MIT TANÍTOTT BOLYAI FARKAS A GRAVITÁCIÓRÓL?

Gündischné Gajzágó Mária
Hatvan

Első anyánk és Páris almája által
a pokol darabontjává lett a Föld,
Newton almája az ég csillagai
társaságába emelte planétánkat.
Bolyai Farkas Jelentése alapján

2007 őszén a marosvásárhelyi Bolyai Farkas Elméleti Líceum fennállásának 450. évfordulóját ünnepli, ugyanis 1557 őszén nyitotta meg kapuit az akkor még Székelyvásárhelynek nevezett Marosvásárhelyen a Schola Particula, amely azután 1718-ban egyesült az ide menekült sárospataki kollégiummal. Az egyesüléssel a Schola kollégiumi rangra emelkedett. 1804-ben a filozófiáról éppen leválasztott matematika–fizika–kémia tanszékre *Bolyai Farkas*t hívták meg, aki 47 évig tanított a kollégiumban.

A kéziratok

Bolyai Farkas hosszú tanári pályája során a kollégium nyomdájában jelentette meg matematikai műveit. Fizika tankönyvet nem adott ki, leszámítva *Az aritmetikának, geometriának és physikának eleje* címűt 1834-ben, amely mű azonban csak kevés fizikai ismeretet tartalmaz. Kéziratos hagyatékában viszont sok száz oldalnyi latin és magyar nyelvű fizikával, kémiával és csillagászattal foglalkozó jegyzetet is találunk. Az 1819-es keltezésű, 500 oldalas latin nyelvű jegyzet[1] Bolyai Farkas kézírása. A többit tanítványok másolták, illetve tanáruk diktálása után írták.

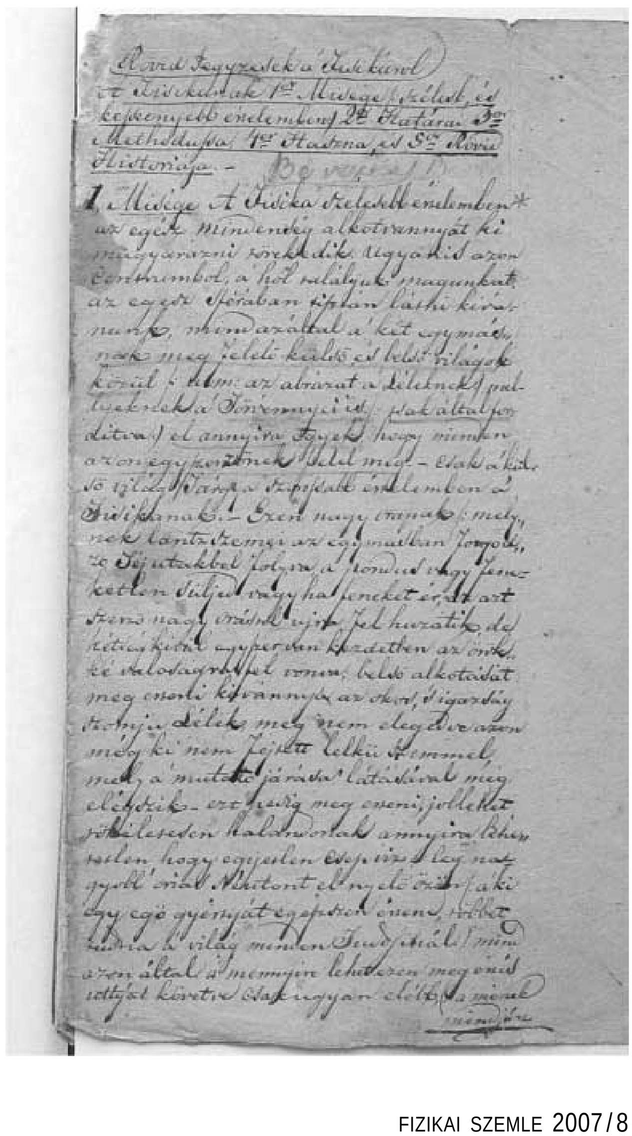
A jegyzeteket *kézzel írt tankönyvek*nek tekinthetjük. Többségük a jelenségek, törvények és alkalmazásaik tömör megfogalmazását, kisebb részük pedig a vizsgakérdéseket, illetve vizsgakérdéseket és a válaszokat tartalmazzák. Majdnem minden fejezet kettő vagy több változatban lelhető fel a hagyatékban. Ezen változatok egymástól kisebb-nagyobb mértékű eltérést mutatnak. Észrevehető, hogy Bolyai Farkas az évek során a tananyagot kissé módosította, egy-egy témát részletesebben tárgyalt, és egyre jobb magyar szakszavakat használt.

