megjegyezzük, hogy 450 K-es hordozóra történő párologtatásnál talált anomáliát (2.b. ábra) is meg tudjuk magyarázni az elkent Cu/Co határfelület létrejöttével.

A fentiekben az Auger mélységi feltérképezés ismertetése mellett azt kívántuk megmutatni, hogy ez a módszer – legalább is egyes esetekben – alkalmas arra, hogy vékonyréteg rendszerekben 1 nm-es távolságon belüli határátrendeződéseket, illetve eloszlásokat detektálni tudjon.

#### Irodalom

1. A. BARNA – Proc. Fall Meeting MRS, 1991, Boston, Workshop on Specimen Preparation for Transmission Electron Microscopy of Materials – III, MRS Conf. Ser. 254 (1992) 3–22
2. A. BARNA, M. MENYHARD – Phys. Stat. Sol. (a) 145 (1994) 263–274
3. BARNA A., SZIGETHY D. Patent No. PCT/HU96/00054, 1996.
4. M. MENYHARD, G. ZSOLT, P.J. CHEN, C.J. POWELL, R.D. MCMICHAEL, W.F. EGELHOFF JR. – Appl. Sur. Sci. 180 (2001) 315–321
5. TRIDYN\_FZR, FZR-317, W. MÖLLER, M. POSSELT – Forschungszentrum Rossendorf, 01314 Dresden, Germany

## A BOLYGÓMOZGÁS TÖRVÉNYEINEK LEVEZETÉSE AZ OSZCILLÁTOR MOZGÁSÁBÓL

P.A. Horváthy

Laboratoire de Mathématiques et de Physique Théorique  
Université de Tours, Franciaország

A bolygómozgás Kepler-törvényei kimondják, hogy:

K-I: A bolygók ellipszis mentén mozognak, melynek egyik *gyújtópontjában* a Nap áll.

K-II: A Naptól a bolygóhoz vont rádiuszvektor egyenlő idők alatt egyenlő területeket sűrol.

K-III: A különböző mozgások keringési idejeinek négyzetei úgy aránylanak egymáshoz, mint a pályák nagytengelyeinek köbei.

Kepler törvényei levezethetőek a Newton-féle mozgás-egyenletekből és az inverz-négyzetes erőtvényből, de a bizonyítás magasabb matematikát igényel [1]. Ugyanakkor, mint azt *Síkbeli oszcillátor* fejezetben elemi eszközökkel megmutatjuk, egy (síkbeli) harmonikus oszcillátor esetén hasonló szabályok érvényesek:

O-I: Az oszcillátor ellipszis mentén mozog, melynek *középpontjában* a vonzócentrum van.

O-II: A centrumból az oszcillátor helyzetéhez vont rádiuszvektor egyenlő idők alatt egyenlő területeket sűrol.

O-III: A különböző oszcillátormozgások keringési idejei a pálya geometriai méreteitől függetlenek, (lásd (6)).

A hasonlóság szembeötlő, de a pályák centrumára és a keringési időkre vonatkozó különbségek sem hanyagolhatók el. Cikkünk kérdése: *Megkaphatóak-e a bolygómozgás törvényei az oszcillátormozgás egyszerűbb szabályaiból?* A válasz: igen. Bár okoskodásunk a térre is kiterjeszhető [2], az egyszerűség kedvéért csak a síkbeli esetet tárgyaljuk [3].

Mind a bolygó-, mind a harmonikus mozgás rendelkezik kör alakú pályákkal; először ezeket hozzuk kapcsolatba. Második lépésben megmutatjuk, hogy az „oszcillá-

tor típusú”, (azaz origó centrumú) ellipszisek egy alkalmas transzformációval átvihetők „bolygómozgás típusú” (azaz origó fókuszú) ellipszisekbe. Ez a pusztán kinematikai megfeleltetés az idő ügyes átdefiniálásával a dinamikára is kiterjeszhető. Végezetül, levezetjük Kepler törvényeit az oszcillátorra érvényes összefüggésekből.

#### Körmozgások összehasonlítása

Tekintsük a síkbeli Kepler-problémát. Vezessünk be komplex koordinátákat, és válasszuk a Nap helyzetét originának. Ekkor a bolygómozgás törvénye

$$\ddot{z} = -fM \frac{z}{|z|^3}, \quad (1)$$

ahol a „pont” az idő szerinti deriválás,  $d/dt$ . Célunk az (1) egyenlet megoldása, azaz a Kepler-féle elliptikus mozgások meghatározása. Keressünk leelőször (nagyon) speciális, egység sugarú körpálya mentén történő mozgásokat:

$$z(t) = e^{i\theta(t)}. \quad (2)$$

Ekkor a mozgás egyenletes, ugyanis (1) így írható:

$$i\ddot{\theta} - (\dot{\theta})^2 = -fM. \quad (3)$$

A képzetes rész eltűnéséből  $\ddot{\theta} = 0$ , míg a valós részből a szögsebesség  $\dot{\theta} = (fM)^{1/2}$ .

