ELOSZTOTT TÖMEGEK A KVARKANYAGBAN

Bíró Tamás Sándor
MTA KFKI RMKI

A kvarkanyag egy erősen kölcsönható plazma. Ha ideális gázként közelítjük, akkor az ezt a gázt alkotó részecskéknek nem határozott, hanem elkent, elosztott tömegük van. Ezen tömegeloszlás a kvarkanyag nyomás–hőmérséklet görbéjéből rekonstruálható: az eredmény jelentősen eltér a szabad kvarkok vagy gluonok tömegétől. Ez a jelenség összefügg a kvarkbezárással.

A kvarkanyag kvázirészecske modellje

Az Univerzum korai, forró őskorának egy szakaszán a világot kvarkanyag, forró kvark–gluon plazma töltötte ki. Hasonló anyag ma már csak gyorsítós kísérletekben, ott is csak nagyon rövid időre hozható létre. Szétrobbanása során rengeteg új hadron, a magerőkre érzékeny elemi részecske keletkezik, főleg pionok, de más, egzotikus részecskék is. A kirepülő részecskék spektruma mint egy hűlő mini-világegyetem, kívülről nézve kékeltolódást szenved. A távoli galaxisok vöröseltolódása az Ősrobbanást belülről szemlélteti, a kékeltolódás a felénk közeledő részecskék esetén lép fel. Ebből a spektrumból, a robbanás hevességéből igyekszünk következtetni a forró kvarkanyagban uralkodó nyomásra és hőmérsékletre, energiasűrűségre, röviden a kvarkanyag állapotegyenletére.

A kísérletek és a műszeres megfigyelés mellett elméleti számítások segítik a kutató fizikusokat annak megértésében, amit „látnak”. A kvarkok és gluonok, a kvarkanyag alkotóelemei között ható erők (illetve az azt leíró kvantum-kromodinamika, a QCD) ismeretében elvileg meghatározható az állapotegyenlet, s ezúton megjósolható a robbanás milyensége, kiszámítható a spektrum. Az einsteini $E = mc^2$ képlet alapján energiából (nyugalmi) tömeg keletkezik, ezt hordozzák az atommag-ütközésenként ezrével keletkező hadronok.

A kvarkanyag állapotegyenlete tehát az egyik alapvető kölcsönhatás, s ezzel világunk keletkezése megértésének a kulcsa. Mégis jelenleg több, egymással versengő elméleti számolás létezik, mert a QCD alapegyenleteiből eljutni a robbanás leírásáig és a spektrum kiszámításáig nagyon bonyolult elméleti feladat. Kénytelenek vagyunk közelítő feltevésekkel és a QCD helyett leegyszerűsített modellekkel is dolgozni. A hátrányból előnyt kovácsolva azt mondhatjuk, hogy a különböző úton kidolgozott eredmények összevetéséből tanulhatunk valami újat a kvarkanyagról.

A kvarkanyagról már a kutatások elején (a hetvenes évek közepén) kialakult az az elképzelés, hogy ez egy plazma: viszonylag szabadon mozgó töltések összességében semleges felhője, amely sűrű és forró, majd extrém gyorsan kitágul és lehűl. Viszonylag újkeletű az a felismerés, vagy még inkább ennek fokozatos tudomásulvétele, hogy a kvarkanyag egy erősen kölcsönható, erősen csatolt plazma. Ez – többek közt – azt jelenti, hogy a kollektív gerjesztések (a plazmonok), általános kifejezéssel kvázirészecskék, szerepe dominál a plazmát alkotó elemi részecskék felett: mintha a plazma egészen másból állna, mint ami valójában alkotja.

