Debrecen

DEBRECENI EGYETEM
Elméleti Fizika Tanszék (*Sailer Kornél* MTA doktora)
Izotópalkalmazási Tanszék (*Kónya József* kém. tud. doktora)
KLTE–ATOMKI Közös Tanszék (*Kiss Árpád Zoltán* fiz. tud. doktora)
Kísérleti Fizikai Tanszék (*Pálinkás József* akadémikus)
Szilárdtestfizikai Tanszék (*Beke Dezső* fiz. tud. doktora)
Biofizikai Intézet (*Szöllősi János* biol. tud. doktora)

KUTATÓINTÉZETEK
MTA Atommagkutató Intézet (*Lovas Rezső* akadémikus)
MTA Csillagászati Kutatóintézet Napfizikai Obszervatóriuma (*Ludmány András* fiz. tud. kandidátusa)

Győr

SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM
Fizika Tanszék (*Horváth András* egy. docens)

Miskolc

MISKOLCI EGYETEM
Geofizikai Tanszék (*Dobróka Mihály* műsz. tud. doktora)
Fizika Tanszék (*Demendy Zoltán* fiz. tud. kandidátusa)
Fizikai Kémiai Tanszék (*Kaptay György* műsz. tud. kandidátusa)

Pécs

PÉCSI TUDOMÁNYEGYETEM
Biofizikai Intézet (*Somogyi Béla* egy. tanár)
Általános Fizika és Lézerspektroszkópia Tanszék (*Német Béla* egy. docens)
Elméleti Fizika Tanszék (*Korpa Csaba* egy. tanár)
Kísérleti Fizika Tanszék (*Hebling János* egy. docens)

Sopron

NYUGAT-MAGYARORSZÁGI EGYETEM
Faipari Mérnöki Kar, Fizika Tanszék (*Papp György*)
MÉK Mosonmagyaróvár (*Dóka Ottó* egy. docens)
GEO Székesfehérvár (*Csordásné Marton Melinda* főisk. tanársegéd)
ATIF Győr (*Zábrádi Antal* főisk. adjunktus)

Szeged

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
Biofizikai Tanszék (*Maróti Péter* biol. tud. doktora)
Elméleti Fizikai Tanszék (*Gyémánt Iván* fiz. tud. doktora)
Kísérleti Fizika Tanszék (*Szatmári Sándor* fiz. tud. doktora)
Optikai és Kvantumelektronikai Tanszék (*Bor Zsolt* akadémikus)
MTA Lézerfizikai Kutatócsoport (*Bor Zsolt* akadémikus)
Szegedi Csillagvizsgáló (*Szatmáry Károly* fiz. tud. kandidátusa)
Általános Orvosi Kar, Orvosi Fizika Oktatási Csoport (*Ringler András* biol. tud. kandidátusa)
Juhász Gyula Tanárképző Főiskola Kar, Fizika Tanszék (*Nánai László* fiz. tud. kandidátusa)

KUTATÓINTÉZET
SzBK Biofizikai Intézet (*Ormos Pál* akadémikus)

Veszprém

VESZPRÉMI EGYETEM
Fizika Tanszék (*Szalai István* egy. docens)
Fizikai Kémia Tanszék (*Liszi János* egy. tanár)

A FIZIKA TANÍTÁSA

A 2004. ÉVI EÖTVÖS-VERSENY FELADATA: A KEPLER-PROBLÉMA MÁGNESES TÉRBEN

Pálfalvi László
MTA PTE Nemlineáris Optikai és Kvantumoptikai Kutatócsoport
PTE, Kísérleti Fizika Tanszék

A feladatok megoldása során sok esetben hasznos lehet olyan módszerek alkalmazása, melyek túlmutatnak a középiskolások eszköztárán. Ha egy problémát általánosan kezelünk, az elemi megoldással megválaszolható kérdéseken túlmutató kérdések felvetésére és megválaszolására adódik lehetőség. Ezenkívül rámutathatunk olyan általános érvényű összefüggésekre, melyek a speciális esetből kiinduló tárgyalások során nem kerülnek felszínre. Még egy nagyon fontos szempont, hogy egy egzakt megoldás segítség lehet eredményünk helyességének ellenőrzéséhez is.

