HÁROM, TÖMEGKÖZÉPPONTTAL KAPCSOLATOS PROBLÉMA

Simon Péter
Leőwey Klára Gimnázium, Pécs

A következőkben három problémát vázolok fel, melyek mindegyike a kiterjedt merev test súlypontjával kapcsolatos. Mindhárom esetben először egy-egy jelenséget mutatok be. A jelenségek vizsgálatakor megfogalmazható egy-egy kérdés, melyek megválaszolása elméleti megfontolást igényel. A tömegközéppont fogalma és az egyensúlyi helyzetek jellemzése a középszintű érettségi vizsgán is követelmény, így a bemutatott jelenségek a gimnáziumi alapórákon is bemutathatók. A matematikai eszközöket is igénylő értelmezésük viszont sajnos meghaladja az átlagos tanuló türelmét, elmélyülésre való hajlandóságát, ezért inkább otthoni szorgalmi feladatnak tűzhető ki, illetve szakköri feldolgozásra alkalmas.

Első jelenség: „Asztallapon túlra kilógó” könyv

Adott négy azonos méretű, homogén anyageloszlású léc. Próbáljuk meg az asztal szélén a négy lécet egymásra, párhuzamosan úgy elhelyezni, hogy a legfelső léc már teljes egészében kilógjon az asztallapon túlra!

A négy léc teljesen azonos legyen, ne legyen rajtuk jelölés. (A négy lécet helyettesíthetjük négy azonos könyvvel is, így a jelenség gyakorlatilag előzetes készülés nélkül bemutatható akármelyik fizikaórán.) Tapasztalatom szerint még a fizikát szerető és értő diákok közül is csak kevesen találják meg próbálgatással e probléma megoldását. Ha sikerült is próbálgatással megtalálni a helyes elrendezést, akkor is érdemes elővenni a „megjelölt” léceket. A felső léc egyik felét fessük feketére, a másik fele maradjon világos. Az alatta lévőnek a negyede legyen fekete, és érdemes a további negyedeket is megjelölni vékony fekete vonallal. A harmadik léc hatoda, a negyedik léc nyolcada legyen sötét, s ezeknél is érdemes megjelölni a további hatodokat, illetve nyolcadokat is. Ezeket a léceket pontosan egymásra helyezve tegyük az asztalra úgy, hogy merőlegesek legyenek az asztal szélére. A legfelső (1) léc tömegközéppontját áthelyezhetjük az alatta lévő léc széle fölé, azaz $1/2 \cdot 1 = 1/2$-ét – amit feketére festettünk – óvatosan kitolhatjuk az asztallapon túlra. Ekkor az (1) léc még éppen egyensúlyban van, hisz a tömegközéppontja (a közepe) a (2) léc szélső pontja fölött van. Az ilyen helyzetű (1) és (2) lécek közös tömegközéppontja a (2) léc $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$-nél található, így ezt a pontot minden gond nélkül áthelyezhetjük a (3) léc szélső pontja fölé. Ekkor az asztalon túlra lóg az (1) léc 1/2-e, és a (2) léc 1/4-e. Az (1) és (2) lécek közös tömegközéppontja most a (3) léc széle fölött van, így az (1), (2) és (3) lécek közös tömegközéppontja a (3) léc $1/2 \cdot 1/3 = 1/6$-nál van. Ez a pont is áthelyezhető a (4) léc szélső pontja fölé, azaz a (3) léc – a felette levőkkel együtt – eltolható 1/6 lécnyivel. Hasonló megfontolások alapján az utolsó (4) léc eltolható hosszának $1/2 \cdot 1/4 = 1/8$-ával.

Most már az asztallapon túlra kilógnak egymást kiegészítve a lécek feketére festett részei, melyek hosszainak összege:

$$\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{24} > 1.$$

(A rúd hosszát 1-nek tekintettük.)

Mivel az asztallapon túlra kilógó feketére festett részek együttes hossza nagyobb, mint egy léc hossza, a legfelső (1) léc óhatatlanul teljes hosszában az asztallapon kívülre kerül. Az *1. ábrá*n látható lécek 48 centiméter hosszúak, így a legfelső léc a számolás és a tapasztalat szerint is 2 centiméterrel lóg ki.

