KVANTITATÍV PROBLÉMAMEGOLDÁS MINKOWSKI-DIAGRAMON

Nagy Péter
Kecskeméti Főiskola GAMF Kar,
Matematika és Fizika Tanszék

A speciális relativitáselmélet alapvető összefüggései matematikailag igen egyszerűek. Például egy tetszőleges esemény különböző vonatkoztatási rendszerekben megfigyelhető tér- és időkoordinátáit összekapcsoló (egydimenziós) Lorentz-transzformáció:

$$x' = \gamma \left[x - \beta\,(c\,t)\right],\qquad c\,t' = \gamma\left[-\beta\,x + (c\,t)\right], \tag{1}$$

illetve az inverz Lorentz-transzformáció:

$$x = \gamma\left[x' + \beta\,(c\,t')\right],\qquad c\,t = \gamma\left[\beta\,x' + (c\,t')\right], \tag{2}$$

ahol:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{és} \quad \beta = \frac{v}{c}. \tag{3}$$

A Lorentz-transzformációból levezethető további összefüggések (mint pl. a sebesség-összeadódás törvénye, a hosszkontrakció, az idődilatáció és a Doppler-effektus stb.) sem bonyolultak, de hétköznapi szemléletünktől idegenek, nehezen érthetők. Mint sok más esetben itt is igaz, hogy a szemléltetés megkönnyítheti a megértést és ezáltal a problémamegoldást is. E célra *a relativitáselméletben a Minkowski-diagramot használjuk, amely egy ábrán jelenít meg két (vagy több) vonatkoztatási rendszert, így az anyagi világ eseményeihez rendelhető fizikai tulajdonságok különböző vonatkoztatási rendszerekben mérhető értékeit egyszerű (a megfelelő koordinátatengelyre való) vetítésekkel olvashatjuk le.* A téridő hiperbolikus geometriájából eredően azonban a választott „nyugalmi” rendszerhez képest mozgó további vonatkoztatási rendszerek koordinátatengelyei az ábrán torzulnak: mind a szögek, mind a léptékek megváltoznak. A tengelyek felvétele a relatív sebesség, illetve egy tetszőleges esemény mindkét vonatkoztatási rendszerben mért adatainak ismeretében könnyen elvégezhető (lásd az *Egy kidolgozott példa* fejezetet). Gondot jelent azonban a tengelyek léptékeinek kalibrálása.

Az alábbi idézet (az egyik legjobb relativitáselméleti tankönyvnek tekinthető) [1] könyvből származik: „Kalibráljuk a K' vonatkoztatási rendszer tengelyeit! Rajzoljuk meg a $t^2 - x^2$ hiperbolát! Azon a helyen, ahol a hiperbola metszi a K rendszer t tengelyét (ahol $x = 0$) $t = 1$ m. De a $t^2 - x^2$ mennyiség invariáns, ezért ugyanekkor $t'^2 - x'^2 = 1$. Így azon a helyen, ahol a hiperbola metszi a K' vonatkoztatási rendszer t' tengelyét (ahol $x' = 0$), ott $t' = 1$ m, tehát megkaptuk a K' vonatkoztatási rendszer léptékét.”

Mindez igen világos, a kérdés csupán az, hogy *miként rajzoljuk meg azt a bizonyos hiperbolát pontosan?!* Továbbgondolva a dolgot a válasz persze az, hogy *valójában* nem rajzoljuk meg a hiperbolát, a fenti megfogalmazás csak *egy lehetséges definíciót ad a léptékre* vonatkozóan. Ezek után a didaktikus lépés az lenne, hogy egyszerű és gyakorlati utasítást adjunk a skálázás manuális elkészítésére. Furcsa, hogy ezen a problémán a tankönyvek átsiklanak, pedig e nélkül a pontos rajz nem készíthető el, s így a Minkowski-diagram kvantitatív információk kinyerésére alkalmatlan. Több mint egy tucat tankönyvet, jegyzetet, valamint több száz (a Google kereső által „Minkowski-diagram” kulcsszóra talált) internetes anyagot átböngészve sem leltem erre vonatkozó konkrét javaslatot. Nyilvánvaló pedig, hogy a K' vonatkoztatási rendszer tengelyeinek léptéke a relatív sebesség által meghatározott. Léteznie kell tehát egy, a továbbiakban η-val jelölt skálafaktornak, amely megadja, hogy a „nyugalmi” rendszer léptékéhez képest hányszorosára kell nyújtanunk az új tengelyek léptékét, és hogy ez csak a relatív sebesség függvénye: $\eta(\beta)$. Végül *Hraskó Péter* nagyszerű, új könyvében [3] találtam egy feladatot, amely erre vonatkozott, de a Minkowski-diagramon való problémamegoldást ő sem vitte tovább.