A 2004. évi Eötvös-verseny 3. feladata igen jó példa annak demonstrálására, hogy az általános összefüggésekből hogyan juthatunk el az egyedi esetekhez. A feladat így szólt:

„Elektronok mozgását vizsgáljuk homogén mágneses térben, az erővonalakra merőleges síkban. (Az elektront klasszikus tömegpontnak tekintjük, melyre csak elektromos és mágneses erők hatnak.)

a) Két, kezdetben nyugvó elektron egymástól elég messze, r_0 távolságra helyezkedik el. Mekkora azonos nagyságú, egymással ellentétes irányú sebességgel indítsuk el az elektronokat úgy, hogy távolságuk a mozgás során ne változzék?

b) Állandó maradhat-e az r_0 távolság akkor is, ha csak az egyik elektront lökjük meg?

Milyen pályán mozog ekkor a rendszer tömegközéppontja?

Mekkora az a minimális r_{min} távolság, amely mellett ilyen mozgás még létrejöhet?

Ábrázoljuk vázlatosan az elektronok pályáját ebben az esetben!

Mikor áll meg először a meglökött elektron?”

Ha nincs jelen mágneses tér, és a töltések ellentétes előjelűek, akkor a jól ismert Kepler-probléma megoldásáról van szó speciális kezdőfeltételek mellett. Természetesen ebben az esetben néhány alkérdés értelmetlenné válik.

A szimmetrikus indítás

A feladat a) kérdése nem túl nehéz, a szimmetria miatt a szituáció könnyen elképzelhető, ami egy kis önbizalmat ad a későbbiekhez. A megoldás során az e elemi töltés alatt $e = +1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C-ot értünk. A kezdetben r_0 távolságban lévő elektronok távolsága úgy maradhat állandó, ha $r_0/2$ sugarú körpályán mozognak a nyugalomban lévő tömegközéppontjuk körül, azaz a mozgásegyenlet (*1. ábra*):

$$e v_0 B - k\frac{e^2}{r_0^2} = m\frac{v_0^2}{r_0/2}. \tag{1}$$

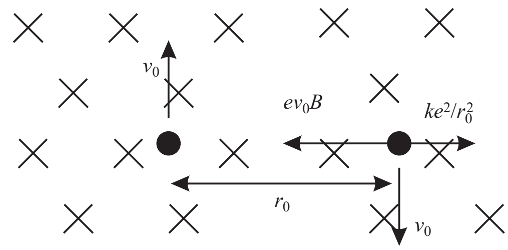
Innen kifejezve a kezdősebességet

$$v_0 = \frac{eBr_0}{4m} \pm \sqrt{\left(\frac{eBr_0}{4m}\right)^2 - \frac{ke^2}{2mr_0}} \tag{2}$$

adódik, melyből látszik, hogy minden

$$r_0 > r_{min} = \left(\frac{8km}{B^2}\right)^{1/3}$$

esetén két különböző v_0 esetén is létrejöhet ugyanazon a körpályán történő mozgás. $r_0 = r_{min}$ esetén $v_0 = eBr_0/4m$ adódik az indítási sebességre, $r_0 < r_{min}$ esetén pedig nem jöhet létre körmozgás.



1. ábra. Az elektronokat azonos nagyságú, ellentétes irányú sebességgel indítjuk.

Az általános megoldás

Most térjünk rá a probléma általános tárgyalására! Jelöljük az elektronok helyvektorait $\boldsymbol{r}_1$-gyel, illetve $\boldsymbol{r}_2$-vel, sebességeiket pedig $\boldsymbol{v}_1$-gyel, illetve $\boldsymbol{v}_2$-vel! A kezdőfeltételek legyenek teljesen általánosak, csupán annyit kössünk ki, hogy mindkét elektron sebessége merőleges legyen a mágneses térre! Mivel a ponttöltésekre ható valamennyi erő merőleges lesz a mágneses térre, biztosak lehetünk abban, hogy az elektronok a mágneses térre merőleges síkban fognak mozogni. Az elektronokra a mozgásegyenletek:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{F}_c - e\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{B}, \tag{3}$$