A leegyszerűsítő elméleti modellek közül a legsikeresebb a kvázirészecske modell. Ez a modell a QCD alapegyenleteiből kiinduló hosszadalmas és terjedelmes számítógépes rácsmodellszámítások eredményeit, amelyek az erősen csatolt plazmát írják le, egymással nem vagy csak alig kölcsönható ismeretlen részecskék, kvázirészecskék ideális gázaként kezeli. Az érdekes az, hogy a nyomás–hőmérséklet görbe, ami ebben az esetben a termodinamikai leírás alapja, illeszthető ezzel a feltevéssel. Persze nincs „szabad a vásár”, cserébe a részecske tulajdonságai lesznek bonyolultak. Olyannyira, hogy még részecskeszerűségük, például a megszokott fix nyugalmi tömeg, is feloldódik egy általánosabb energia–impulzus összefüggés (szaknyelven diszperziós reláció) keretei között.

A kvarkanyag állapotegyenlete

A termodinamikai állapotegyenletet nagy térfogatú, homogén anyagokra, így az elképzelt kvarkanyagra is, a nyomás és az abszolút hőmérséklet összefüggése adja meg. Ebből más fontos termikus jellemzők, mint az átlagos energiasűrűség vagy az entrópia levezethetők. A nyomás tanulmányozása a kulcsa a lehetséges fázisátalakulások felderítésének is.

A kvázirészecske modellben a kvarkanyag nyomása az adott tömegű relativisztikus részecskék gázának nyomásából származtatható. Bizonyos változatokban maga ez a tömeg is a hőmérséklet függvénye, sőt a részecskék energiájának értéke adott mozgásmennyiség mellett nem feltétlenül követi az

$$E = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2} \tag{1}$$

képletet[1], hanem egy szigorúan éles érték helyett eloszlása van. Kollégáimmal, *Zimányi József*fel, *Lévai Péter*rel és *Ván Péter*rel azt az elképzelést vizsgáltuk, amikor az m tömeg folytonos eloszlású. A kvarkanyag nyomását ekkor egy integrál (folytonos összeg),

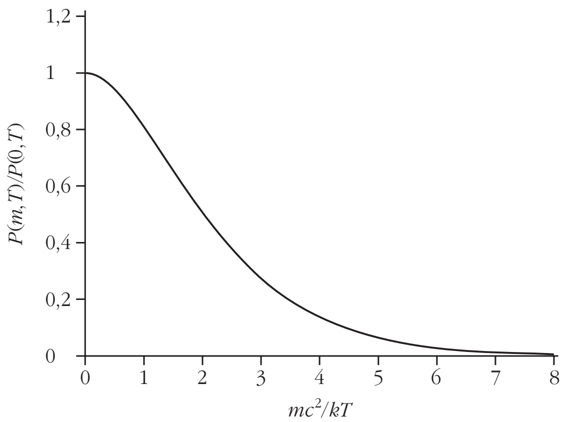
$$P(T) = \int w(m)\, P(m, T)\, dm \tag{2}$$

adja meg, ahol $w(m)$ a tömegeloszlás, $P(m, T)$ az adott m tömegű relativisztikus részecskékből álló ideális gáz nyomása.

Ez utóbbi a részecskék kinetikus energiájával függ össze, relativisztikus esetben a következő, az összes lehetséges impulzusra vett integrál adja meg:

A Jávorkúti Magyar Magfizikus találkozón 2006. május 5-én elhangzott előadás nyomán.

[1] Ebben a cikkben a $c = 1$, $k = 1$ és $\hbar = 1$ részecskefizikai egységrendszert használjuk, ezért például $m/T = mc^2/kT$.



1. ábra. A tömeges részecskegáz nyomása osztva a tömegtelenével az mc^2/kT arány függvényében. Ez egyben a tömegeloszlás és az össznyomás közötti integráltranszformáció magfüggvénye is.

$$P(m,T) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{3E} e^{-E/T}, \tag{3}$$

ahol E az (1) képlet szerint függ a $\boldsymbol{p}$ impulzustól és az m tömegtől. Mivel a kvarkanyagban izotrópiát tételezünk fel, csak az impulzus nagysága, p marad integrációs változó:

$$P(m,T) = \frac{1}{6\pi^2} \int_0^\infty p^2 \frac{p^2}{E} e^{-E/T} dp. \tag{4}$$