Fejtegetéseink szempontjából fontos megfigyelés, hogy a fenti mozgás egy, az egységkörre kényszerített síkbeli harmonikus rezgőmozgásnak is tekinthető. Az oszcillátor komplex koordinátáját a jobb megkülönböztetőség kedvéért  $w$ -vel jelölve, a mozgásegyenlet ugyanis

$$w'' = -\Omega^2 w, \quad (4)$$

ahol  $\Omega$  az oszcillátor körfrekvenciája, és a „vessző” az „oszcillátoridő” szerinti deriválást jelöli:  $(\cdot)' = d/d\tau$ . A  $|w| = 1$ , azaz  $w = e^{i\theta(\tau)}$  kényszer fennállása esetén ebből nyilván újra (3)-at kapjuk, amennyiben  $fM$ -et  $\Omega^2$ -nel,  $\theta$ -át  $\gamma$ -val,  $t$ -t pedig  $\tau$ -val azonosítjuk. Hasonlóan,  $R$  sugarú körpályát feltételezve, a szögsebesség

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{fM}{R^3}} = \Omega,$$

és a probléma egy (sugárfüggetlő)  $\Omega$  körfrekvenciájú oszcillátor körpálya menti mozgásával ekvivalens.

Összefoglalva: speciális, egység sugarú körtrajektóriák esetében, a harmonikus rezgőmozgás és a bolygómozgás egymásba leképezhetőek. Alábbi fejtegetéseink lényege, hogy ez a megfeleltetés kiterjeszthető általános mozgásokra.

## Síkbeli oszcillátor

A síkbeli oszcillátor mozgása könnyen meghatározható: (4)-et valós és képzetes részre bontva látjuk, hogy azok külön-külön független harmonikus rezgőmozgást végeznek. Az időmérés kezdetét megfelelően választva,

$$w(\tau) = a \cos \Omega \tau + i b \sin \Omega \tau. \quad (5)$$

$w(\tau)$  tehát valóban egy origó centrumú,  $a$  nagy- és  $b$  kis-tengelyű ellipszis mentén mozog. (Gondoljunk két, egymásra merőleges, azonos frekvenciájú harmonikus rezgés eredőjeként előálló Lissajous-görbére.) A keringési idő

$$T_{\text{oszc}} = \frac{2\pi}{\Omega}, \quad (6)$$

ami valóban független a pálya méreteitől.

Végezetül, a területi sebesség a fele a (tömeg egységre jutó) megmaradó impulzusmomentumnak:

$$I_{\text{oszc}} = |w|^2 \frac{d\gamma}{d\tau} = \text{const.}, \quad (7)$$

ahol  $\gamma = \arg w$ :  $\tan \gamma = (\rho^2 - 1)/(\rho^2 + 1) \cdot \tan \phi$ . Ezzel bebizonyítottuk az oszcillátormozgás fenti, O-I – O-II – O-III „Kepler-féle” törvényeit.

Alább szükségünk lesz az oszcillátor (megmaradó) összenergiájának a pálya geometriai méreteivel való kifejezésére:

$$E_{\text{oszc}} = \frac{m}{2} (|w'|^2 + \Omega^2 |w|^2) = \frac{m}{2} \Omega^2 (a^2 + b^2), \quad (8)$$

ahol  $m$  a bolygó tömege.

## Egy kis (komplex) geometria [3]

Legyen  $u$  egy komplex változó, és tekintsük a komplex sík úgynevezett „Zsukovszkij-féle” leképezését:

$$u \mapsto w = u + \frac{1}{u}. \quad (9)$$

1. Lemma. Az  $u$  sík egy origó centrumú körének képe a (9) leképezés során a  $w$  sík egy ellipszise, melynek centruma újra az origó. Az ellipszis fókuszai a  $\pm 2$  pontokban vannak.

Bizonyítás: ha  $u = \rho e^{i\phi}$ , akkor

$$w = \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \phi + i \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \phi, \quad (10)$$

ami egy

$$a = \rho + \rho^{-1}, \quad b = \rho - \rho^{-1}$$

nagy- és kis-tengelyű ellipszis egyenlete:  $w$ -t  $x+iy$  alakban írva,  $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ . A fókuszpontok távolsága a centrumtól  $c = (a^2 - b^2)^{1/2} = \pm 2$ , tekintve, hogy  $(\rho + \rho^{-1})^2 - (\rho - \rho^{-1})^2 = 4$ .  $\rho = 1$ -re az ellipszis a valós tengely  $[-1, 1]$  szakaszává fajul el.