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = -\boldsymbol{F}_c - e\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{B}, \tag{4}$$

ahol

$$\boldsymbol{F}_c = \frac{-ke^2}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^3}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1).$$

Vezessük be az

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \tag{5}$$

relatív helyvektort, illetve a tömegközéppontba mutató

$$\boldsymbol{R} = \frac{\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2}{2} \tag{6}$$

vektort mint új változókat! A (3) és (4) egyenletekben az $\boldsymbol{r}_1$ és $\boldsymbol{r}_2$ mennyiségeket és a sebességeket kifejezve az $\boldsymbol{r}$ és $\boldsymbol{R}$ új változókkal (5) és (6) felhasználásával, majd az egyenleteket összeadva, a tömegközéppont mozgására az

$$\ddot{\boldsymbol{R}} = -\frac{e}{m}\dot{\boldsymbol{R}} \times \boldsymbol{B} \tag{7}$$

egyenlet adódik. Ez a mozgásegyenlet pontosan olyan, mint egyetlen elektron mozgásegyenlete homogén mágneses térben. Tehát a tömegközéppont egyenletes körmozgást fog végezni $\Omega = eB/m$ szögsebességgel. Fontos kiemelni, hogy ez bármely olyan kezdőfeltétel mellett így van (nem csak olyankor, mint amit a feladat b) részében kirónak), amikor is az elektronok kezdősebességei merőlegesek a mágneses térre. Az $\boldsymbol{r}$ és $\boldsymbol{R}$ változókkal kifejezett (3) és (4) mozgásegyenleteket egymásból kivonva eljutunk a relatív helyvektor mozgásegyenletéhez:

$$m\ddot{\boldsymbol r} = \frac{2\,k\,e^2}{r^3}\boldsymbol r - e\dot{\boldsymbol r}\times\boldsymbol B. \tag{8}$$

Láthattuk tehát, hogy a mozgásegyenletek szeparálódnak a tömegközépponti (7), illetve a relatív (8) mozgás változói szerint. A (8) egyenlet megoldásához nagy segítséget ad a megmaradó mennyiségek ismerete. Tudjuk, hogy mágneses tér hiányában a relatív mozgáshoz tartozó

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\mu\,\dot{\boldsymbol r}^2 + U(\boldsymbol r)$$

energia és az

$$\boldsymbol N = \mu\,\boldsymbol r\times\dot{\boldsymbol r}$$

impulzusmomentum megmarad (ahol $\mu = m/2$ a redukált tömeg). Vajon mi a helyzet mágneses tér jelenlétében? Ehhez a Lagrange-függvény vizsgálatával juthatunk el legkönnyebben.

A Lagrange-függvény

Mindenekelőtt nézzük meg, hogy homogén mágneses térben mozgó (egyetlen) elektronhoz milyen Lagrange-függvény rendelhető! Általánosabb esetben, tetszőleges elektromágneses térben mozgó ponttöltés Lagrange-függvénye nem fejezhető ki a mágneses indukcióval és az elektromos térerősséggel, csak a potenciálokkal. Homogén mágneses térben viszont találhatunk olyan $\boldsymbol B$-vel kifejezhető Lagrange-függvényt, melyből a helyes mozgásegyenlet származtatható. A térre merőlegesen mozgó elektron esetén egy lehetséges Lagrange-függvény az

$$\begin{aligned}\mathfrak{L} &= \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2) - \frac{e}{2}B(x\dot y - y\dot x) = \\ &= \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol r}^2 - \frac{e}{2}\boldsymbol B(\boldsymbol r\times\dot{\boldsymbol r}).\end{aligned} \tag{9}$$

A

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x} - \frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot x},\qquad \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial y} - \frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot y} \tag{10}$$

Euler–Lagrange-egyenletekbe behelyettesítve a (9)-ben megadott Lagrange-függvényt, megkapjuk az x és y koordináta mozgásegyenleteit, melyek az

$$m\ddot{\boldsymbol r} = -e\dot{\boldsymbol r}\times\boldsymbol B \tag{11}$$

mozgásegyenletnek a komponensegyenletei lesznek, tehát a megsejtett Lagrange-függvény valóban helyes.