A skálafaktor meghatározása

Készítsük el egy egydimenziós mozgás Minkowski-diagramját a szokásos módon! A K vonatkoztatási rendszer vízszintes tengelyén az időt (pontosabban a $c\,t$ mennyiséget), a függőleges tengelyén pedig a távolságot (az x mennyiséget) vesszük fel; a két tengely léptékét válasszuk azonosnak (*1. ábra*).

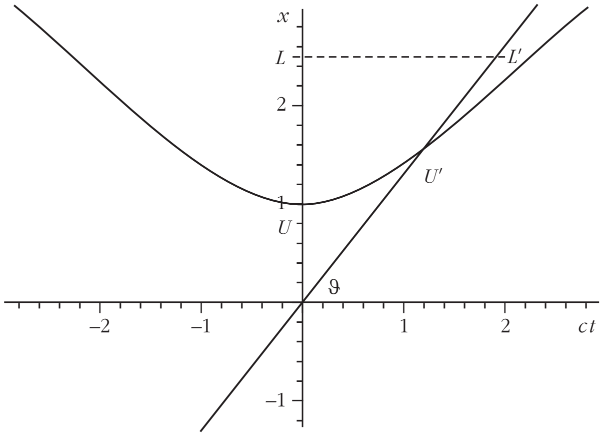
Keressük meg most az ábránkon a K' vonatkoztatási rendszer x' tengelyét! Ezt könnyen megtehetjük, ha észrevesszük, hogy az x' tengely nem más, mint a $t' = 0$ pontok mértani helye, tehát az (1) Lorentz-transzformáció második összefüggése alapján az

$$x = \frac{1}{\beta}\,(c\,t)$$

egyenletre jutunk, amely a diagramunkon egy

$$\tan\vartheta = \frac{1}{\beta}$$

meredekségű egyenest jelöl ki (most az általánosság megszorítása nélkül a két vonatkoztatási rendszer origóját azonosnak vesszük fel, az *Egy kidolgozott példa* részben bemutatjuk, hogy miként kell dolgozni, ha a két



1. ábra. A *K* rendszer Minkowski-diagramja

origó nem esik egybe). Jegyezzük meg, hogy a legutóbbi összefüggésünkből következik, hogy:

$$\sin\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}. \qquad (4)$$

A kérdés az, hogy milyen kapcsolat van a vesszőtlen tengelyek U léptéke és vesszős tengelyek U' léptéke között a Minkowski-diagramon. (Szemléltetésül az *1. ábrá*n megrajzoltuk a hiperbolát, de a levezetésben nem támaszkodunk rá.) Vegyünk fel az x' tengelyen egy tetszőleges L' ($\Delta t' = 0$) szakaszt, majd tekintsük ezen szakasz x tengelyre vetített L hosszát!

A két vonatkoztatási rendszerben mérhető hosszadatok:

$$\Delta x = \frac{L}{U} \quad \text{és} \quad \Delta x' = \frac{L'}{U'}. \qquad (5)$$

A hosszadatok között a (2) első összefüggése teremt kapcsolatot:

$$\Delta x = \gamma\, \Delta x', \qquad (6)$$

mivel $t' = 0$. Olvassuk még le az ábráról azt az egyszerű trigonometriai kapcsolatot, hogy:

$$L = L' \sin\vartheta. \qquad (7)$$

Az (5), (6) és (7) felhasználásával:

$$\frac{L}{U} = \Delta x = \gamma\, \Delta x' = \gamma\, \frac{L'}{U'} = \gamma\, \frac{L/\sin\vartheta}{U'},$$

azaz:

$$U' = \frac{\gamma}{\sin\vartheta}\, U = \eta\, U,$$

ahol (3) és (4) felhasználásával a keresett skálafaktor:

$$\eta = \frac{\gamma}{\sin\vartheta} = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}. \qquad (8)$$

Ez utóbbi eredményünk azt az egyszerű és praktikus utasítást jelenti a Minkowski-diagram készítője számára, hogy a K' vonatkoztatási rendszer tengelyein a K rendszer tengelyein használt lépték η-szorosát kell felvenni, így minden további szerkesztés számszerűen pontos eredményeket szolgáltat.