Figyeljük meg, hogy ha a kiindulási kör sugarát  $\rho$ -ról  $\rho^{-1}$ -re változtatjuk, a képpont ugyanazt az ellipszist írja le (csak a a valós tengelyre tükrözve). Ezért az egyértelműség kedvéért a továbbiakban feltesszük, hogy  $\rho > 1$ , azaz az  $u \mapsto w$  leképezést az  $u$  sík egységkörének külsejére korlátozzuk. Tekintsük most a  $w$  sík

$$w \mapsto z = w^2 \quad (11)$$

leképezését a  $z$  síkra.

2. Lemma. Az előző ellipszis képe egy  $z$ -origó fókuszú ellipszis. Megfordítva, a  $z$  sík minden, origó fókuszú ellipszise előáll, mint a  $w$  sík egy origó centrumú ellipszisének a négyzete.

Valóban,

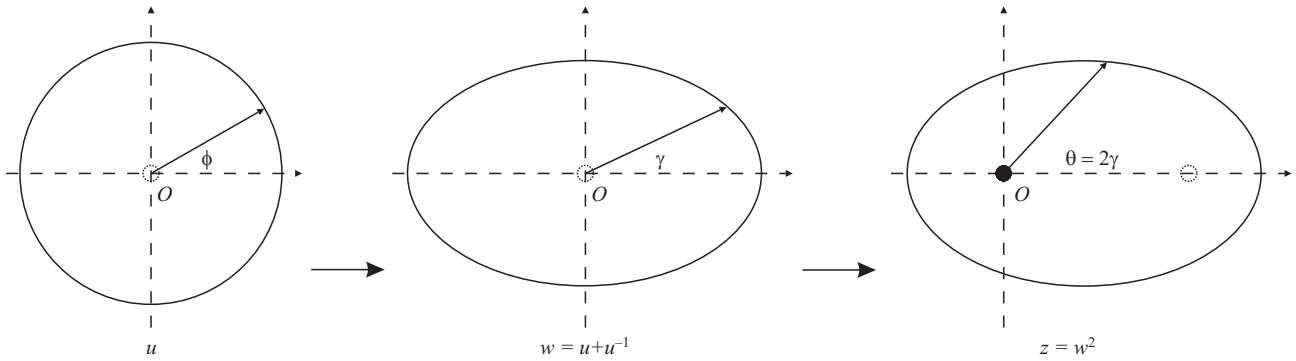
$$z = w^2 = u^2 + \frac{1}{u^2} + 2. \quad (12)$$

De ha  $u = \rho e^{i\phi}$ , akkor  $u^2 = \rho^2 e^{i2\phi}$ , s így (10)-be  $\rho$  helyett  $\rho^2$ -et írva látjuk, hogy újra egy ellipszist kapunk, melynek tengelyei

$$A = \rho^2 + \rho^{-2}, \quad B = \rho^2 - \rho^{-2},$$

s melyet 2 egységgel jobbfelé toltunk el. Ezért bal fókusza az origó. Miközben  $u$  egyszer körbefordul a eredeti körön, a  $w$  is egyszer írja le az origó centrumú ellipszist. Eközben azonban  $z$  – a „szög megduplázódása” miatt – kétszer futja be az origó fókuszú ellipszist. A  $w \mapsto z$  leképezés tehát 2:1. Ezért, míg  $w$  egy fél ellipszist ír le,  $z$  befutja az egész kép ellipszist.  $z$  periheliuma, illetve apheliuma a  $w$  kis-tengely, illetve nagytengely végpontjainak a képe.

Fontos megjegyezni, hogy a sík minden origó centrumú ellipszise megkapható a fentiből megfelelő nyújtással és elforgatással.



1. ábra. Míg  $u$  a komplex sík egységkörét írja le,  $w = u + u^{-1}$  egy origó központú ellipszisen,  $z = w^2$  pedig egy origó fókuszú ellipszisen mozog.

## Bolygó-oszcillátor transzformáció

A fenti geometriai konstrukció feloldja az oszcillátor- és bolygómozgás pályái közti különbségeket: a (11) transzformáció az „oszcillátor formájú” pályákat „Kepler-formájúba” viszi.

Kiterjeszhető-e a fenti megfeleltetés a dinamikára? A válasz elsőre nemlegesnek tűnik:  $z = w^2$ -et idő szerint differenciálva és oda a  $w$  (4) mozgásegyenletét helyettesítve, egy bonyolult kifejezést kapunk, mely szemmel láthatóan különbözik a remélt (1)-től. Hogy ez így van, az abból is látható, hogy a kép ellipszis rádiuszvektorának az oszcillátormozgásból következő (kétszeres) területi sebessége,

$$|z|^2 \theta' = 2 |z| I_{\text{oszc}},$$

(ahol figyelembe vettük, hogy a  $z$ -ellipszis rádiuszvektorának szöge  $\theta = 2\gamma$ ) a fókuszról mért  $|z(t)|$  távolság időbeli változása miatt *nem mozgásállandó*, azaz nem elégíti ki Kepler II. törvényét.

