A LAGRANGE-MECHANIKA ALAPJAI

Papp Tibor
ELTE, fizikushallgató

Azzal a célkitűzéssel, hogy a manapság tanított analízis és lineáris algebra nyelvezetét összhangba hozzuk a mechanikában még ma is használatos fogalmakkal és jelölésekkel, jelen tanulmány keretében a Lagrange-mechanika newtoni megalapozását vesszük nagyító alá. Ehhez elsőként a régi és a jelenlegi matematika néhány fogalmát kell tisztáznunk.

Matematikai fogalmak

Halmazok és függvények

A modern matematika alapját a logika és a halmazelmélet adja. A halmazelmélet szerepe kettős. Egyrészt axiómái biztosítják a legfontosabb objektumoknak, azaz a természetes ($\mathbb{N}$) és valós ($\mathbb{R}$) számok halmazának létezését, másrészt eszközeivel lehetővé teszi a matematika szinte minden ágának a halmazelméleten belüli megfogalmazását. Az egzaktság érdekében ezen eszközöknek egy igen szűk részét mi is használni fogjuk. A logikai eszközök közül a kvantorokat: $\forall$ „bármely” és $\exists$ „létezik olyan”, továbbá a := „legyen egyenlő” definiáló egyenlőséget. A halmazokat megadhatjuk az elemeinek felsorolásával ($A := \{1, 2, \ldots, n\}$), vagy egy adott A halmaz egy részhalmazát ($\subseteq$) képezhetjük valamilyen T tulajdonsággal: $B := \{x \in A \mid T(x)\}$. Itt B azokat az A-beli elemeket tartalmazza, amelyekre T teljesül. Ha A és B halmazok, akkor $A\times B$-vel jelöljük a direktszorzatukat, vagyis az (a,b) párok összességét (itt $a\in A$ és $b\in B$ értelemszerűen). Továbbá A^n jelölje az $A\times A\times\ldots\times A$ (n-szer) halmazt, vagyis az A elemeiből képzett rendezett n-esek összességét. Ha A és B halmazok, akkor egy olyan f függvényt, amely A-ból B-be képez $f : A \mapsto B$-vel jelöljük. Ekkor f értelmezési tartománya ($\mathfrak{Dom} f$) része A-nak, és értékkészlete ($\mathfrak{Ran} f$) része B-nek. Ha $\mathfrak{Dom} f = A$, akkor f megadásakor az $f : A \to B$ jelölést használjuk. Ezekkel a jelölésekkel a szokásos értelemben bevezethető az egyváltozós ($\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$) és a többváltozós ($\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$) függvények folytonossága, differenciálhatósága és folytonosan differenciálhatósága (ez utóbbi azt jelenti, hogy a derivált függvény is folytonos, és ha van perem, akkor arra folytonosan kiterjeszthető).

A lineáris algebra alapfogalmai

Az $\mathbb{R}^n$ tér elemei vektorok, melyeket össze tudunk adni, valós számmal meg tudunk szorozni, továbbá két vektort egymással skalárisan össze tudunk szorozni. Általában egy olyan halmazt, amelyben értelmes ez a három művelet, és ugyanazok a műveleti tulajdonságai, mint $\mathbb{R}^n$-ben, valós euklideszi vektortérnek nevezünk. Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ vektorok lineáris kombinációján a $\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+\ldots+\alpha_k\mathbf{a}_k$ vektort értjük, ahol α_j-k valós számok. Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ vektorokat lineárisan függetlennek nevezzük, ha egyik sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként. $\mathbb{R}^n$-ben legfeljebb n darab lineárisan független vektor adható meg, és ekkor ezek már lineáris kombinációkkal előállítják a tér összes vektorát. Ilyenkor nevezzük az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorokat bázisnak. Egy bázis elemeinek a száma – akárhogyan választjuk is meg azokat – mindig ugyanaz. Ezt a számot nevezzük a tér dimenziójának (azaz $\dim\mathbb{R}^n = n$). Egy adott $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ bázisban tehát elő lehet állítani a tér összes $\mathbf{v}$ vektorát, azaz a tér minden vektorához hozzárendelhető egy $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ szám n-es, melyre