1. megjegyzés: a skálafaktort természetesen levezethetjük a hiperbola és a tengely metszetére vonatkozó definíció alapján koordinátageometriai számolással, de didaktikusabbnak tűnik a fenti út, amely a Lorentz-transzformációból indul ki.

2. megjegyzés: a (8) skálafaktort sokkal rövidebb (de sokkal kevésbé szemléletes) teoretikus úton is levezethetjük: a Minkowski-diagramon a léptéktorzulás tulajdonképpen annak a következménye, hogy téridő hiperbolikus geometriáját „erőszakoljuk bele” a diagram euklideszi geometriájába, így lényegileg a hiperbolikus geometria $[(c\Delta t)^2 - \Delta x^2]$ metrikáját skálázzuk át az euklideszi $[(c\Delta t)^2 + \Delta x^2]$ metrikába, azaz:

$$\eta^2\left[(c\Delta t)^2 - \Delta x^2\right] = (c\Delta t)^2 + \Delta x^2,$$

tehát:

$$\eta = \sqrt{\frac{(c\Delta t)^2 + \Delta x^2}{(c\Delta t)^2 - \Delta x^2}} = \sqrt{\frac{1+\left(\dfrac{\Delta x}{c\Delta t}\right)^2}{1-\left(\dfrac{\Delta x}{c\Delta t}\right)^2}}$$

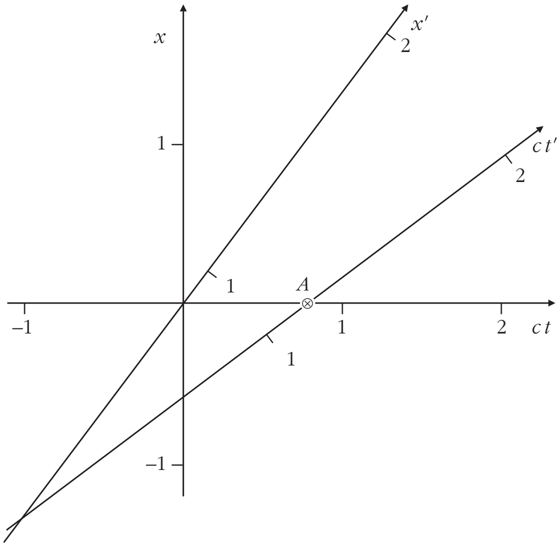
$$= \sqrt{\frac{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}{1+\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}.$$

Egy kidolgozott példa

> Gondor városa fölött kétely és félelem csüngött. Uruk meghalt, megégett, Rohan királya ott feküdt holtan a Fellegvárban, s a király, aki eljött hozzájuk egy éjszaka, reggelre elvonult, hogy megvívjon a sötét és rettentő hatalommal, azt pedig nincs erő, nincs vitézség, ami legyőzhetné. (*Tolkien*)

Napjaink egyik mozislágere Tolkien remekmívű meséje a *Gyűrűk Ura*. A történet helyszíne, Középfölde különös világ, talán egyik legkülönösebb vonása – melyet Tolkien nem említ, lévén nyelvész és nem fizikus –, hogy a fény terjedési sebessége mindössze 100 km/h. Trufa, a történet egyik főszereplője csodálatos lovat kap Rohan (Lovasvég) királyától, e táltos varázslatosan gyors, 75 km/h sebességgel (a fénysebesség háromnegyedével!) képes száguldani. A döntő csatában – melyet a Gyűrű Szövetsége vívott meg a Sötét Úrral Minas Tirith falai alatt – Trufa az álló Lidérc Király mellett elvágtatva tündérkardjával levágja annak fejét (nevezzük ezt profán egyszerűséggel A eseménynek).

a) Rajzolja fel a Lidérc Királyhoz rögzített K vonatkoztatási rendszer Minkowski-diagramját úgy, hogy mindkét tengelyen [100 km] = [45 mm] léptéket használ! Ábrázolja ezen a diagramon a vágtató Trufához rögzített K' vonatkoztatási rendszer tengelyeit léptékhelyesen, ha tudjuk, hogy A esemény K (Lidérc Király) órája szerint 7/9 órakor, K' (Trufa) órája szerint pedig 100/85 órakor történt!