A kiút az *idő átdefiniálása*. Tekintsünk egy tetszőleges  $w(\tau)$  oszcillátormozgást, és definiáljuk az új „pálya menti időt”  $a$

$$t = \int |w(\tau)|^2 d\tau \Rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{1}{|w(\tau)|^2} \frac{d}{d\tau} \quad (13)$$

(azaz  $(\dot{\cdot}) = |w|^{-2} (\cdot)'$ ) formulával. Ekkor az oszcillátor (4) mozgásegyenletét felhasználva,

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= \frac{1}{w\bar{w}} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{w\bar{w}} \frac{d}{d\tau} w^2 \right) = \\ &= -2 \frac{1}{w\bar{w}^3} (|w'|^2 + \Omega^2 |w|^2) = -\frac{4E_{\text{oszc}}/m}{|w|^6} w^2, \end{aligned} \quad (14)$$

ahol  $E_{\text{oszc}}$  a (8) oszcillátorenergia, mely *a tekintett mozgás során* állandó marad. Ide  $w^2$  helyett visszaírva  $z$ -t, az

$$4 E_{\text{oszc}} = fMm \quad (15)$$

azonosítás után pontosan a bolygómozgás (1) egyenletét kapjuk! Minden oszcillátorpályának megfeleltettünk tehát egy olyan bolygótrajektóriát, melynek „gravitációs ereje” az oszcillátorpálya energiájával arányos. Megfordítva,

minden bolygótrajektóriának megfelel egy olyan oszcillátortrajektória, melynek energiája  $fMm/4$ .

Visszafelé, egy adott bolygóproblémához is rendelhetünk oszcillátort. A (11)–(13) megfeleltetés inverze

$$w = \sqrt{z}, \quad \frac{d}{d\tau} = \sqrt{z\bar{z}} \frac{d}{dt}. \quad (16)$$

Ekkor a fentiekhez hasonlóan, a bolygó mozgásegyenletét felhasználva belátható, hogy

$$w'' = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} |\dot{z}|^2 - \frac{fM}{|z|} \right) w,$$

ami egy olyan oszcillátor egyenlete, melynek körfrekvenciája a bolygótrajektória energiájával arányos:

$$w'' = -\Omega^2 w, \quad \Omega^2 = -\frac{1}{2m} E_{\text{boly}}, \quad (17)$$

ahol

$$E_{\text{boly}} = \frac{m}{2} |\dot{z}|^2 - \frac{fMm}{|z|} = -\frac{fMm}{2A} \quad (18)$$

az (egységnyi tömegű) bolygó energiája [1]. Megjegyzendő, hogy  $E_{\text{boly}}$  csak az  $A$  nagytengelytől függ.

Figyeljük meg, hogy a fenti inverz transzformáció kétértékű, és a négyzetgyök függvény mindkét ágán külön-külön teljesül, valamint azt is, hogy a transzformáció újra csak pályánként definiált: (16) minden egyes bolygótrajektóriához egy-egy különböző körfrekvenciájú oszcillátort rendel.

## Kepler törvényeinek levezetése

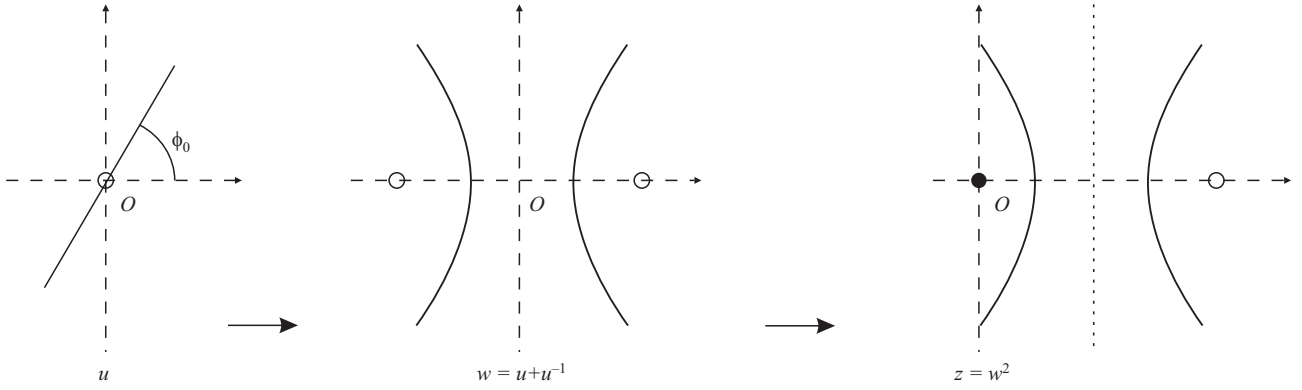
Vezessük most le a bolygómozgás Kepler-féle törvényeit az oszcillátortörvényekből.