Ezzel az igen egyszerű módszerrel könnyedén megoldottunk egy nehezebbnek nevezhető feladatot. Ismereteim szerint ez az elméleti feladat angol nyelven *Gamow–Cleveland: Fizika* című könyvében jelent meg először. Magyarul *Horváth Péter* tűzte ki a *KöMaL* 1962. októberi számában (97. oldal, 286. feladat). Abban a feladatban 5 teljesen egyforma L hosszúságú könyvet helyezünk egymásra:

„Határozzuk meg 5, majd tetszőleges n számú könyv esetében

a. azt a maximális távolságot a legfelső könyv szélének vetülete és az asztal széle között (x), amely az egyensúly felborulása nélkül elérhető;

b. az egyes könyvek kilógását (x_i) a fenti esetben!”

Az előző konkrét eset vizsgálata után már könnyedén megoldhatjuk az általános feladatot is. Az egymáshoz képest eltolt könyvek még éppen egyensúlyi helyzetben maradnak, ha a legfelső $i-1$ könyv tömegközéppontja az

1. ábra. A négyléces elrendezés. Minden léc bal, fekete szakasza az alátámasztáson túl lóg, így a legfelső léc teljes terjedelmében az asztallapon kívül van.

i-edik könyv szélére esik. Ide képzelhetünk $i-1$ egységnyi tömeget. Így a legfelső i darab könyv közös tömegközéppontja az i-edik könyv szélétől

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{i-1}$$

távolságra van, tehát az $i-1$-edik könyv ennyivel kitolható az egyensúly megbontása nélkül. Az i-edik könyv „kilógása” az alatta levőn túlra:

$$x_i = \frac{L}{2\cdot i}.$$

Ha n darab könyvet helyezünk egymásra, akkor a legfelső könyv és az asztal széle közötti távolság:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\cdot i},$$

ami tetszőleges nagy lehet. (Ez a megoldás a Fazekas Gimnázium akkor elsős gimnazista tanulójától, *Pelikán József*től származik. Megoldása 1963-ban jelent meg a márciusi számban.)

Második jelenség: „Hegynek futó” kettős kúp

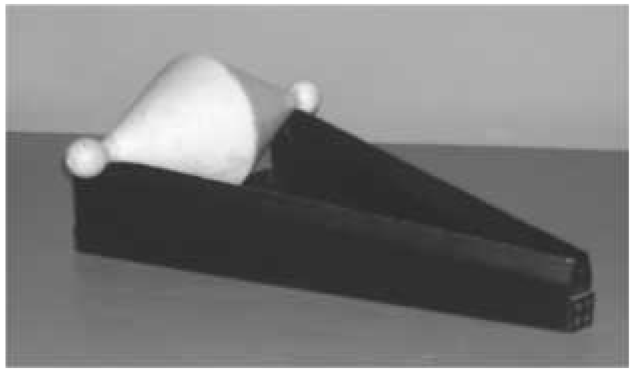
A legtöbb iskolai fizikaszertárban található – például a Calderoni cég által gyártott – felemás lejtő és a hozzá tartozó kettős kúp. (Ha ezek az eszközök nem állnak rendelkezésre, akkor sincs gond, hiszen két pálcával létrehozható a lejtő, papírból pedig tudunk kettős kúpot készíteni.)

A felemás lejtő két, felfelé szélesedő lécből készített ék alakú lejtő. Először a lejtő tetejére helyezett fémrudat engedjük el. Az várakozásainknak megfelelően gyorsulva halad lefelé a lejtőn. Most a kettős kúpot helyezzük a lejtő közepére, s ott engedjük el. Ha eddig a lejtőt csak oldalról mutattuk, diákjaink meglepődve látják, hogy a kettős kúp a lejtőn „felfelé” mozog, azaz „hegynek fut”.

Mi lehet a jelenség magyarázata? Érdemes megmutatni a lejtő sajátosságát. Sejthető, hogy a különös viselkedés hátterében a lejtő ékszerűsége és a lejtőn mozgó test alakja rejlik. Végigkövetve a kettős kúp mozgását a lejtőn, egy vonalzó segítségével méréssel is alátámaszthatjuk, hogy a kúp súlypontja lejjebb kerül a szélesedő ék alakú lejtőn való mozgása során. (A Calderoni cég által forgalomba hozott eszközön ez a süllyedés kb. 2 cm-nek adódik.)