2. ábra. A K' origójának meghatározása

b) A Lidérc Király halála (A esemény) után nem sokkal, Trufa órája szerint pontosan 0,9 órával, összedőlt – legyen ez a B esemény – Minas Morgul (a Gyűrűlidércek Tornya), amelynek K rendszerbeli helykoordinátája x_B = −50 km. A Lidérc Király órája szerint mennyi idő telik el a Lidérc Király halála és a torony összeomlása között? (Számolással és szerkesztéssel is!)

c) Középfölde népe persze meg van győződve arról, hogy a Lidérc Király halála okozta Minas Morgul összeomlását. Önnek mi a véleménye erről?

d) A csatába igyekezvén Trufa kénytelen volt átvágtatni a Halottak Völgyén. Trufa saját óráját éppen a völgy bejáratánál indította, amely szerint pontosan 10 perc alatt ért át a völgyön. Milyen hosszú valójában a Halottak Völgye? (Számolással és szerkesztéssel is!)

e) Milyen színűnek látta Trufa a Lidérc Király vérvörös színű pajzsát, mikor felé vágtatott? (Számolással és szerkesztéssel is!)

Megoldás

a)

$$\beta = \frac{3}{4};\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{4}{\sqrt{7}} = 1{,}512;$$

$$\eta = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}} = \sqrt{\frac{25}{7}} = 1{,}89;$$

$$L' = 1{,}89 \times 45 \text{ mm} \approx 85 \text{ mm a lépték.}$$

Tehát a K' vonatkoztatási rendszer időtengelye β = 3/4 meredekségű, és áthalad az (x = 0; t = 7/9) koordinátákkal adott A ponton (lásd a *2. ábrá*n). A K' vonatkoztatási rendszer origóját abból az információból határozhatjuk meg, hogy az ábrán felvett A pont időkoordinátája K' szerint 100/85 óra, tehát a már kiszámolt lépték birtokában az időtengelyen visszamérve a 100/85 egységet (azaz jelen esetben 100 millimétert), megkapjuk a keresett origót, melyen keresztül pedig meghúzhatjuk az 1/β = 4/3 meredekségű x' tengelyt. Ezzel a Minkowski-diagramon *pontosan* ábrázoltuk a két vonatkoztatási rendszer tengelyeit, készen állunk arra, hogy tetszőleges információt leolvashassunk az ábránkról.

b) Δx = −50 km; $\Delta t'$ = 0,9 óra. A Lorentz-transzformáció (1) képlete szerint: $\Delta t' = \gamma[-(v/c^2)\Delta x+\Delta t]$, amiből: Δt = 0,22 óra.

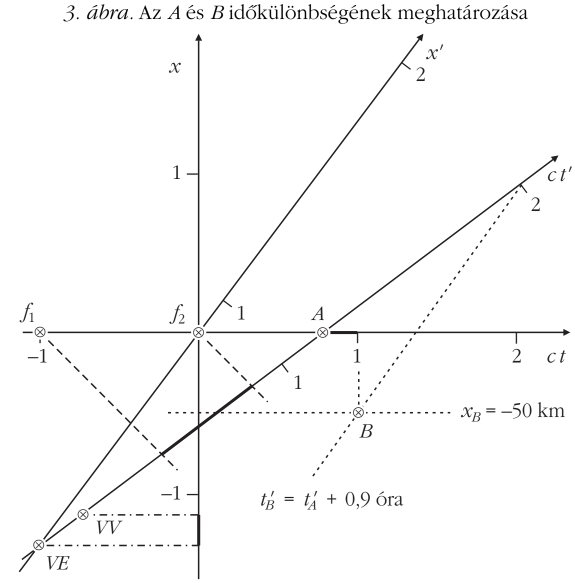
Másrészt a Minkowski-diagramon (lásd a *3. ábrá*t) az x_B = −50 km (ct tengellyel párhuzamos) egyenes és a $t_B' = t_A' + 0{,}9$ óra (x' tengellyel párhuzamos) egyenes metszéspontjával adódó B pontot a ct tengelyre vetítve A és B események K vonatkoztatási rendszerben mért időkülönbségére (a ct tengelyen megvastagított szakasz hossza ≈ 10 mm) Δt = (10 mm)/(45 mm)·(1 óra) = 0,22 óra adódik.