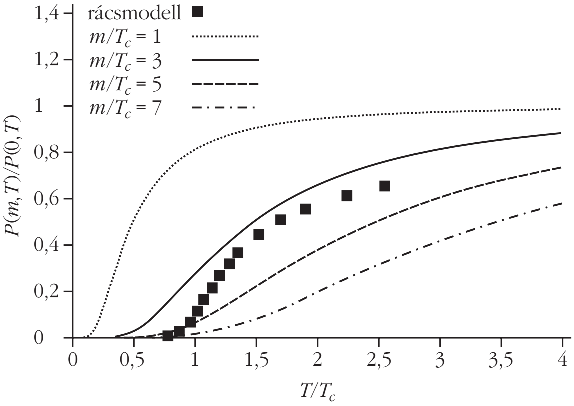
Ez az integrál a lehetséges energiákra vett integrállá alakítható az (1) képlet négyzetének a differenciálásával: $E\,dE = p\,dp$. Az eredmény,

$$P(m,T) = \frac{1}{6\pi^2} \int_m^\infty \left(E^2 - m^2\right)^{3/2} e^{-E/T} dE. \tag{5}$$

Ez a képlet a zérus nyugalmi tömegű részecskék gázának – mint amilyen például a tiszta sugárzást leíró fotongáz – nyomását adja az $m = 0$ speciális esetben:

$$P(0,T) = \frac{1}{6\pi^2} \int_0^\infty E^3 e^{-E/T} dE = \frac{1}{\pi^2} T^4. \tag{6}$$

2. ábra. A tömeges részecskegáz nyomása osztva a tömegtelenével különböző m/T_c (mc^2/kT_c) arányokra. A QCD-t megoldó rácsmodellszámolás eredményét fekete négyzetek jelzik. A jellemző energiaegység kT_c = 165 MeV.



A tömeges relativisztikus ideális gáz ezen standard nyomással leosztott értéke már csak az m/T függvénye, ez az $x = E/T$ és $s = m/T$ változók bevezetésével jól látható:

$$\frac{P(m,T)}{P(0,T)} = \Phi(s) = \frac{1}{6} \int_s^\infty \left(x^2 - s^2\right)^{3/2} e^{-x} dx. \tag{7}$$

Ez az eredmény kifejezhető egy ismert függvény, a képzetes argumentumú Bessel-függvény (McDonald-függvény) segítségével:

$$\Phi(s) = \frac{1}{2} s^2 K_2(s).$$

A függvény lefutását az *1. ábra* mutatja.

A *2. ábrá*n a különböző tömegű relativisztikus gázok nyomását hasonlítjuk össze a QCD rácsmodelljében *Aoki Yasumichi, Fodor Zoltán, Katz Sándor* és *Szabó Kálmán* által kiszámított nyomással[2]. Látható hogy egyrészt a QCD nyomásgörbe messze esik a tiszta sugárzás nyomását jellemző egyenestől, másrészt nem követi semmilyen adott állandó tömegű részecskékből álló gázét sem. A jellemző energiaskála a QCD-ben a nyomás hirtelen csökkenését okozó hőmérsékletnek, T_c-nek megfelelő energia: $kT_c \approx 165$ MeV[3]. A jellemző tömegek valahol $m = 3kT_c/c^2$ és $m = 7kT_c/c^2$ között lehetnek: sem a túl könnyű, sem a túl nehéz kvázirészecskék nem járulnak hozzá jelentősen a nyomáshoz. Miután a kvarkanyagot alkotó elemi kvarkok tömege csak néhány MeV, a gluonoké pedig szigorúan nulla, elmondhatjuk, hogy eszerint a kvarkanyag szintén kvázirészecskékből épül fel.