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{a}_j.$$

Ezt a hozzárendelést nevezzük az adott bázisbeli reprezentációnak. Egy $A \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazt altérnek nevezünk, ha $\forall$ $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ és $\forall$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b} \in A$. Például $\mathbb{R}^3$-ben altereket képeznek az origót tartalmazó síkok és egyenesek. Nyilván $\mathbb{R}^n$ minden altere maga is valós euklideszi tér, és két altér metszete szintén altér lesz. Egy A altér ortogonális kiegészítőjének az A altér összes vektorára merőleges vektorok halmazát nevezzük, és $A^\perp$-sel jelöljük, azaz $A^\perp := \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \mid \forall\, \mathbf{b} \in A \textit{ esetén } \mathbf{ab} = 0\}$. Például egy origót tartalmazó sík ortogonális kiegészítője az origót tartalmazó a síkra merőleges egyenes. Könnyen belátható, hogy $A^\perp$ is altér, és hogy A-nak egy bázisa és $A^\perp$-nek egy bázisa együttesen az $\mathbb{R}^n$ tér egy bázisát adja, azaz $\dim A + \dim A^\perp = n$. Ha A altér, akkor minden vektor egyértelműen előáll egy A-beli és egy $A^\perp$-beli vektor összegeként. Az előbbit nevezzük az adott vektor A-ra vett merőleges vetületének, az utóbbit az $A^\perp$-re vett merőleges vetületének.

A differenciál értelmezése

A manapság tanított standard analízisben már nem tananyag a differenciálok azon klasszikus értelmezése, amelyekre a klasszikus fizika és elsősorban a mechanika sok fejezete épül. Ezért itt azok jelentését röviden tárgyaljuk. Először is tekintsünk egy $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}$-ben differenciálható függvényt. Az f gráfjához az $(a, f(a))$ pontban megrajzolhatjuk az érintőt. Ezt az egyenest az origóba tolva kapjuk azt az egyenest, amelyet az f függvény a pontbeli differenciáljának nevezzük, azaz az $y = f'(a)\,x$ egyenletű egyenest. Ezt az egyenest egy függvénnyel is leírhatjuk. Jelölje ezt a függvényt $df(a)$, és a változója legyen h, vagyis $df(a)(h) = f'(a)\,h$. A $g(x) = x$ identitásfüggvény deriváltja 1. Így ha ezt a függvényt g helyett x-szel jelöljük, akkor a differenciál előbbi értelmében $dx(h) = h$. Ezzel viszont az f függvény a-beli differenciálja átírható: $df(a)(h) = f'(a)\,dx(h)$, vagy elhagyva a változókat $df(a) = f'(a)\,dx$, még klasszikusabban $df(x) = f'(x)\,dx$. Az utóbbi jelölésnél viszont észben kell tartanunk, hogy x egyrészt jelöl egy olyan pontot, ahol f deriválható, és jelöli az identitásfüggvényt is. Könnyen meggondolható, hogy a deriváláson keresztül a differenciál megörökli a műveleti tulajdonságokat, sőt értelmet kap az $f'(x) = df(x)/dx$ jelölés, és ezáltal pedig a Leibniz-szabály és a láncszabály klasszikusan felírt formulája is. Többváltozós függvény esetén a differenciált érintő terekkel (a gráfot érintő alterekkel) értelmezzük. Legyen $f:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható valamilyen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pontban. Ekkor az $(\mathbf{x},f(\mathbf{x}))$ ponthoz tartozó érintő alteret ($n = 2$ esetén érintő síkot) eltolva az origóba kapjuk azt az alteret, amelyet most differenciálnak nevezünk. Ennek az altérnek az egyenletét a $df(\mathbf{x})$ függvénnyel írjuk le, ahol

$$df(\mathbf{x})\,(\mathbf{h}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} h_2 + \ldots + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} h_n .$$

Annak igazolását, hogy a $df(\mathbf{x})$ függvénynek a gráfja valóban a keresett altér, az olvasóra bízzuk. Ha x_i-vel jelöljük az i-edik változó identitásfüggvényét (azaz $x_i(\mathbf{a}) = a_i$), akkor a fenti értelemben – mivel az x_i függvény deriváltja az i-edik koordinátában 1, a többiben 0 – egyszerűen képezhetjük az x_i függvény differenciálját: $dx_i(\mathbf{h}) = h_i$. Mindezek értelmében a fenti függvényt változók nélkül felírhatjuk

$$df(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} dx_n .$$

A megfelelő meggondolásokkal a differenciál most is megörökli a deriválás műveleti tulajdonságait.