Két elektron esetén, a Coulomb-kölcsönhatást is figyelembe véve a Lagrange-függvény

$$\begin{aligned}\mathfrak{L} &= \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol r}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol r}_2^2 - U(\boldsymbol r_2 - \boldsymbol r_1) - \\ &- \frac{e}{2}\boldsymbol B(\boldsymbol r_1\times\dot{\boldsymbol r}_1) - \frac{e}{2}\boldsymbol B(\boldsymbol r_2\times\dot{\boldsymbol r}_2).\end{aligned} \tag{12}$$

A tömegközépponti (6) és relatív (5) helyvektorokra való áttéréssel a rendszer Lagrange-függvénye:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^{\mathrm{TKP}} + \mathfrak{L}^{\mathrm{rel}} \tag{13}$$

tömegközépponti és relatív tag összegére szeparálódik, ahol

$$\mathfrak{L}^{\mathrm{TKP}} = m\dot{\boldsymbol R}^2 - e\boldsymbol B(\boldsymbol R\times\dot{\boldsymbol R})$$

és

$$\mathfrak{L}^{\mathrm{rel}} = \frac{m}{4}\dot{\boldsymbol r}^2 - U(\boldsymbol r) - \frac{1}{4}e\boldsymbol B(\boldsymbol r\times\dot{\boldsymbol r}).$$

A relatív mozgás

Az alábbiakban koncentráljunk a relatív mozgásra, hisz a tömegközéppont mozgását már a (7) mozgásegyenlet alapján értelmeztük! Mivel – mint korábban már említettük – az $\boldsymbol r$ vektor síkmozgást végez, érdemes bevezetni az r és φ síkbeli polárkoordinátákat. Ezekkel a változókkal

$$\dot{\boldsymbol r}^2 = \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2,\qquad \boldsymbol B(\boldsymbol r\times\dot{\boldsymbol r}) = B\,r^2\dot\varphi,$$

illetve mivel a potenciál csak a két elektron távolságától függ

$$U(\boldsymbol r) = U(r).$$

A relatív mozgás Lagrange-függvénye az r és φ változókban

$$\mathfrak{L}^{\mathrm{rel}} = \frac{m}{4}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) - U(r) - \frac{1}{4}e\,B\,r^2\varphi. \tag{14}$$

A (14) kifejezést a

$$\frac{\partial\mathfrak{L}^{\mathrm{rel}}}{\partial r} - \frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\frac{\partial\mathfrak{L}^{\mathrm{rel}}}{\partial\dot r} \tag{15}$$

egyenletbe behelyettesítve az r koordináta mozgásegyenletére

$$\frac{m}{2}\ddot r - \frac{m}{2}r\dot\varphi^2 + \frac{\mathrm dU}{\mathrm dr} + \frac{1}{2}e\,B\,r\dot\varphi = 0 \tag{16}$$

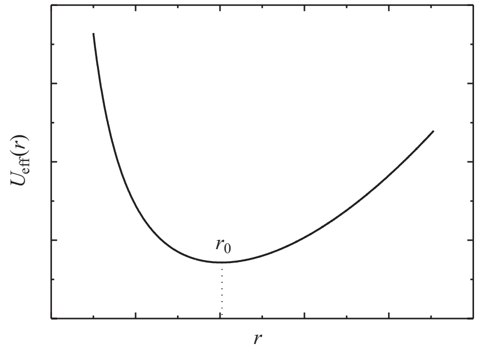
adódik. Mivel a (14) Lagrange-függvény független a φ koordinátától, azaz $\partial\mathfrak{L}^{\mathrm{rel}}/\partial\varphi = 0$, a

$$\frac{\partial\mathfrak{L}^{\mathrm{rel}}}{\partial\varphi} - \frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\frac{\partial\mathfrak{L}^{\mathrm{rel}}}{\partial\dot\varphi} \tag{17}$$

egyenletből az következik, hogy az

$$A = \frac{m}{2}r^2\dot\varphi - \frac{1}{4}e\,B\,r^2 \tag{18}$$

mennyiség mozgásállandó. Eljutottunk tehát egy megmaradó mennyiséghez, ami nagyon fontos eredmény a ké-