c) A Minkowski-diagramon jól látszik, hogy az A és B eseményeket összekötő szakasz meredeksége abszolút értékben nagyobb egynél (kb. −2,25 értékű). Így a két esemény között nem lehet ok-okozati kapcsolat (mivel a fénysebességnél gyorsabb hatásnak vagy információnak kellene összekapcsolni a két eseményt, melyet viszont a speciális relativitáselmélet nem enged meg), tehát csupán ezek alapján kijelenthetjük, hogy Lidérc Király halála semmiképpen sem okozhatta Minas Morgul pusztulását.

d) Trufa vonatkoztatási rendszerében a megtett távolság: $\Delta x'$ = 1/6 óra · 75 km/óra = 12,5 km, de ez a völgy valódi (K-beli nyugalmi) hosszánál kisebb, mivel a *hosszkontrakció* jelensége szerint: $\Delta x'/\gamma$, amiből: Δx = 18,9 km.

Másfelől a Minkowski-diagramon a megoldás roppant egyszerű. A feladat megfogalmazása szerint felvéve a *VE* (Völgy Eleje), illetve *VV* (Völgy Vége) eseményeket (természetesen mindkét pont a ct' tengelyen van, hiszen Trufa helyét jelölik, a *VE* pont időkoordinátája t' = 0, a *VV* ponté pedig t' = 10 perc = 1/6 óra = 1/6·85 mm = 14,2 mm), az intervallumot az x tengelyre vetítve (a megvastagított szakasz) Δx = 8,5 mm. Amiből (8,5 mm)/(45 mm)·(100 km) = 18,9 km adódik.

3. ábra. Az A és B időkülönbségének meghatározása



e) A Doppler-effektus relativisztikus képlete szerint a hullámhossz (és vele azonosan a periódusidő) torzulása: $\lambda' = \lambda[(1-\beta)/(1+\beta)]^{1/2} = 0{,}378\lambda$, így ha a vörös szín hullámhossza 700 nm, akkor mintegy 280 nm értéket kapunk, tehát kevéssel alatta van a látható tartománynak.

Az ábráról ugyanezt az arányt például a következőképpen olvashatjuk le. Tekintsük a K vonatkoztatási rendszerben a fény periódusidejét egységnyinek (ezt megtehetjük, hiszen úgyis csak az arány érdekel bennünket)! Vegyük fel az időtengelyen periódusidőnyi távolságban két fényjel (az ábrán f_1 és f_2 pontozott egyenesek) világvonalát (ezek −1 meredekségűek, hiszen Trufával szemben kell haladniuk), és keressük meg ezek metszéspontját a K' vonatkoztatási rendszer időtengelyével! A metszéspontok távolsága (a ct' tengelyen megvastagított szakasz) a K'-ben mért periódusidő, ami jelen esetben (32 mm)/(85 mm) = 0,377-szerese az egységnek, tehát ez a torzulás aránya.

Gyakorló feladat

A Roxfort Boszorkány- és Varázslóképző Szakiskola számunkra sok tekintetben különös világ. Sok egyéb furcsaság mellett a mi szempontunkból fontos, hogy az iskola területén például a fény terjedési sebessége csak 100 m/s.