- Először is, a Kepler-pályák – mint az oszcillátor-ellipszisek képei – kielégítik Kepler I. törvényét.
- Másodsor,

$$I_{\text{boly}} = |z|^2 \frac{d\theta}{dt} = |w|^2 \frac{d(2\gamma)}{d\tau} = 2 I_{\text{oszc}}, \quad (19)$$

azaz a bolygómozgás területi sebessége,  $I_{\text{boly}}$ , egyenlő az oszcillátorprobléma területi sebességének kétszeresével, s ezért szintén állandó, ami Kepler II. törvénye.

- Legyenek végezetül a keringési idők  $T_{\text{boly}}$  és  $T_{\text{oszc}}$ . A területi sebességek állandó voltából,



2. ábra. Az  $u$  sík origón átmenő egyenseinek képei a  $w$  sík origó centrumú „Zsukovszkij-hiperbolái”. Négyzetre emelve olyan hiperbolákat kapunk a  $z$  síkban, melyek bal gyújtópontja az origó.

$$\pi a b = \frac{1}{2} I_{\text{oszc}} T_{\text{oszc}}, \quad \pi A B = \frac{1}{2} I_{\text{boly}} T_{\text{boly}},$$

hiszen az ellipszis területe a tengelyek szorzatának  $\pi$ -szere. Ezek hányadosát véve,  $T_{\text{oszc}} = 2\pi/\Omega$ -t felhasználva,

$$T_{\text{boly}} = \pi \left( \frac{AB}{ab} \right) \frac{1}{\Omega}.$$

Az *Egy kis (komplex) geometria* fejezet képletei szerint azonban:  $a = \rho + \rho^{-1}$ ,  $b = \rho - \rho^{-1}$ , s így  $ab = \rho^2 - \rho^{-2} = B$ ; tehát  $AB/ab = A$ . De  $a^2 + b^2 = 2(\rho^2 + \rho^{-2}) = 2A$ , s ezért az oszcillátor (8)-as pályae energiáját megadó képletéből, (15)-t felhasználva, az  $A$  nagytengelyű bolygótrajektória oszcillátor megfelelőjének körfrekvenciája

$$\Omega = \sqrt{\frac{E_{\text{oszc}}/m}{A}} = \sqrt{\frac{fM}{4A}}. \quad (20)$$

Így a bolygó keringési ideje végezetül:

$$T_{\text{boly}} = 2\pi \sqrt{\frac{A^3}{fM}}, \quad (21)$$

ami a szokásos formula [1], s mely nyilván konzisztens Kepler III. törvényével, hiszen

$$\frac{T_{\text{boly}}^2}{A^3} = \frac{4\pi^2}{fM} = \text{const.}$$

Abban a speciális esetben, mikor az oszcillátormozgás pályája egység sugarú kör, akkor  $t = \tau$ ,  $z = w^2 = e^{i2\Omega t}$ , s így a bolygó- és oszcillátortrajektóriák egybeesnek. Új képletünk a bevezetőben talált megfeleltetéstől csak abban különbözik, hogy a szögsebesség megkétszereződött: (2) helyett  $z(t) = e^{i2\phi(t)}$ -t írva, pontosan mostani formuláinkat kapnánk.

## Szórt mozgások

A bolygómozgás negatív összenergiát adó (18) képlete csak a kötött, elliptikus mozgásokra érvényes. Az üstökösök által realizált parabolikus és hiperbolikus mozgások esetén az energia nulla, illetve pozitív. Fenti oszcillátor

transzformációnk ezekre az esetekre – sőt Rutherford szórás kísérletében fellépő, Coulomb-féle taszító inverznégyzetes erőre [5] – is kiterjeszhető. Az „oszcillátor” megfelelője taszító lineáris potenciál lesz.

Tekintsük először a geometriát. A konstrukció lényegében ugyanaz, mint az ellipsziseknél, azaz újra

$$u \mapsto w = u + u^{-1} \mapsto z = w^2,$$

mindössze  $u$  most egy, az origón átmenő egyenesen fut. Valóban, írjuk  $u$ -t az  $u = \rho e^{i\phi_0}$  alakban, ekkor  $w$  újra (10):

$$w = \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \phi_0 + i \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \phi_0,$$

csak most  $\rho$  változik (mégpedig  $-\infty$ -tól  $\infty$ -ig), míg a szög állandó,  $\phi_0 = \text{const.}$  Ez most egy

$$a = |2 \cos \phi_0| \quad \text{és} \quad b = |2 \sin \phi_0| \quad (22)$$

valós és képzetes tengelyű *hiperbola* egyenlete, hiszen  $w = x + iy$  koordinátái kielégítik az  $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$  egyenletet. A fókuszok helye azonos a Zsukovszkij-féle ellipszisekével, azaz  $\pm 2$ , hiszen  $a^2 + b^2 = 4$ . Ha  $\phi_0 = 0$ , akkor  $w$  a valós tengely két ( $x \geq 2$ , illetve  $x \leq -2$ ) fél-egyenesét írja le,  $\phi_0 = \pi/2$ -re pedig a képzetes tengelyt kapjuk.