A Lagrange-mechanika axiómái

Vizsgáljunk inerciarendszerből egy N anyagi pontból álló mechanikai rendszert. Legyenek a koordináták $\mathbf{r}^{(1)}$, $\mathbf{r}^{(2)}$, …, $\mathbf{r}^{(N)}$ és a tömegek $m^{(1)}$, $m^{(2)}$, …, $m^{(N)}$. Vezessük be a szokásos átkoordinátázást

$$\mathbf{x} := (\underbrace{x_1,\ x_2,\ x_3,}_{\mathbf{r}^{(1)}}\ \underbrace{x_4,\ x_5,\ x_6,}_{\mathbf{r}^{(2)}}\ \ldots,\ \underbrace{x_{3N-2},\ x_{3N-1},\ x_{3N}}_{\mathbf{r}^{(N)}})$$

és

$$\underline{m\,\mathbf{x}} := (m_1 x_1,\ m_2 x_2,\ \ldots,\ m_{3N} x_{3N}),$$

ahol $m_1 = m_2 = m_3 = m^{(1)}$, $m_4 = m_5 = m_6 = m^{(2)}$ stb. Keressük a mozgás idejének $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ intervallumát és a mozgás pályáját leíró $\mathbf{x} : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^{3N}$ kétszer folytonosan differenciálható függvényt. Ezt a függvényt a továbbiakban a változójával együtt $\mathbf{x}(t)$-vel jelöljük.

Fizikai ismereteink

Először is ismertnek tekintjük a kezdeti feltételeket, azaz a $t = 0$ időpillanathoz tartozó helyeket és sebességeket. Adottnak tekintjük a szabaderőket, azaz egy $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{6N+1} \mapsto \mathbb{R}^{3N}$ függvényt, amelyről feltesszük, hogy folytonos, és $\mathfrak{Dom}\mathbf{F}$ nyílt halmaz. Továbbá ismertnek tételezzük fel a kényszerfeltételeket leíró egyenleteket, azaz egy $0 < k < 3N$ egész számot, és $\forall\ i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ esetén a

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij}(\mathbf{x}, t)\, dx_j + b_i(\mathbf{x}, t)\, dt = 0 \qquad (1)$$

egyenleteket, ahol $a_{ij} : \mathbb{R}^{3N+1} \to \mathbb{R}$ és $b_i : \mathbb{R}^{3N+1} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények. Normális (holonóm) esetben a fenti egyenletek helyett az $f_i(\mathbf{x},t) = 0$ egyenletekkel írjuk le a kényszerfeltételeket, ahol $f_i : \mathbb{R}^{3N+1} \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. Közvetlen geometriai jelentése csak ezeknek van. A fent megadott egyenletekre úgy kell gondolni, mint a geometriai jelentést hordozó kényszerfeltételek differenciáljaira.

A konfigurációs tér

Az általános eset tárgyalása előtt tekintsük a legegyszerűbb esetet. Legyen $N = 1$, és legyen egyetlen holonóm kényszer, azaz adott az $f(\mathbf{x},t) = 0$ egyenlet. Ez az egyenlet minden t időpillanatban egy felületet ír le a 3-dimenziós térben, amelyet kényszerfelületnek nevezünk. Rögzítsünk most egy t időpillanatot! A kényszerfelület ehhez a rögzített időpillanathoz tartozó alakjának adott $\mathbf{x}$ ponthoz tartozó érintő síkját toljuk el az origóba! A kapott síkot (pontosabban alteret) az adott $\mathbf{x}$ helyhez és t időpillanathoz tartozó konfigurációs térnek nevezzük. Ennek jele $\mathtt{Konf}(\mathbf{x},t)$. Könnyű belátni, hogy a $\mathtt{Konf}(\mathbf{x},t)$ síknak (altérnek) az egyenlete differenciálisan

$$\underbrace{\frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial x_1}}_{a_1(\mathbf{x},t)} dx_1 + \underbrace{\frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial x_2}}_{a_2(\mathbf{x},t)} dx_2 + \underbrace{\frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial x_3}}_{a_3(\mathbf{x},t)} dx_3 = 0.$$