Most éppen kviddics-mérkőzés zajlik, a Griffendél–Mardekár rangadó. Madam Hooch a mérkőzés játékvezetője a pálya középpontja felett lebeg, amikor közvetlenül mellette (pont a nézőkkel zsúfolt lelátó irányában) elhúz az aranycikesz (az egyik labda, melynek elkapása 150 pontot ér), szorosan a nyomában – Madam Hooch órája szerint csupán fél másodperc hátránnyal – Harry Potter száguld csaknem lelökve a seprűjéről szegény repüléstantanárt. Madam Hooch szerint az aranycikesz sebessége 60 m/s, míg Harry Potter Tűzvillám seprűje a 80 m/s végsebességével halad, így Harry hamarosan elkapta a cikeszt. Nevezzük ezt a továbbiakban *A* eseménynek!

a) Készítse el a Madam Hoochhoz rögzített K vonatkoztatási rendszert és a Harry Potterhez rögzített K' vonatkoztatási rendszert ábrázoló Minkowski-diagramot! A K vonatkoztatási rendszer léptéke legyen 100 m = 30 mm, az egyszerűség kedvéért Madam Hooch óráját indítsuk abban a pillanatban, amikor az aranycikesz elhalad mellette, Harry Potter óráját pedig a cikesz elkapásának pillanatától.

b) Az *A* esemény után kevéssel – Harry órája szerint pontosan 1,5 másodperccel – a lelátón ülő Piton professzort megüti a guta (*B* esemény). Madam Hooch szerint a *B* esemény 250 méterrel távolabb történt hozzá képest, mint az *A* esemény (tehát Harry még a lelátó előtt 250 méterrel kapta el a cikeszt). Ön szerint lehetséges-e, hogy Piton professzort (aki köztudomásúlag ki nem állhatja Harry Pottert) azért ütötte meg a guta, mert Harry elkapta az aranycikeszt? Számolással és szerkesztéssel is válaszoljon a kérdésre!

c) Mekkora az aranycikesz sebessége Harry szerint? Számolással és szerkesztéssel is válaszoljon a kérdésre!

Összefoglalás

A (8) összefüggéssel adott skálafaktor meghatározása lehetővé teszi *bármilyen,* a speciális relativitáselmélet keretei között megválaszolható egydimenziós probléma pontos számszerű megoldását a Minkowski-diagramon való ábrázolással tulajdonképpen egyetlen további képlet ismerete nélkül, csupán geometriai szerkesztéssel (az így elkészített Minkowski-diagram szerkezetébe „bele van kódolva” a Lorentz-transzformáció és ezen keresztül minden, abból származtatható összefüggés). A kidolgozott példa során nem került bemutatásra, de természetesen a sebesség-összeadódási probléma is kezelhető (a mozgó objektum világvonalát az egyik vonatkoztatási rendszerben ábrázolva leolvassuk a meredekségét a másik vonatkoztatási rendszerben), illetve tetszőleges dinamikai probléma is (az időtengelynek az energiatengelyt, a távolságtengelynek pedig az impulzustengelyt feleltetve meg).

Mindez didaktikai szempontból kettős haszonnal jár: egyfelől megkönnyíti a speciális relativitáselmélet megértését, másfelől minden problémát két teljesen eltérő módon oldhatunk meg (képletekkel, illetve szerkesztéssel), így az önmegerősítés (egy diák számára igen fontos) lehetőségét nyújtja.

Irodalom

1. E.F. Taylor, J.A. Wheeler: *Téridő-fizika* – Gondolat Kiadó, Budapest, 1974.
2. Vermes M.: *A relativisztikus távolságmérés* – KöMaL 1973/11
3. Hraskó P.: *Relativitáselmélet* – TypoTex, Budapest, 2002.

FIZIKAVERSENYEK BORSOD-ABAÚJ-ZEMPLÉN MEGYÉBEN

Ambrózy Béla, Kandó Kálmán Híradástechnikai és Műszeripari Szakközépiskola, Miskolc
Mester András, Diósgyőri Gimnázium, Miskolc
Petróczi Gábor, Ságvári Endre Gimnázium, Kazincbarcika

Az egyes tantárgyak népszerűsítésében, színvonalának megőrzésében nagy szerepük van az iskolák közötti megmérettetéseknek, éppen ezért sajnálatos, hogy a tanulmányi versenyek lebonyolítása az utóbbi időben anyagi források és támogatások csökkenése miatt egyre több nehézségbe ütközik. Igaz volt idő, amikor – egyesek szerint – nagyon megnőtt a számuk, de mára a versenyek versenyében kevesen maradtak talpon.

Jelen cikkben, a megyénkben rendezett, nem országos szervezésű fizikaversenyekről készült összeállítás. A fel-