Ha  $0 < \phi_0 < \pi/2$ , akkor pozitív  $\rho$  esetén a hiperbola jobb oldali,  $\rho < 0$ -ra pedig bal oldali ágát kapjuk. Ha  $\phi_0$ -at  $\pi/2$  és  $\pi$  között tovább futtatnánk, akkor újra az előző alakzatokat kapnánk, csak fordított sorrendben. Ezért  $\phi_0$ -at elegendő a nyílt  $(0, \pi/2)$  intervallumra korlátozni, s ekkor (22)-ből az abszolút érték elhagyható.

A „Zsukovszkij-féle hiperbola” négyzete újra (12):

$$z = \left( \rho^2 + \frac{1}{\rho^2} \right) \cos 2\phi_0 + 2 + i \left( \rho^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) \sin 2\phi_0, \quad (23)$$

csakhogy ez most egy

$$A = |2 \cos 2\phi_0| \quad \text{és} \quad B = |2 \sin 2\phi_0| \quad (24)$$

valós, illetve képzetes tengelyű hiperbola, melynek bal fókusza az origó. Valóban, a  $z = X + iY$  által leírt alakzat egyenlete most

$$\left(\frac{X-2}{A}\right)^2 - \left(\frac{Y}{B}\right)^2 = 1.$$

Ha  $\phi_0$  nulla és  $\pi/4$  között fekszik, akkor a  $\text{Re}(z) \geq 2$ , hiszen  $\rho^2 \geq 0$ . Miközben tehát  $w$  a „Zsukovszkij-hiperbola” mindkét ágát befutja,  $z$  az origó fókuszú hiperbola jobb oldali ágát írja le.  $\phi_0$ -at nulláról  $\pi/4$ -ig változtatva, egyre szélesedő „jobb oldali” hiperbolaág-családot kapunk a  $z$  síkban.  $\phi_0$ -at  $\pi/4$  és  $\pi/2$  közt választva viszont a  $z$  sík bal oldali,  $\text{Re}(z) \leq 2$  hiperbolaágait kapjuk, melyek fokozatosan szűkülnek a valós tengely  $(-\infty, 0)$  szakaszára. Mint alább megmutatjuk, ezek épp a taszító Coulomb-probléma, illetve hiperbolikus üstökösmozgás trajektóriái.

Hangsúlyozzuk, hogy mindkét esetben csak egy ágat kapunk. Az „ágtípus váltása” akkor történik, mikor a „Zsukovszkij-hiperbola” valós tengelye a képzetesnél rövidebbé válik,  $\phi_0 = \pi/4$ -nél  $a = b$ .

Mivel a kép nem függ  $\rho$  előjelétől, a leképezés 2:1. Megfordítva, a  $z$  sík minden pontjának két ősképe van, melyek előjelükben különböznek. Ezért az origó fókuszú  $z$ -hiperbolák mindkét ágának ősképe külön-külön egy-egy teljes, kétágú hiperbola.

A dinamikára kiterjesztett oszcillátortranszformáció formálisan ugyanaz, mint eddig, (11)–(16), illetve (17), mindössze az „oszcillátor” (17) szerinti körfrekvenciája pozitív bolygóenergia esetén képzetes,  $\Omega^2 < 0$ . Más szóval, taszító lineáris potenciállal van dolgunk.

A taszító „oszcillátor” mozgásegyenlete

$$\begin{aligned} w'' &= |\Omega|^2 w \Rightarrow \\ \Rightarrow w(\tau) &= a \cos b|\Omega|\tau + i b \sin b|\Omega|\tau, \end{aligned} \quad (25)$$

ami origó centrumú „Zsukovszkij-féle” hiperbola, hiszen  $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$ . Az összenergia:

$$E_{\text{oszc}} = \frac{m}{2} (|w'|^2 - |\Omega|^2 |w|^2) = \frac{m}{2} |\Omega|^2 (-a^2 + b^2) \quad (26)$$

(lásd (8)), ezért mind pozitív, mind negatív is lehet aszerint, hogy a képzetes vagy a valós tengely-e a hosszabb.

A dinamikára térve, a *Bolygó-oszcillátor transzformáció* fejezetbeli fejtegetéseink most is érvényesek, és újra inverz-négyzetes erőterbeli mozgást kapunk.