Mi lehet a jelenség létrejöttének feltétele? Egy közismert fizikai kísérletgyűjteményben a következő mondatot találjuk: „A jelenség bekövetkezik, ha a kúp nyílásszögének fele nagyobb a lejtő hajlásszögénél.”

Könnyen meggyőződhetünk a fenti mondat pongyolaságáról, ha a következőt tesszük. Helyezzük a kettős kúpot a lejtő közepére, s a lejtőt a szélesebb végénél fogva emeljük meg. Ezzel a lejtő hajlásszögét változtatjuk. Így elérhető, hogy a lejtőre helyezett test továbbra is „felfelé” mozog, nyugalomban van vagy éppen „lefelé” mozog a lejtőn. A jelenség kimenetele valójában az lesz, hogy a kúp súlypontja mindig lejjebb kerül vagy helyben marad.



2. ábra. Kettős kúp a felemás lejtőn.

Ezt három szög együtt határozza meg. A kúp nyílásszöge legyen α, a lejtő hajlásszöge β, az ék alakú lejtő nyílásszöge φ. Gondolatban mozgassuk a kúpot felfelé a lejtőn y-nyit. Ezalatt a kúp alátámasztási pontja a lejtőn $y\sin\beta$-t emelkedik. Eközben a kúp alátámasztási pontja

$$y\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$$

értékkel közelebb kerül a kúp tengelyéhez, amelyen a kúp tömegközéppontja is van. A kúp súlypontjának magasságváltozása:

$$\Delta H = y\cdot\sin\beta - y\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Így a kettős kúp „hegynek futásának” feltétele:

$$\sin\beta < \sin\frac{\gamma}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

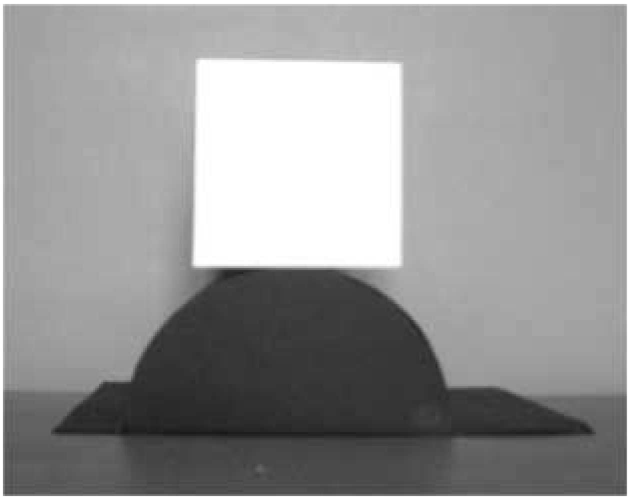
Harmadik jelenség: Félhengeren stabil egyensúlyban álló kocka

Kartonlapból készítsünk egy félhengert és két kockát. A félhenger alaplapja egy félkör, melynek átmérője legyen 15 cm, az egyik kocka oldaléle 20 cm, a másiké 10 cm. (Nyilván elegánsabb lenne fából készült testekkel dolgozni.) Helyezzük a félhengert az asztalra úgy, hogy a henger tengelye az asztalon feküdjön. Ezután óvatosan helyezzük a félhengerre a nagyobb kockát úgy, hogy az rajta egyensúlyi helyzetben legyen. Ebből a helyzetéből kicsit kimozdítva a kockát, az lecsúszik a félhengerről. Nehezen sikerül az egyensúlyi helyzetet megtalálni, s arról kiderül, hogy labilis. Most helyezzük a legkisebb kockát a félhengerre úgy, hogy az egyensúlyi helyzetben legyen, s a kocka alapélei vízszintesek legyenek. Ebből a helyzetéből kicsit kimozdítva kockát az néhány lengés után visszatér eredeti helyzetébe. Ez most stabil egyensúlyi helyzet (*3. ábra*).

A kockák egyensúlyi helyzetét vizsgálva eljutottunk egy komoly elméleti feladathoz:

„Határozzuk meg, mekkora kockát helyezhetünk az R sugarú félgömbre, ha azt akarjuk, hogy a kocka stabil egyensúlyban álljon!”