2. ábra. Az egydimenziósra redukált mozgáshoz tartozó effektív potenciál mint az elektronok távolságának a függvénye.

sőbbiekhez. A Kepler-problémából ismert, hogy mágneses tér hiányában az

$$N = \frac{1}{2}\, m\, r^2\, \dot\varphi$$

mennyiség, a relatív mozgáshoz tartozó impulzusmomentum nagysága mozgásállandó.

A (18) egyenletből látszik, hogy $B \neq 0$ esetén az impulzusmomentum kizárólag akkor lesz mozgásállandó, ha kikötjük r állandóságát, ami a feladat egyik feltétele. A (18) egyenletből az is következik, hogy r állandósága $\dot\varphi$ állandóságát is maga után vonja, ami annyit jelent, hogy ha a relatív mozgás körmozgás, akkor mindenképp egyenletes is. A (17) egyenletben a deriválásokat elvégezve az

$$m\, r\, \ddot\varphi + 2\, m\, \dot r\, \dot\varphi - e\, B\, \dot r = 0 \tag{19}$$

mozgásegyenlethez jutunk. Mivel a Lorentz-erő munkája zérus, ezért várhatóan a relatív mozgáshoz tartozó

$$\varepsilon = \frac{m}{4}\left(\dot r^2 + r^2\, \dot\varphi^2\right) + U(r) \tag{20}$$

energia mozgásállandó, azaz

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{21}$$

A (20) kifejezést a (21) egyenletbe beírva, és felhasználva a (16) és (19) egyenleteket valóban az adódik, hogy a relatív mozgás energiája (20) mozgásállandó. Az energiamegmaradás vizsgálata révén is eljuthatunk arra a következtetésre (20), hogy ha r = állandó ($\dot r = 0$), akkor a mozgás egyenletes körmozgás.

A (18) egyenletből $\dot\varphi$-t kifejezve, majd (20)-ba beírva

$$\varepsilon = \varepsilon_{\rm kin}^{\rm rad} + U_{\rm eff}(r) \tag{22}$$

adódik, ahol

$$\varepsilon_{\rm kin}^{\rm rad} = \frac{m}{4}\, \dot r^2 \quad \text{és}$$

$$U_{\rm eff}(r) = \frac{m}{4}\, r^2 \left(\frac{2\,A}{m\, r^2} + \frac{e\,B}{2\,m}\right)^2 + U(r).$$

Eszerint egy $U_{\rm eff}(r)$ effektív potenciálban történő egydimenziós mozgásra sikerült redukálni a problémát. A *2. ábra* vázlatosan mutatja az effektív potenciált

$$U(r) = k\, \frac{e^2}{r} \tag{23}$$

Coulomb-potenciál esetén. Figyelemre méltó, hogy míg a Kepler-problémában ($B = 0$, $U(r) = -ke^2/r$) csak $\varepsilon < 0$ esetén lehet korlátos mozgás, ebben az esetben nem így van.

A távolság állandóságának feltétele

Kérdés, hogy mekkora r_0 felel meg a körmozgásnak. Ekkor, ahogy a *2. ábrá*n is látszik

$$\left.\frac{\mathrm{d}\, U_{\rm eff}(r)}{\mathrm{d}\, r}\right|_{r = r_0} = 0, \tag{24}$$

azaz

$$\frac{-2\, A^2}{m\, r_0^3} + \frac{e^2\, B^2}{8\, m}\, r_0 - k\, \frac{e^2}{r_0^2} = 0. \tag{25}$$