E jegyzetek tanulmányozása különösen fontos, mert Bolyai Farkas tanári pályája idején, az 1840-es években, teljesedett ki a latinról magyar nyelvű oktatásra történő áttérés a Kollégiumban. Másrészt Bolyai Farkas, az alkotó matematikus, a sokféle gyakorlati tevékenységet (kályharakás, borászat, gyógyászat stb.) eredményesen folytató, széles érdeklődési körrel bíró polihisztor, fizikatanárként is jóval az átlagon felüli volt [1, 2].

Nézzük meg, mit tanultak a gravitációról 150–170 éve a marosvásárhelyi Református Kollégium jurista (felsőbb) osztályainak diákjai.

A következőkben a magyar nyelvű jegyzetek gravitációhoz kapcsolódó szövegrészeire szorítkozunk. A kéziratokból idézett szövegrészek jelzeteit lábjegyzetben közöljük. A Bolyaiak hagyatékát a marosvásárhelyi Teleki–Bolyai Könyvtárban őrzik, de megtalálható a Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárának Mikrofilmtárában is. Az idézeteket íráshűen közöljük,[2] így

1. ábra. Rövid Jegyzések a’ Fisikárol első oldala (B 545/1)



[1] B. F. 427 a legterjedelmesebb, könyv alakú latin jegyzet (fizika, kémia, csillagászat) Bolyai Farkas kézírásában

[2] Ezúton szeretnék köszönetet mondani *Bíró Tibor* fizikatanárnak, aki a kéziratok kibetűzését és értelmezését ellenőrizte, és *Gündisch György* orvosnak, aki a nagy mennyiségű forrásanyagot kiváló minőségben fényképezte le.

azok tükrözik a kialakulóban levő magyar fizikai szaknyelv állapotát Marosvásárhelyen.

„…Bákóban,[3] Kopernikben, Keplerben hajnallott, Newtonban feljött a fizika…" olvashatjuk a Bolyai Farkas által 1843-ban lediktált, *Ditső Lajos*[4] által leírt, *Rövid Jegyzések a' Fisikáról*[5] című, kéziratban maradt füzetben (*1. ábra*).

Newton (1642–1727) gravitációs elmélete Bolyai Farkas tanári tevékenysége idején (1804–1851) már matematikailag is jól kidolgozott tudományág [3]. Nem csoda hát, hogy Bolyai Farkas, aki Göttingában a híres *Lichtenberg* professzor fizika és csillagászati előadásait hallgatta [4, 5], és akinek magánkönyvtárához féltucatnyi töb kötetes, német nyelvű, 1800 után kiadott fizikai, illetve csillagászati egyetemi tankönyv is tartozott [6], igen magas színvonalon és érdekesen tanította a gravitációval kapcsolatos ismereteket.

Hét alcímhez csatoltuk a kiválasztott szövegrészeket, melyekből körvonalazódhat az olvasó számára, mit és hogyan tanított Bolyai Farkas a gravitáció tárgyköréből.