Hagyomány szerint a $\mathtt{Konf}(\mathbf{x},t)$ sík elemeit *virtuális elmozdulás*oknak nevezzük, és $\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}$-szel jelöljük. Vagyis $\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}$-ek azok a vektorok, amelyeknek a komponenseit ha beírjuk a dx_1, dx_2, dx_3 differenciálok helyére, akkor a 0 = 0 azonosságot kapjuk. Ezek alapján már felírhatjuk $\mathtt{Konf}(\mathbf{x},t)$ egzakt definícióját is. Ehhez vezessük be az $\mathbf{a}(\mathbf{x},t) := (a_1(\mathbf{x},t), a_2(\mathbf{x},t), a_3(\mathbf{x},t))$ jelölést:

$$\mathtt{Konf}(\mathbf{x},t) := \left\{ \boldsymbol{\delta x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{a}(\mathbf{x},t) \cdot \boldsymbol{\delta}\mathbf{x} = 0 \right\}.$$

Ebből viszont látható, hogy az $\mathbf{a}(\mathbf{x},t)$ vektor merőleges a $\mathtt{Konf}(\mathbf{x},t)$ síkra, azaz $\mathbf{a}(\mathbf{x},t) \in \mathtt{Konf}(\mathbf{x},t)^{\perp}$. Még egy dolgot hangsúlyoznunk kell. Azzal a feltevéssel éltünk, hogy az adott időben és helyen létezik az f térbeli alakjának érintő síkja, vagyis azt tettük fel, hogy $\dim\mathtt{Konf}(\mathbf{x},t) = 2$, és jogos az a követelmény is, hogy ez minden helyen és időben igaz legyen. Vagyis itt egy – a kényszerfeltételeket megszorító – feltevésről van szó, amelynek a teljesülését a fizikai valóság követeli meg. Ezek alapján már könnyen megfogalmazhatjuk a megfelelő fogalmakat és feltevéseket az általános esetben is. Ehhez már csak azt kell végiggondolni, hogy több kényszerfeltétel esetén adott helyen és időben mindegyiknek külön-külön vehetjük az érintő terét, ezeket eltolhatjuk az origóba, így annyi alteret kapunk, ahány kényszerfeltétel van, a konfigurációs tér pedig ezeknek az altereknek a metszete lesz (azaz csak olyan virtuális elmozdulásokat engedünk meg, amelyek mindegyik kényszerfeltételnek eleget tesznek). Így most már egzaktul definiálhatjuk az (1) egyenletek által meghatározott konfigurációs teret. Ehhez vezessük be az $\mathcal{N}_k := \{1, 2, \ldots, k\}$

halmazt, és $\forall\ i \in \mathcal{N}_k$ esetén az $\mathbf{a}_i := (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i3N})$ vektort, ahol az (1)-ben meghatározottak szerint $\mathbf{a}_i : \mathbb{R}^{3N+1} \to \mathbb{R}^{3N}$ folytonos.

$$\mathtt{Konf}(\mathbf{x},t) := \left\{ \delta\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{3N} \,\middle|\, \begin{array}{c} \forall\ i \in \mathcal{N}_k \text{ esetén} \\ \mathbf{a}_i(\mathbf{x},t)\cdot\delta\mathbf{x} = 0 \end{array} \right\}.$$

Elszakadva mindenfajta geometriai szemléltetéstől, azt hogy $\mathtt{Konf}(\mathbf{x},t)$ minden helyen és időben altere lesz $\mathbb{R}^{3N}$-nek, onnan tudjuk, hogy $\mathtt{Konf}(\mathbf{x},t)$-t egy k egyenletből álló $3N$ ismeretlenes ($k < 3N$) homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai adják, melyek alteret alkotnak $\mathbb{R}^{3N}$-ben. A $\mathtt{Konf}(\mathbf{x},t)$ altér dimenziója nyilván helyről-helyre és időről-időre változhat. Továbbá az is világos, hogy ez az altér legalább $3N-k$ dimenziójú, hiszen ebből a k számú egyenletből, ha adott helyen és időben $0 \le l \le k$ számú független, akkor a konfigurációs tér $3N-l$ dimenziós. Fizikailag azonban fontos – mint azt a fenti szemléltetésben láttuk –, hogy a konfigurációs tér minden helyen és időben azonos dimenziójú legyen, azaz:

Konfigurációs elv: Megköveteljük, hogy minden helyen és időben a konfigurációs tér $3N-k$ dimenziós legyen, azaz $\forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N}$ és $\forall\ t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\dim\mathtt{Konf}(\mathbf{x},t) = 3N-k.$$