Ezt a feladatot 20 éve, 1986 márciusában tűzte ki *Szép Jenő* a *KöMaL*-ban (144. oldal, 2117. feladat). Nézzük a probléma megoldását.



3. ábra. A kocka stabil egyensúlyi helyzetben áll a félhengeren.

A félgömb (félhenger) sugara kegyen *R,* a kocka oldala *a*. Stabil egyensúlyi helyzetben akkor van a kocka, ha kis kitérítés esetén a helyzeti energiája növekszik. A helyzeti energia nulla szintjét a félhengerből és rajta a kockából álló rendszert az asztalra helyezve, a kocka kitérítés előtti helyzeti energiájaként adhatjuk meg:

$$E_1 = m \cdot g \cdot \left(R + \frac{a}{2} \right).$$

Most gördítsük el pici α szöggel a kockát. A félhenger közepe legyen *O,* a kockának a gördítés után a hengerrel érintkező pontja *A,* a gördítés előtti hengerrel való érintkezési pontja *B,* a kocka középpontja *C.* Az α szöggel való gördítés után az *OA* távolság függőleges vetülete: $R \cdot \cos\alpha$.

Az *AB* szakasz függőleges vetülete: $R \cdot \alpha \cdot \sin\alpha$. (Itt felhasználtuk, hogy α kicsi.)

A *BC* szakasz függőleges vetülete: $(a/2) \cdot \cos\alpha$.

Most már felírhatjuk az α szöggel való elforgatás helyzetéhez tartozó helyzeti energiát:

$$E_2 = m \cdot g \cdot \left(R \cdot \cos\alpha + R \cdot \alpha \cdot \sin\alpha + \frac{a}{2} \cdot \cos\alpha \right).$$

A stabil egyensúly feltétele: $E_2 > E_1$, azaz

$$R \cdot \cos\alpha + R \cdot \alpha \cdot \sin\alpha + \frac{a}{2} \cdot \cos\alpha > R + \frac{a}{2}.$$

Ebből, felhasználva, hogy ha α kicsi és ekkor $\sin\alpha \approx \alpha$, valamint $\cos\alpha \approx 1 - (\alpha^2/2)$, rendezés után adódik, hogy

$$R > \frac{a}{2}.$$

Vagyis, ha a félgömb átmérője nagyobb a kocka oldalánál, akkor a kocka stabil egyensúlyi helyzetben áll a félgömbön.

✧

A felvázolt három probléma mindegyike többé-kevésbé ismert. Az ilyen módon való tárgyalásukat azért tartom különösen érdekesnek, mert a gyakorlat és elmélet egységének nagyon szép példáit sikerül így felvillantani.

OPTIKAI MÉRÉSEK COMPACT DISC-KEL

Molnár Miklós, SzTE TTK Kísérleti Fizikai Tanszék
Farkas Zsuzsa, SzTE JGYTFK Fizika Tanszék

Cikkünkben ismertetjük a Szegedi Tudományegyetemen 2004. április 24-én megrendezett Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny (Fizika I. kategória, harmadik, kísérleti forduló) egyik feladatát. Bemutatjuk a kiadott feladatlapot, majd részletesen ismertetjük a feladat megoldását és a mérési eredményeket.

Feladatlap

1. Általános tudnivalók

Munkahelyén egy úgynevezett egyszer írható compact disc-et (CD-t) és egy lézerceruzát talál. Ezek felhasználásával kell optikai méréseket végeznie.

A CD-t 1,2 mm vastagságú műanyag lemezből, polikarbonátból (levegőre vonatkoztatott törésmutatója 1,584) alakítják ki (*1. ábra*). A sajtolással előállított CD úgynevezett pitekkel és bordákkal ellátott felületét 40 nm vastagságú alumíniumréteggel vonják be, tükrösítik. A tükrösítés után a CD-t még egy, körülbelül 2 μm-es védőréteggel látják el. Később erre az oldalra kerül a címke. Az úgynevezett információs sík letapogatása a lemez alsó oldalán történik. Átlátszó volta miatt ezt az oldalt transzparens rétegnek nevezik.

2. Mérésekhez rendelkezésre álló eszközök

1 db CD (compact disc) • 1 db lézerceruza (az általa kibocsátott fény hullámhosszát a lézeren feltüntettük) •

1. ábra. Egy szokványos CD felépítése, szerkezete.