„A köznehézség" törvénye

„Ez a gravitas oly erö, mely a' vonszo test tömegétöl egyenesen a' vonatott test távjának pedig másodrangjától /:potentia :/ visszásan függ.

Ezen törvény feltalálója Newton, … és sem a' vonatott test nagyságától,[6] sem nemétöl nem függ: u : m : pihe és egy mázsa arany lég üress hengerbe egyszerre esnek le. A' suly az nehéz testek mennyisége, két akkora leesött[7] két akkora erövel kelletvén meg tartani."[8]

„Az egymástol távol lévö Testekre vonszo erö neveztetik *Gravitas Universalisnak* melynek törvénnye az hogy egy Test annyiszor inkább vonatik, a' mennyiszer nagyobb a' vonszo erö massája és a distantiae quadratuma kisebb. Ez az erö tartya a nap systhemájában a' planetákat a' nap körül irt uttyokban, 's a' planéták darabontjait az ö planétáik körül; …

Jegyzés A hold ha egy más erö nem taszitotta volna meg kezdetben, ugy esett volna le a' földre mint a kö; az arany és pelyhe egyformán vonatnak és esnek le az aërtöl üress térbe".[9]

„… A Newton utánni idökben tett tapasztalások arra mutatnak, hogy a' nap systhemáján feljüli véghetetlen ürben is ezen nehézség köztörvénnye uralkodik".[10]

A régies szóhasználat nem okoz nehézséget az egyetemes tömegvonzás törvénye és az ahhoz kapcsolódó jelenségek felismerésében. Egyértelmű, hogy: köznehézség = egyetemes tömegvonzás, vonzó és vonatott test = kölcsönható testek, a táv másodrangjától visszásan függ = a távolság négyzetével fordítottan arányos stb.

Kepler törvényei

„Hogy a' nap Systemában a' nehézségnek ez a törvénye tartja az égi testeket a' nap nagy massajához, bizonyítja Keplernek első törvénnye, hogy a' Planéták ellipszisben járnak, melyet legelébb ö vett észre, ha egy lapon mintegy millio mértföldre[11] két szeget gondolunk, melyekhez 42 millio mért földnyi hosszu spárgának végei legyenek kötve, s' plajbással belölröl kifelé húzva kereken vitetni gondoltatik a' vissza térésig a föld utja íródik le. A Nap pedig az egyik szögnél van, télben közelebb mint nyárban – midön kissebbnek is látszik."[12]

Ha deszkalapra helyezett papírlapra két gombostűt szúrunk egységnyi (például 0,5 cm) távolságra és ezekhez 42 egységnyi hosszúságú (= 21 cm) cérnát kötünk, ceruzával kifeszítve a cérnát, megrajzolhatjuk a Föld-pályát jelképező ellipszist.

Könnyen kiszámíthatjuk a Föld pályája nagy- és kistengelyének értékét. A fél nagytengely 42/2 = 21 millió mérföld; a fél kistengely pedig a

$$2\sqrt{b^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 42$$

összefüggésből határozható meg. Ahonnan

$$b = \frac{\sqrt{4{,}21^2-1}}{2} \approx 20{,}99$$

millió mérföldnek adódik. A nagy- és kistengely értéke majdnem egyenlő, tehát a földpálya gyakorlatilag kör, melynek sugara ≈ $21\cdot10^6\cdot7{,}42$ km = 155,82 millió km, a jól ismert Nap–Föld távolság.

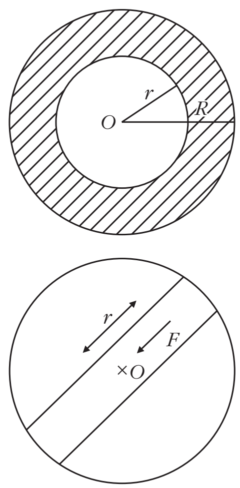
„…a' radius vector által seprett areak egyenlöknek találtatván Kepler egyik törvénye által…"

„A tapasztalás bizonyítván Keplernek azon (III.) törvényét, hogy $T^2:t^2 = R^3:r^3$. A' miért meg volt mutatva $V:v = 1/R^2:1/r^2$. S' ez szint így van a föbb planétáknak hozzájok tarto darabontjaival."[13]

Az első idézet Kepler II. törvénye: a vezérsugár egyenlő időközönként egyenlő területeket súrol.