Tömegeloszlás a kvarkanyagban

A tömegeloszlásról feltételezzük, hogy szintén csak a T_c értékéhez viszonyított eloszlás, vagyis

$$w(m) = \frac{1}{T_c} f(m/T_c). \tag{8}$$

A különleges ebben a modellben az, hogy az $f(t)$ függvényt a hőmérséklettől független alakban keressük. A kvarkanyag teljes nyomása a (2) képlet alapján a következőnek adódik:

$$P(T) = \sigma(T_c/T)\,\kappa T^4, \tag{9}$$

ahol

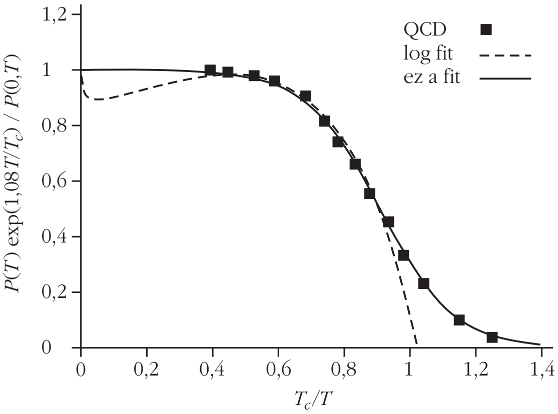
$$\sigma(z) = \int_0^\infty f(t)\,\Phi(zt)\,dt. \tag{10}$$

A feladatunk tehát a számítógépes QCD számolásból nyert nyomásgörbéről leolvasott $\sigma(z)$ függvényhez megtalálni a tömegeloszlásra jellemző $f(t)$ függvényt.

---

[2] Y. Aoki, Z. Fodor, S. Katz, K. Szabó – Journal of High Energy Physics *0601* (2006) 089

[3] 1 MeV az az energia amit egyetlen elektronnal egymillió volt feszültségkülönbség közöl.



3. ábra. Az elosztott tömegű kvarkanyag nyomása osztva a tömegtelenével és beszorozva az egyszerű exponenciálissal a T_c/T arány függvényében. A fekete négyzetek a QCD-rácsszámolások eredményei, a folytonos vonal a (11) képletet mutatja, míg a pontozott vonal a perturbatív QCD-re hivatkozó logaritmikus formula vonala.

A $\sigma(z)$ függvény pontos alakja nem ismert. A számítógépes szimuláció ennek bizonyos pontjait meghatározza, de analitikus alakja, ami a (10) egyenlet matematikai megoldásához szükséges, ismeretlen. A fekete négyzettel jelzett szimulációs pontokat több, egymástól egészen különböző görbe is illeszti. A *3. ábrá*n két ilyen illesztést mutatunk, most az inverz abszolút hőmérséklet, T_c/T függvényében. A nyomást még be is szoroztuk egy egyszerű exponenciális függvénnyel, $e^{1{,}08\,T_c/T}$-vel. Az 1,08 érték próbálkozással bizonyult a legmegfelelőbbnek; ugyanis ezen érték mellett a nagy hőmérsékletű adatok állandónak látszanak. Ebből gondoljuk, hogy az exponenciális képlet, $\sigma(z) \sim e^{-1.08\,z}$ ezen a tartományon jó közelítés lehet.

Ezt azonban nem támasztja alá jelenleg mélyebb elmélet. A legelterjedtebb felfogás szerint a nyomás eltérése a tiszta sugárzásétól magas hőmérsékleten a logaritmus függvény inverzével fejezhető ki, ezt a pontozott görbe mutatja az ábrán. Nincs azonban olyan, a szigorú kritikát is kiálló bizonyítás a logaritmusos képlet mögött sem, amely miatt ezt előnyben kellene részesíteni. Azonkívül alacsony hőmérsékleten biztosan rossz, mert negatív nyomást ad.