Nyilván azért a $3N-k$ dimenziót követeljük meg, és nem többet, mert fölöslegesek az összefüggő egyenletek. Mint azt láttuk, $\forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N}$ és $\forall\ t \in \mathbb{R}$ esetén $\forall\ i \in \mathcal{N}_k$-ra $\mathbf{a}_i(\mathbf{x},t) \in \mathtt{Konf}(\mathbf{x},t)^{\perp}$. A konfigurációs elv tulajdonképpen azzal ekvivalens, hogy minden helyen és időben ezek az $\mathbf{a}_1(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{a}_2(\mathbf{x},t)$, …, $\mathbf{a}_k(\mathbf{x},t)$ vektorok a $\mathtt{Konf}(\mathbf{x},t)^{\perp}$ altér bázisát képezik. Sőt a konfigurációs elvből az is következik (illetve azzal is ekvivalens), hogy az eredeti (1) egyenletrendszer minden helyen és időben független egyenletekből áll. A $3N-k$ szám a konfigurációs elv miatt kitüntetett szerepet kap, hiszen ez a szám mutatja meg, hogy hány független irányban történhetnek virtuális elmozdulások. Éppen ezért ezt a számot a rendszer szabadsági fokának nevezzük és f-fel jelöljük: $f := 3N-k$.

A kényszerfeltételek és az $\mathbf{x}(t)$ pálya

Az $N = 1$-hez kötött előző pontban tárgyalt speciális esetből azt is végiggondolhatjuk, hogy az anyagi pontnak az $f(\mathbf{x},t) = 0$ egyenletű felületen kell mozognia. Vagyis a keresett $\mathbf{x}(t)$ pályának $\forall\ t \in \mathcal{I}$ esetén ki kell elégítenie ezt az egyenletet, azaz $\forall\ t \in \mathcal{I}$ esetén $f(\mathbf{x}(t),t) = 0$. Véve ennek az idő szerinti teljes deriváltját az

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f(\mathbf{x}(t),t)}{\partial x_j}\,\dot{x}_j(t) + \frac{\partial f(\mathbf{x}(t),t)}{\partial t} = 0$$

egyenletet kapjuk. Ezt már átfogalmazhatjuk az általános esetre is.

Kényszerelv: Megköveteljük, hogy a keresett $\mathbf{x}(t)$ pálya kielégítse a kényszerfeltételeket, azaz $\forall\ t \in \mathcal{I}$ és $\forall\ i \in \mathcal{N}_k$ esetén

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij}(\mathbf{x}(t),t)\,\dot{x}_j(t) + b_i(\mathbf{x}(t),t) = 0.$$

Itt a $\forall\ i \in \mathcal{N}_k$ feltételt azért kötöttük ki, mert csak olyan megoldást keresünk, amely az összes kényszerfeltételnek eleget tesz. Ez a követelmény k egyenletet jelent a keresett $\mathbf{x}(t)$ $3N$ ismeretlenére.

További egyenletek meghatározásához újabb feltevések szükségesek. Most mutatunk két ekvivalens feltevésrendszert. Az egyiket *Newton-féle szemlélet*nek, a másikat *D'Alembert-féle szemlélet*nek nevezzük. Mindkét szemlélet felteszi a kényszernek, azaz olyan erőnek a létét, amely az anyagi pontokat a „kényszerfelületen tartja”. Hogy pontosan mit is jelent ez a mondat, azt az egyes szemléletek rögzítik.

A Newton-féle szemlélet

A newtoni szemlélet úgy közelíti meg a kényszer fogalmát, hogy – mivel a pontrendszernek a kényszerfelületen kell maradnia, azért – a keresett pálya mentén a kényszernek ki kell oltania a szabaderőnek a kényszerfelületre merőleges komponensét. Persze az (1) egyenletekből a kényszerfelület általában meghatározhatatlan (ez csak holonóm esetben lehetséges), annyit azonban biztosan tudunk, hogy a kényszernek a keresett pálya mentén merőlegesnek kell lennie a kényszerfelületre. Ezt viszont ki tudjuk fejezni a konfigurációs térrel is, hiszen a konfigurációs tér nem más, mint az adott időhöz és helyhez tartozó érintő tere a kényszerfelületnek, vagyis a kényszer akkor merőleges a kényszerfelületre, ha merőleges a konfigurációs térre. Vagyis a keresett pálya mentén a kényszernek merőlegesnek kell lennie a konfigurációs térre.