A (18) kifejezésben figyelembe véve, hogy $r = r_0$, $\dot\varphi = v_{\rm rel}/r_0$, majd A értékét beírva a (25) egyenletbe

$$e\, v_{\rm rel}\, B - 2\, k\, \frac{e^2}{r_0^2} = m\, \frac{v_{\rm rel}^2}{r_0} \tag{26}$$

adódik. Ez utóbbi egyenletből a relatív sebességre

$$v_{\rm rel} = \frac{e\,B\,r_0}{2\,m} \pm \sqrt{\left(\frac{e\,B\,r_0}{2\,m}\right)^2 - 2\, \frac{k\, e^2}{m\, r_0}} = 2\, v_0 \tag{27}$$

adódik, ahol v_0 már korábban (2) definiált. Ebből az eredményből ugyanazt az

$$r_0 > r_{\rm min} = \left(\frac{8\, k\, m}{B^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

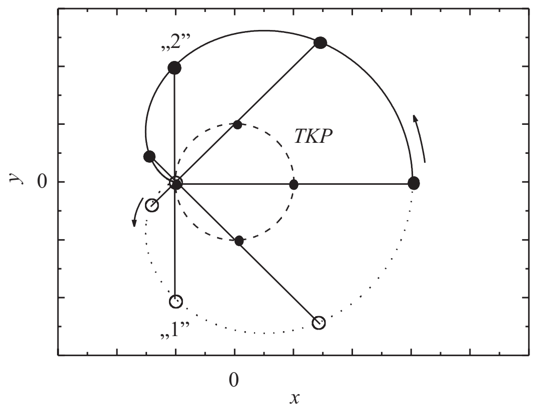
feltételt kapjuk az állandó távolság megvalósíthatósági tartományára, mint a (2) egyenletből. A $v_{\rm rel} = 2v_0$ eredmény a feladat kérdésénél általánosabb esetekre adja meg a választ: minden olyan kezdőfeltétel esetén, amikor az elektronokat összekötő szakaszra merőleges kezdősebességek olyanok, hogy a relatív sebesség $2v_0$ a távolság állandó marad. Ez abban az esetben, mikor az egyik elektron áll, nyilván azt jelenti, hogy a másikat $2v_0$ sebességgel kell indítani.

Ha tehát az elektronokat $r_0 = r_{\rm min}$ feltétel mellett az összekötő egyenesre merőleges v_1 és v_2 (pl. ellentétes) sebességekkel indítjuk,

$$v_{\rm rel} = \frac{e\,B\,r_0}{2\,m} = v_1 + v_2. \tag{28}$$

A relatív mozgás szögsebessége:

$$\omega = \dot\varphi = \frac{v_{\rm rel}}{r_0} = \frac{e\,B}{2\,m}. \tag{29}$$



3. ábra. Az elektronok helycseréje. A „2” a kezdetben elindított elektron (tömör), az „1” a kezdetben álló (kitöltetlen).

A tömegközéppont szögsebessége pedig:

$$\Omega = \frac{eB}{m} = 2\,\omega. \tag{30}$$

A tömegközéppont V sebessége:

$$V = \Omega\, R = \frac{v_2 - v_1}{2}. \tag{31}$$

A (28), (29), (30) és (31) összefüggéseket figyelembe véve a tömegközéppont által leírt körpálya sugarára

$$R = \frac{1}{4}\, r_0 \left(\frac{v_2}{v_0} - 1 \right) \tag{32}$$

adódik.

A (32), (5) és (6) összefüggéseket felhasználva például a „2” elektron helyvektora (hasonlóképpen az „1” elektron helye is) az idő függvényében megadható:

$$\boldsymbol{r}_2(t) = \frac{r_0}{4}\left(\frac{v_2}{v_0} - 1\right)\big[\cos(\Omega\, t),\ \sin(\Omega\, t)\big] + \frac{r_0}{2}\big[\cos(\omega\, t),\ \sin(\omega\, t)\big]. \tag{33}$$

Most térjünk vissza a feladat szövegének megfelelően arra az esetre, amikor csak az egyik („2”) elektront lökjük meg ($v_2 = 2v_0$)! Ekkor a „2” elektron sebességére