Ilyen okok miatt mi megvizsgáltuk a rács QCD adatpontokat legjobban illesztő görbét leíró következő képletet:

$$\sigma(z) = \frac{1 + e^{-a/b}}{1 + e^{(z-a)/b}}\, e^{-1{,}08\,z}, \tag{11}$$

ahol $z = T_c/T$ az inverz hőmérséklet, $a \approx 0{,}91$ és $b \approx 0{,}11$ illesztési paraméterek. Ez a képlet mind az alacsony, mind a magas hőmérsékletek tartományában egy egyszerű exponenciálissal közelíthető. A különleges ebben az, hogy az egyszerű exponenciális $\sigma(z) = e^{-\lambda z}$ képlethez a (10) integrál-transzformációs egyenlet expliciten megoldható. A megoldás

$$f(t) = \frac{4\lambda}{t^2\pi}\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{t^2}}\,. \tag{12}$$

Ez a képlet uralja a (10) egyenlet numerikus megoldását is (*4. ábra*). A $t < \lambda$ értékekre $f(t) = 0$, vagyis a legkisebb megengedett tömegenergia $M_{\min}c^2 = \lambda k T_c \approx 180$ MeV.

A tömegugrás jelentősége

Ez az eredmény nem kötődik a QCD eredményeket illesztő $\sigma(z)$ függvény pontos alakjához, csak annak bizonyos kvalitatív tulajdonságaihoz. A $\sigma(0) = 1$ tulajdonság triviális: végtelen hőmérsékleten a tömeges részecskék ugyanúgy viselkednek, mint a zérus nyugalmi tömegűek, ezért a nyomásuk aránya egy. A nyugalmi tömeg másrészt a tehetetlenség mértéke, ezért minél nagyobb, annál kevésbé mozgékony a hozzá tartozó szabadsági fok, annál kisebb nyomást jelent adott hőmérsékleten. Ezért $\sigma(z)$ egyről nullára csökken, miközben a hőmérséklet csökken, azaz $z = T_c/T$ nő. Az állandó tömegű részecskék gázánál hirtelenebb csökkenés T_c körül az effektív szabadsági fokok elnehezülését jelzi: a kvarkanyag esetében ez a hadronok formálódását jelenti.

A kérdés az, hogy ez a csökkenés matematikailag mennyire gyors. Az exponenciális feltevésünk azt jelenti, hogy az inverz hőmérséklet hatványainak integráljai végesek. Ezek az értékek azonban arányosak a tömegeloszlás inverz tömeg szerinti integráljaival:

$$\int_0^\infty z^{n-1}\sigma(z)\,dz = 2^n\,\Gamma\!\left(2 + \frac{n}{2}\right)\Gamma\!\left(\frac{n}{2}\right)\int_0^\infty t^{-n} f(t)\,dt. \tag{13}$$

Itt a $\Gamma(x)$ Euler-féle Gamma-függvényt a

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1}\,e^{-u}\,du \tag{14}$$

határozott integrál definiálja. Ebből az következik, hogy ha a nyomáscsökkenés erős, akkor a tömegeloszlás nem tartalmazhat kis tömegeket. Ha nagy z-re a $\sigma(z)$ függvény exponenciális lecsengésű, akkor az $f(t)$ függvény kis $t = mc^2/kT_c$-re legfeljebb az inverz exponenciálisa, $\exp(-1/t)$ alakú lehet, vagy nulla. Az, hogy a tömegeloszlás csak egy véges tömegnél kezdődik, a „tömegugrás” (angolul mass gap) jelensége. A fentiekből látjuk, hogy ez összefügg a kvarkbezárással, az eredetileg könnyű kvarkok és gluonok mozgásának akadályozásával. S bár a kvarkbezárás és a tömegugrás kapcsolatának matematikai levezetése a térelméletben még senkinek sem sikerült, mi bízunk abban, hogy a fenti vizsgálatok hozzájárulnak a fizikai mechanizmusok tisztázásához.

4. ábra. A kvarkanyag rács QCD-ben kiszámolt állapotegyenletét rekonstruáló tömegeloszlás mc^2/kT_c egységekben. Fontos jelenség a kis tömegek valószínűtlensége.