A virtuális munka elve: $\exists\ \mathbf{K} : \mathbb{R}^{6N+1} \mapsto \mathbb{R}^{3N}$ folytonos és $\mathfrak{Dom}\mathbf{K} = \mathfrak{Dom}\mathbf{F}$ függvény, amelyre a keresett $\mathbf{x}(t)$ pálya mentén $\forall\ t \in \mathcal{I}$ és $\forall\ \delta\mathbf{x} \in \mathtt{Konf}(\mathbf{x}(t),t)$ esetén

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t)\cdot\delta\boldsymbol{x} = 0.$$

Ezek után a kényszerekkel kibővítve felírhatjuk a dinamika alaptörvényét:

A dinamika alaptörvénye: A keresett $\mathbf{x}(t)$ pálya mentén $\forall\ t \in \mathcal{I}$ esetén

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) + \mathbf{K}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) = \underline{m}\,\ddot{\mathbf{x}}(t).$$

Ezek a feltevések már elegendőek ahhoz, hogy meghatározhassuk a keresett $\mathbf{x}(t)$ pályát. Ennek igazolása előtt azonban vizsgáljuk meg a másik szemléletet.

A D'Alembert-féle szemlélet

Az, hogy a keresett pálya mentén a kényszer kioltja a szabaderő kényszerfelületre merőleges komponensét, úgy is megfogalmazható, hogy a szabaderőnek a konfigurációs tér ortogonális kiegészítőjére vett merőleges vetülete a kényszer ellentettjét adja. A D'Alembert-féle szemlélet attól vált a Newton-féle szemlélettől függetlenné, hogy a keresett pálya mentén a $-\underline{m\ddot{\mathbf{x}}}$-ot is szabaderőnek tekinti. Ha $A \subseteq \mathbb{R}^{3N}$ altér, akkor jelölje $\mathcal{P}_A$ az A altérre merőlegesen vetítő operátort. Ekkor a fenti gondolat mindent egybevetve így írható:

A D'Alembert-elv: $\exists\, \mathbf{K} : \mathbb{R}^{6N+1} \rightarrowtail \mathbb{R}^{3N}$ folytonos és $\mathfrak{Dom}\mathbf{K} = \mathfrak{Dom}\mathbf{F}$ függvény, amelyre a keresett $\mathbf{x}(t)$ pálya mentén $\forall$ $t \in \mathcal{I}$ esetén

$$\mathcal{P}_{\mathtt{Konf}(\mathbf{x}(t),\,t)^{\perp}}\left[\mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) - \underline{m\ddot{\mathbf{x}}(t)}\right] = -\mathbf{K}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t).$$

A következő egyenlet azt fejezi ki, hogy a bővített szabaderő a keresett pálya mentén merőleges a konfigurációs térre. Ez a feltevés azért szükséges, mert ennyi kell minimálisan ahhoz, hogy a két szemlélet ekvivalens legyen, és a hagyomány szerint is ez a D'Alembert-elvek kanonikus alakja.

A D'Alembert-egyenlet: A keresett $\mathbf{x}(t)$ pálya mentén $\forall$ $t \in \mathcal{I}$ és $\forall$ $\delta\mathbf{x} \in \mathtt{Konf}(\mathbf{x}(t),t)$ esetén

$$\left[\mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) - \underline{m\ddot{\mathbf{x}}(t)}\right]\cdot\delta\mathbf{x} = 0.$$

A szemléletek ekvivalenciája

A szemléletekben megfogalmazottak feltevések a keresett $\mathbf{x}(t)$ pályáról, vagyis az ekvivalenciát is a keresett pálya mentén kell igazolni. Így az alábbi igazolásoknál tartsuk ezt észben, és akkor nem kell kiírni a függvények változóit.

Newtontól D'Alembert-ig. A dinamika alaptörvényét átalakíthatjuk: $\mathbf{F}+\mathbf{K}-\underline{m\ddot{\mathbf{x}}} = \mathbf{0}$. Megszorozva ezt az egyenletet $\delta\mathbf{x}$-szel és felhasználva a virtuális munka elvét, miszerint $\mathbf{K}\,\delta\mathbf{x} = 0$, megkapjuk a D'Alembert-egyenletet. Vagyis az $\mathbf{F}-\underline{m\ddot{\mathbf{x}}}$ benne van a konfigurációs tér ortogonális kiegészítőjében, azaz erre a térre vett merőleges vetülete önmagát adja, és tudjuk, hogy $\mathbf{F}-\underline{m\ddot{\mathbf{x}}} = -\mathbf{K}$, azaz igaz a D'Alembert-elv.