Amennyiben az „oszcillátorenergia” pozitív, akkor az  $fMm = E_{\text{oszc}} > 0$ -val jellemzett bolygómozgási probléma hiperbolikus üstökösmozgásait kapjuk. De  $E_{\text{oszc}} > 0$  azt jelenti, hogy a képzetes tengely a hosszabb,  $b > a$ , és mint láttuk, ekkor a  $w$  sík „Zsukovszkij-ellipszisének” képe a  $z$  síkban a bal oldali, azaz a *Nap felé görbülő* hiperbola.

Mi a negatív „oszcillátorenergiájú” megoldások haszna? Ekkor (14) a következőképpen írható

$$\ddot{z} = \frac{-E_{\text{oszc}}/m}{|z|^3} z, \quad (27)$$

ami egy *taszító* inverz-négyzetes erőterbeli mozgást ír le. Pontosan ez történik Rutherford szórás kísérletében [5], ahol egy könnyű, pozitív  $q$  töltésű alfa-részecske egy ne-

héz, szintén pozitív  $Q$  töltésű atommag terében mozog. A töltések közti Coulomb-kölcsönhatás taszító, s ezt a

$$-4 E_{\text{oszc}} = q Q m \quad (28)$$

megfeleltetéssel épp (27) írja le!

Mint láttuk, az oszcillátorenergia akkor negatív, mikor a valós tengely a hosszabb. Ilyen Zsukovszkij-hiperbola képe pedig a  $z$  sík az *atommagtól elfelé görbülő*, jobb oldali hiperbolaága!

Megfordítva: az taszító inverz-négyzetes erőterben az energia mindig pozitív:

$$E_{\text{Coulomb}} = \frac{m}{2} |\dot{z}|^2 + \frac{qQ}{|z|} > 0, \quad (29)$$

s ezért az (16) inverz transzformáció ehhez most újra egy taszító lineáris problémát rendel, melynek (képzetes) frekvenciáját a (29) Coulomb-energia szabja meg.

Tekintsük végezetül a gravitációs erőterbeli parabolikus mozgásokat, melyek szintén lehetséges üstökös pályák. Ezek energiája nulla, s ezért a dinamikus megfeleltetés „oszcillátornak” (17) szerinti  $\Omega$  „körfrekvenciája” szintén *nulla*. Azaz, *w szabadon*, vagyis egyenes mentén, egyenletesen mozog! Ha a mozgás nem megy át az origón, akkor megfelelő forgatással és nyújtással elérhetjük, hogy a trajektória egyenlete  $w = i + \tau$  legyen. Ekkor

$$z = w^2 = (\tau^2 - 1) + 2\tau i \quad (30)$$

„fekvő” parabola, hiszen  $y^2 = 4x + 4$ . A parabola csúcsa  $(-1)$ -ben, fókusza az origóban van. (Ha egyenesünk átmege az origón, a parabola az origón átmenő félegyenesre degenerálódik.)

## Diskusszió

A bolygó- és harmonikus mozgások közti kapcsolat lehetővé tette az előbbieknél az utóbbiakból való levezetését. Hangsúlyozzuk, hogy (13) nem az idő mint klasszikus változó transzformációja, hiszen az magától a pályától, sőt a pont pálya mentén elfoglalt helyétől is függ: (13) egyszerűen a pálya paraméterének átdefiníálása. Az új „pályaidő”-t éppen úgy választottuk, hogy a területi sebességek közt fennálljon a (19) kapcsolat. Ezért nem a bolygó és oszcillátor mint fizikai rendszerek közt állítottunk föl kapcsolatot, hanem minden egyes bolygópályát külön-külön kapcsolatba hoztunk egy-egy megfelelő frekvenciájú oszcillátorpályával. A bolygómozgást az oszcillátorral kapcsolatba hozó transzformáció szórt (üstökös-, illetve Rutherford-féle) mozgásokra is kiterjeszthető.

A bolygómozgás ismert problémája, hogy a radiális mozgások szingulárisak: az égitest véges idő alatt, végtelen sebességgel esne a Napba. Oszcillátortranszformációnk módot adna a probléma regularizálására [2]. Hasonlóan, a Kepler-probléma dinamikus szimetriáit [4] levezethetnénk az oszcillátoréból.

Említsük meg, hogy a fenti megfeleltetés a kvantummechanika szintjén is működik: a hidrogénatom spektru-

ma az oszcillátorspektrumból levezethető. Ennek során a négyzetgyök függvény kétértékűségével kapcsolatos 2:1 viszony fontos konzekvenciákkal jár, nevezetesen azzal, hogy az oszcillátorállapotoknak csak a fele felel meg a H-atom állapotainak.