Az első egyenlőség Kepler III. törvényét fejezi ki a bolygók periódusai és az ellipszis pályák fél nagytengelyei között, a szokásos jelölésekkel.

[3] Fr. Bacon (1561–1626)
[4] Ditső Lajos az a Bolyai tanítvány aki később, amint azt tanára a Jelentésben meghagyta, pónyik almafát ültetett sírjához.
[5] B 545/4 *Rövid Jegyzések a' Fisikárol,* Ditső Lajos kézírása 1843-ból, 80 oldalt tartalmaz.
[6] = méreteitől
[7] = leeső testet
[8] B 598/13[v] A jegyzet első sora „Egy órát elbontva 's vissza rakva érthetni meg". A 8 ív=72 oldal hosszú jegyzet különböző oldalain Simon Elek, Bálint, Benkő, Vályi, Gombás, Bitay, Burján aláírások olvashatóak, mely nevek a kollégiumi értesítők „1847–48 évi első közmegvizsgáltatás rendjé"-ben is szerepelnek.
[9] B 545/27[v]
[10] B 599/7[v] A 24 oldalas jegyzet első sorai: A Phisika tárgya a' test lévén, azaz az a' mi az űrnek bizonyos részét elfoglalni láttatik
[11] 1 földrajzi mérföld = 7,42 km
[12] B 598/16[v] Bálint kézírása
[13] B 598/15[v] Bálint kézírása



2. ábra. Alagút a Föld belsejében

A $V : v = 1/R^2 : 1/r^2$ összefüggéshez hozzá kell fűzni, hogy itt a V és v a „vis centripeta” rövidítéseként a centripetális gyorsulások felét jelentik. Így már levezethető ez az egyenlőség, ellipszis helyett körpályára gondolva. Valóban, a gyorsulások aránya a következőképpen írható:

$$V : v = \frac{\dfrac{(2\pi R)^2}{T^2}\dfrac{1}{R}}{\dfrac{(2\pi r)^2}{t^2}\dfrac{1}{r}} = \frac{\dfrac{R}{T^2}}{\dfrac{r}{t^2}} = \frac{R}{r}\frac{t^2}{T^2},$$

és figyelembe véve a III. törvényt,

$$V : v = \frac{R}{r}\frac{r^3}{R^3} = \frac{1}{R^2} : \frac{1}{r^2}.$$

„A nehézség ereje”

„A Föld színén akkora a’ Föld vonzo ereje, hogy a test szabadon 1”pertz alatt 15,5 lábat ír le. A Föld közepétöl két akkora távrol csak 1/4-ed, három akkora távrol csak 1/9-ed sat., annyit esne; innen a hold is, ha más erö nem tartaná … a Földre esnék, a távnak említett törvénye szerént. – Így ha csak ez az erö volna, mind öszve gyülnének az égi testek, mint egy temetöbe.”

„Hogy mekkora a’ Nap színén, mekkora Jupiterén, Saturnusén, sat., a nehézség ereje az az egy másod pertz alatt hány lábat írna le a kö; a’ mint Newton fel számította. Péld: A nap színén két olyan sebességgel esnék a kö, mint egy puska golyobis.”[14]

Mivel 1 láb = 0,3126 m, az első másodpercben $15{,}5 \cdot 0{,}3126 = 4{,}845 \approx 4{,}9$ m-t esik a szabadon hagyott test. Ez valóban így van, hiszen

$$\frac{9{,}8\,t^2}{2} = \frac{9{,}8 \cdot 1}{2} = 4{,}9 \text{ m}.$$

Ez az érték Bolyainál a „nehézség ereje”. Ma viszont a gravitációs gyorsulás a szabadon eső test által az esés első másodpercében megtett út számértékének kétszeresét jelenti.