D'Alembert-től Newtonig. A D'Alembert-egyenlet szerint az $\mathbf{F}-\underline{m\ddot{\mathbf{x}}}$ vektor benne van a konfigurációs tér ortogonális kiegészítőjében, vagyis az erre a térre vett merőleges vetülete önmagát adja, így felhasználva a D'Alembert-elvet az $\mathbf{F}-\underline{m\ddot{\mathbf{x}}} = -\mathbf{K}$ egyenletet, vagyis a dinamika alaptörvényét kapjuk. Ha ezt az egyenletet megszorozzuk $\delta\mathbf{x}$-szel, akkor a D'Alembert-egyenletet felhasználva adódik, hogy $\mathbf{K}\,\delta\mathbf{x} = 0$, vagyis igaz a virtuális munka elve is.

Az elsőfajú mozgásegyenletek

Most megmutatjuk, hogyan lehet előállítani a keresett pályát az előző feltevésekből. Használjuk a Newton-féle szemléletet! Tudjuk, hogy létezik a $\mathbf{K}$ kényszer, és a keresett pálya mentén benne van a konfigurációs tér ortogonális kiegészítőjében. Azt is láttuk *A konfigurációs tér* alfejezetben, hogy az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ vektorok bázisát adják ennek a térnek minden helyen és időben (a konfigurációs elv miatt), így a keresett pálya mentén $\mathbf{K}$ reprezentálható ebben a bázisban, vagyis a keresett pálya mentén $\mathbf{K} = \lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\ldots+\lambda_k\mathbf{a}_k$. Ezt viszont be lehet tenni a dinamika alaptörvényébe, vagyis tudjuk, hogy a keresett pálya mentén fennáll az

$$\mathbf{F} + \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{a}_k = \underline{m\ddot{\mathbf{x}}}$$

egyenlet. Ez $3N$ egyenletet jelent $3N+k$ ismeretlenre, hiszen a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ úgynevezett Lagrange-multiplikátorok is ismeretlenek. Ugyanakkor a kényszerelv még biztosít számunkra k egyenletet, tehát összesen van $3N+k$ egyenletünk, vagyis a probléma elvben megoldható. Hangsúlyozzuk viszont, hogy feltevéseink nem teljesek abban az értelemben, hogy nem biztosítják egyértelmű megoldás létezését, „csak” annyit tesznek lehetővé számunkra, hogy megoldási módszereket konstruáljunk. Erre volt példa a most felírt $3N+k$ egyenlet.

Irodalom

MATOLCSI TAMÁS: *Analízis I.* – ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1999

MATOLCSI TAMÁS: *Analízis II.* – ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1999

CSÁSZÁR ÁKOS: *Valós analízis I.* – Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999

ABONYI IVÁN, NAGY TIBOR: *Elméleti fizika* – Tankönyvkiadó, Budapest, 1980

V.I. ARNOLD: *A mechanika matematikai módszerei* – Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985

BUDÓ ÁGOSTON: *Mechanika* – Tankönyvkiadó, Budapest, 1952

NAGY KÁROLY: *Elméleti mechanika* – Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1993

FIATAL CSILLAGOK ÉS KÖRNYEZETÜK KÖLCSÖNHATÁSAI

Kun Mária

MTA Konkoly Thege Miklós Csillagászati Kutatóintézete

A csillagok életútját és a fejlődésük különböző szakaszaiban megfigyelhető tulajdonságaikat egyértelműen meghatározza a tömegük. A legfiatalabb csillagok kivételek. Fejlődésük kezdeti szakaszaiban a csillagok még nagyon szoros kapcsolatban vannak azzal a csillagközi felhővel, amelyben születtek. Megfigyelhető tulajdonságaik jelentős része a környezet fizikai állapotát, valamint a csillag és környezete kölcsönhatásait tükrözi, nem a születő csillag tömegét és korát. Azt várhatjuk, hogy a különböző csillagkeletkezési régiókban feltűnő különbségeket találunk az azonos tömegű és korú csillagok megfigyelhető tulajdonságaiban. Ebben a cikkben ezekre a különbségekre mutatok be néhány példát.

A cikkben ismertetett kutatásokat az OTKA T34584 és T49082 sz. pályázatai támogatják.