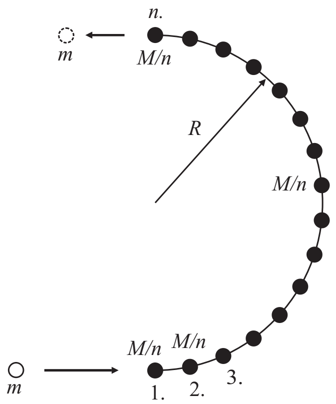
NÉGYSZÖGLETES KERÉK

135. PROBLÉMA

Egy jégpályán R sugarú félkör mentén egyenletesen elosztva elhelyezünk n darab ($n \gg 1$) egyforma fekete jégkorongot, melyek össztömege M. A korongoknak az *ábrá*n látható irányból (balról) nekilökünk egy m tömegű fehér korongot, amely a fekete korongokkal való rugalmas ütközések sorozata után eredeti mozgásirányával éppen ellentétesen (tehát balra) távozik.



a) Legalább mekkora kell legyen a M/m tömegarány, hogy a leírt folyamat végbemehessen?[1]

b) Eredeti sebességének hányad részére csökken a fehér korong sebessége az ütközéssorozat végére, ha a tömegarány éppen az előző kérdésben szereplő határeset?

(A súrlódást a jég és a korongok, valamint fehér és a fekete korongok között elhanyagolhatjuk. A korongok mérete a félkör sugarához képest kicsi, a korongok tömegpontoknak tekinthetők.)

(*Kunfalvi Rezső emlékverseny,* Budapest, 2003)

[1] A probléma kitűzésekor *tévesen* fordított egyenlőtlenség szerepelt a kérdésben, továbbá a feladat ábrája lemaradt. Az Olvasók szíves elnézését kéri a Rovatszerkesztő.

A 135. PROBLÉMA MEGOLDÁSA

a) Vizsgáljuk meg először, hogy mekkora α szögben térülhet el a fehér korong az első rugalmas ütközés során, és mekkora lehet eközben a relatív sebességváltozása! Jelöljük a fehér korong kezdősebességét $\boldsymbol{v}_0$-lal, ütközés utáni sebességét $\boldsymbol{v}_1$-gyel, a meglökött (M/n tömegű fekete korong sebességét pedig $\boldsymbol{u}$-val! Az impulzusmegmaradás törvénye szerint

$$m\boldsymbol{v}_0 = m\boldsymbol{v}_1 + \frac{M}{n}\boldsymbol{u},$$

az energiamegmaradás törvénye szerint pedig

$$\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_0^2 = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{n}\boldsymbol{u}^2.$$

Az első egyenletből kifejezve az $\boldsymbol{u}$ vektort és a második-ba helyettesítve a $\boldsymbol{v}_1$ vektor nagyságára a következő kvadratikus egyenletet kapjuk:

$$v_1^2\left(1+\frac{m\,n}{M}\right) - 2\,\frac{m\,n}{M}\,v_1\,v_0\cos\alpha + v_0^2\left(\frac{m\,n}{M}-1\right) = 0,$$

amelynek akkor van valós megoldása, ha az egyenlet diszkriminánsa nem negatív:

$$4\left(\frac{m\,n}{M}\right)^2 v_0^2\cos^2\alpha \geq 4\,v_0^2\left(1+\frac{m\,n}{M}\right)\left(\frac{m\,n}{M}-1\right),$$

azaz

$$\sin\alpha \leq \frac{M}{n\,m}.$$

A fehér korong akkor pattoghat végig a fekete korongsoron, ha az eltérülési szöge éppen a fekete korongok π/n nagyságú középponti szöge (pontosabban fogalmazva annál egy „hajszálnyival" nagyobb), a kérdéses tömegarányra tehát a

$$\frac{M}{n\,m} \geq \sin\frac{\pi}{n} \approx \frac{\pi}{n}, \qquad \text{azaz} \quad \frac{M}{m} \geq \pi$$

megszorítást kapjuk.

b) Ha a tömegarány éppen a fenti határeset, akkor a relatív sebességváltozás:

$$\frac{v_1}{v_0} = \cos\frac{\pi}{n}\cdot\frac{n}{n+\pi} \approx \frac{n}{n+\pi},$$

n ütközés után tehát a fehér korong sebessége az eredeti érték

$$\left(1+\frac{\pi}{n}\right)^n$$

részére csökken, amely arány $n \to \infty$ határesetben (azaz $n \gg 1$ esetén) $e^\pi \approx 23{,}14$-hez tart. A fehér korong sebessége tehát az eredeti érték 1/23-ára, mintegy 4%-ra csökken.

Meglepő, hogy egy ilyen egyszerű klasszikus mechanikai feladat megoldásában egyszerre bukkan fel a matematika két leghíresebb transzcendens száma, méghozzá furcsa módon hatvány alakban.

136. PROBLÉMA

Van egy négyzet alakú telkünk, 100 méter hosszú kerítéssel körbekerítve. A föld ára a kerítésen belül négyzetméterenként 100 \$, a kerítésen kívül pedig 200 \$. Lehetőségünk van a kerítés áthelyezésére olymódon, hogy a kerítés hossza, továbbá a telek valamelyik átlójának két végpontja változatlan maradjon.

Hogyan módosítsuk a telkünk határát, ha a legnagyobb nyereséget szeretnénk elérni? (A feladat elemi úton, fizikai megfontolások felhasználásával is megoldható!)

(*Vladimir Sedach,* Seattle, USA)