A gravitációs gyorsulás és „a nehézség ereje” is négyzetesen csökken a Föld középpontjától mért távolság növekedésével. A Nap felszínén a gravitációs gyorsulás értéke 274 m/s^2, „a nehézség ereje” pedig 137 m, ami azt jelenti, hogy a Nap felszíne közelében leeső test sebessége 1 másodperc után 274 m/s. Bolyai Farkas szerint $v_{\text{puskagolyó}} = 137$ m/s.

Alagút a Föld belsejében

„Bé felé menve a Föld közepe felé, ezen erö, mely köz nehézségnek neveztetik apad, mivel a kívül lévö boríték is visszá von, és a Föld színén belöl a közép pont távjától egyenesen függ.”[15]

Vagy, mai szóhasználattal: A gravitációs térerősség a Föld belsejében a középpontig mért távolsággal egyenesen arányos. Igazoljuk ezt a kijelentést!

Valóban, a Föld belsejében, a középponttól r távolságban, a gravitációs térerősség a $g = \gamma M / r^2$ képlettel számítható ki (*2. ábra*), ahol M nem az egész Föld tömegét, hanem csak az r sugarú gömb tömegét jelenti (hiszen az ezen kívüli, bevonalkázott „boríték” itt nem számít). Így, ρ-val jelölve a Föld sűrűségét,

$$M = \rho\,\frac{4\pi r^3}{3} \quad \text{és így} \quad g = \frac{4\pi\gamma\rho\, r}{3}, \quad \text{tehát} \quad g \sim r.$$

Ezek után érdemes feltenni a következő kérdést is: *Milyen mozgást végezne az a test amelyet egy a Föld középpontján átvezető légmentes alagútba ejtenénk?* Az előbbiek alapján erre a testre rugalmas típusú erő hatna, így harmonikus rezgőmozgást végezne az alagút két vége között.

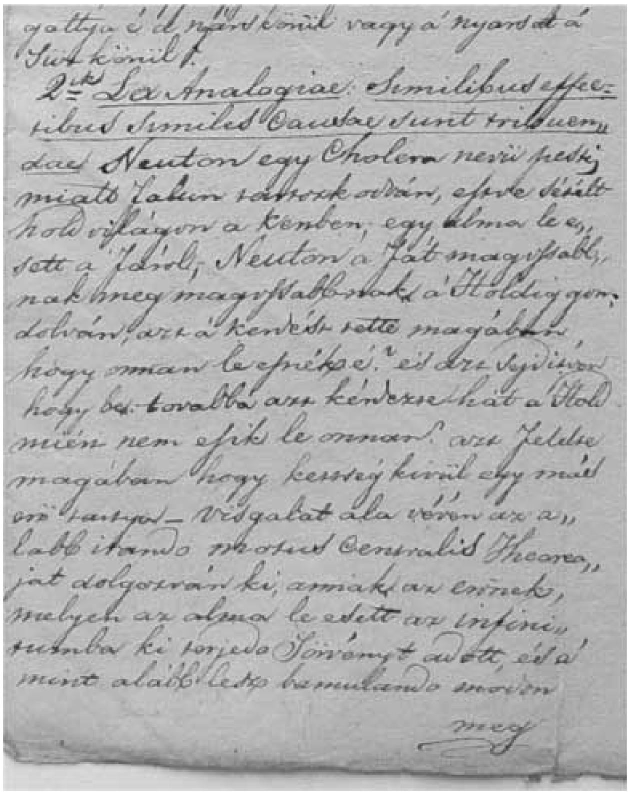
„Ha pedig a Földnek mint egy dionak belét kivéve gondoljuk, ott akármely test egyámtalán meg állana, a’ vonattatás minden felé egyenlöleg le rontva egymást, ugy, hogy ezen Kliniusi alvilágban, a’ harangnak nem kellene láb.”[16] – A fenti gondolatmenetből egyenesen következik, hogy a belül üres Földben egy testre sem hat nehézségi erő, így még a nagy tömegű harang alátámasztására sem lenne szükség.