Érdekes megjegyezni, hogy a cikkünkben tárgyalt oszcillátor–bolygómozgás kapcsolat a konform leképezések elméletével tovább általánosítható: két centrális,  $r^a$ , illetve  $r^A$ -val arányos erőterbeli mozgás egymásba vihető, ha  $(a+3)(A+3) = 4$  [3]. Például  $a = 1$  az oszcillátor, és ennek „duálisa”  $A = -2$ , azaz a bolygómozgás.

A Szerző köszönetet mond *Sükösd Csabának* érdeklődéséért és hasznos tanácsaiért.

#### Irodalom

1. BUDÓ ÁGOSTON: *Mechanika* – Negyedik kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.
2. P. KUSTANHEIMO, E. STIEFFEL – J. Reine Angew. Math. 218 (1965) 204
3. V.I. ARNOLD: *Huygens & Barrow, Newton & Hook* – Birkhäuser 1990.
4. GYÖRGYI GÉZA: *A Kepler-probléma „rejtett” szimmetriáiról* – Fiz. Szle. 18 (1968) 142; *Dinamikai szimmetriák* – (tud. doktori értekezés). Magy. Fiz. Folyóirat 20 (1972) 45
5. lásd például P.A. HORVÁTHY: *A Rutherford-féle szórásról* – Fiz. Szle. 54 (2004) 67

## DOKUMENTUM

# AZ UNESCO ÉS A FENNTARTHATÓ FEJLŐDÉSRE NEVELÉS NEMZETKÖZI ÉVTIZEDE, 2005–2015

Mary Joy Pigozzi

az UNESCO Minőségi Nevelés Támogatása Osztály igazgatója

Az Egyesült Nemzetek Közgyűlése a társadalmilag kívánatos, gazdaságilag működőképes és a környezetvédelmet segítő erőfeszítések támogatására 2002. december 20-án egyhangú határozatot hozott a *Fenntartható Fejlődésre Nevelés Nemzetközi Évtizede* (Decade of Education for Sustainable Development, DESD) megrendezéséről 2005–2015 között. A határozatban fő szervezőként az ENSZ Nevelésügyi, Tudományos és Kulturális Szervezetét (UNESCO) nevezték meg.

## Mozgalom az Évtized megrendezéséért

Az ENSZ 1985 óta folyamatosan szervez Nemzetközi Évtizedeket. Ezek célja a figyelemfelhívás egyes globális jelentőségű problémákra, és nemzetközi mozgalom indítása megoldásuk érdekében. A *Fenntartható Fejlődésre Nevelés Nemzetközi Évtizede* ötletét a japán kormány vetette fel először a *Fenntartható Fejlődés Világsúcs* (World Summit for Sustainable Development, WSSD) előkészítő bizottságában (Bali, Indonézia, 2002. június). A javaslatot a WSSD legfelső vezetésének johannesburgi konferenciáján, 2002 szeptemberében fogadták el, és három hónappal később az ENSZ Közgyűlésének 57. ülészakán egyhangúlag 2005. január 1-jét jelölték meg az Évtized kezdetéül.

## Az Évtized célkitűzései

A Johannesburgi Csúcson a *Fenntartható Fejlődésre Nevelés Nemzetközi Évtizede* tervével elismerték, hogy jelentős igény van a fenntartható fejlődés témáinak bevezetésére a nevelési rendszerek minden szintjén, ez az alapja

a szükséges változások megvalósításának. Az Évtized célja az oktatásnak és nevelésnek mint az emberiség fenntartható fejlődése kulcsának támogatása és a *Fenntartható Fejlődésre Nevelés* (Education for Sustainable Development, ESD) innovatív céljainak, programjainak és gyakorlatának fejlesztésére kialakítandó nemzetközi együttműködés erősítése.

A kormányokkal megtárgyalták, milyen intézkedések szükségesek ahhoz, hogy az UNESCO által kidolgozott irányelvek alapján 2005-ben nevelési stratégiájuk és tevékenységi terveik átalakításával elindíthassák az *ENSZ Fenntartható Fejlődésre Nevelés Nemzetközi Évtizedét*.

## A fenntartható fejlődés haladó gondolat

Az elnevezés az 1980-as években keletkezett, amikor – elsősorban a környezeti ártalmak és a természeti források várható kimerülése miatt – sürgetően vetődött fel a gazdasági és társadalmi egyensúly megszilárdításának igénye. Mérföldkövet jelentett az 1972-es *Az Emberi környezetért* címmel Stockholmban rendezett ENSZ-konferencia. Svédországban nagy figyelmet fordítanak a környezetvédelemre, és az erőforrások megőrzése céljából számos minisztériumot és nem kormányzati szervezetet (Non-governmental Organisation, NGO) hoztak létre. A konferencia utáni években a világ országai felismerték, hogy alaposabban kell feltárni a környezet, a természeti erőforrások, valamint a társadalmi–gazdasági folyamatok – például a szegénység és elmaradottság – közötti összefüggéseket.

Fordította *Menczel György*.