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_2(t) &= \dot{\boldsymbol{r}}_2(t) = \\ &= \frac{r_0\,\Omega}{4}\big[-\sin(\Omega\, t) - \sin(\omega\, t),\ \cos(\Omega\, t) + \cos(\omega\, t)\big] = \\ &= \frac{r_0\,\Omega}{2}\left[-\sin\left(\frac{\Omega + \omega}{2}\, t\right),\ \cos\left(\frac{\Omega + \omega}{2}\, t\right)\right]\cdot\cos\left(\frac{\omega}{2}\, t\right) \end{aligned} \tag{34}$$

adódik. Az egyenletből látszik, hogy $\boldsymbol{v}_2$ akkor lesz zérus, ha

$$t = \frac{\pi}{\omega} = 2\,\pi\,\frac{m}{eB} = T, \tag{35}$$

azaz, amíg a tömegközéppont megtesz egy teljes kört. A *3. ábrá*n néhány nevezetes pontban feltüntettük a kezdetben álló „1”, illetve a meglökött „2” elektron pályáját. A görbe úgynevezett cardioid vagy szívgörbe. Ilyen görbét ír le egy rögzített korongon csúszásmentesen gördülő azonos sugarú korong egy kerületi pontja. Az ábráról jól látható, hogy amíg a két elektron helyet cserél, addig a tömegközéppont pontosan egyszer körbejár.

Újabb problémák felvetése

Eddigi eredményeinket felhasználhatjuk újabb problémák felvetéséhez és megválaszolásához. Ahogy a Kepler-probléma esetén is az egyik fő cél a pálya származtatása, úgy ebben az esetben is lehetőség nyílik erre, noha az analitikus formában történő megadás nem triviális. A (18) egyenletből $\dot{\varphi}$-ot, a (20) egyenletből $\dot{r}$-ot kifejezve, a (23) összefüggést felhasználva

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\left(\dfrac{2A}{m r^2} + \dfrac{eB}{2m}\right)\mathrm{d}r}{\sqrt{\dfrac{4}{m}\left[\varepsilon - \dfrac{m}{4}\, r^2\left(\dfrac{2A}{m r^2} + \dfrac{eB}{2m}\right)^2 - k\,\dfrac{e^2}{r}\right]}} \tag{36}$$

adódik. A (36) differenciálegyenletből az $r(\varphi)$ pályagörbe elvben származtatható, hisz sikerült a problémát kvadratúrára visszavezetni.

Ismert feladat annak kiszámítása, hogy egymástól r_0 távolságra elhelyezett ellentett ponttöltések (pl. elektron–pozitron pár) mennyi idő múlva találkoznak. A megoldás különböző interpretációi viszonylag közismertek. Újabb, érdekes feladat lehet ennek a kérdésnek a feltevése az Eötvös-verseny feladat körülményei között, azaz homogén mágneses térben. Vegyük észre, hogy ez megint csak az általános problémakör speciális esete más kezdőfeltételekkel. Ehhez a (20) egyenlet átrendezett alakjából kapott

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\dfrac{4}{m}\left[\varepsilon - \dfrac{m}{4}\, r^2\left(\dfrac{2A}{m r^2} + \dfrac{eB}{2m}\right)^2 + k\,\dfrac{e^2}{r}\right]}} \tag{37}$$

egyenletet kell megoldani $\varepsilon = U_{\mathrm{eff}}(r_0)$ feltétel mellett.

Összefoglalás

Végezetül elmondható, hogy a feladat összes kérdésére válaszoltunk, ha nem is a feltevés sorrendjében, hanem inkább ahogy a gondolatmenet logikája azt megkívánta. A problémakör általános tárgyalása sok olyan érdekesség meglátására adott lehetőséget, melyek egy elemi megoldás során nem kerülnek a felszínre.

Irodalom

HRASKÓ PÉTER: *Elméleti mechanika* – Egyetemi tankönyv, PTE, 1995.

CSERTI JÓZSEF: *A 2004. évi Eötvös-verseny 3. feladata*

I.N. BRONSTEJN, K.A. SZEMENGYAJEV: *Matematikai zsebkönyv* – Műszaki Kiadó, Budapest, 1963.