Newton almája

„…Newton egy cholera nevü pestis miatt falun tartozkodván, estve sétált hold világon a kertben; egy alma le esett a’ fárol; Newton a fát magossabbnak meg magossabbnak a’ Holdig gondolván, azt a’ kérdést tette magában, hogy onnan leesnék-é? És azt sejditvén hogy le, továbbá azt kérdezte hát a’ Hold miért nem esik le onnan? Azt felelte magában hogy kettség kívül

---

[14] B 590/6–6ᵛ A 20 oldalas jegyzet kezdősora: „A lélek egész környezetének”
[15] B 590/6
[16] B 590/6



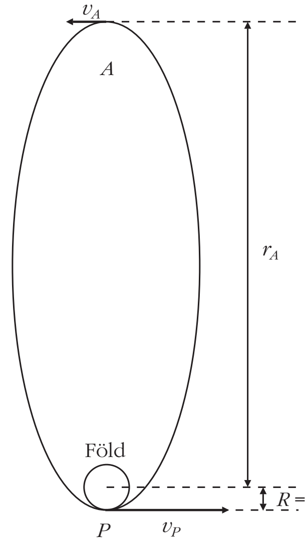
2-dik La Analogiae: Similibus effec-
tibus Similes Causae sunt tribuen-
dae. Newton egy Cholera nevü pestis
miatt falun sartozkodván, estve sétált
holdvilágon a kertben, egy alma le e-
sett a fáról, Newton a fát magosabb-
nak meg magosabbnak a Holdig gon-
dolván, azt a kérdést tette magában,
hogy onnan leesnék é? és azt sejdítvén
hogy be- tovább azt kérdezte hát a Hold
miért nem esik le onnan? azt felelte
magában hogy körül egy más
erö tartya – visgálat alá vévén az a-
lább irando motust Centralis Theorea-
jat dolgozván ki, annak az erönek,
melyen az alma le esett az infini-
tumba ki terjedö Törvényt adott, és a'
mint alább lesz bámulando modon
meg

3. ábra. Bolyai Newton szabadesésével foglalkozó kézirata (a *Rövid Jegyzések a' Fisikárol* második lapján)

egy más erö tartya – visgálat alá vévén az alább irando motus Centralis Theoreajat[17] dolgozván ki, annak az erönek, melyen az alma le esett az infinitumba kiterjedö Törvényt adott és a' mint alább lesz bámulando modon megálitodott az az erö melyen[18] minden bujdosok[19] a' magok napjok körül forognak az ö Darabontjaiknak[20] körülettek valo forgásokkal. – Láttzik ugyan, hogy ez nem Mathematicus concludetur modus;[21] ugyanis egyenlö Jelenetek egészszen külömbözö okokbol lehetnek p:o: két ház ég, egyiket a' menykö (ütötte meg:) a' másikot a' Tolvaj gyujtotta meg. De itt haladni nem lehet egészszen mathematikai modon 's tsak ugyan hozzá kell adni ehez, és mind a' négy régulához hogy a Természetet mintegy Oraculumot meg kell minél többször experimentumok által kérdezni; Jollehet sokszor igen kéttségesen felelis, és akár melyiket az irt és még következö regulák közül csak addig kell megtartani, míg ez az Oráculum[22] helybe hagyja"[23] (*3. ábra*).

Ugyanez a kérdés másutt tömörebben olvasható: „Sétálva estve a kertben, egy alma leeséséböl kérdésbe tette, hogy ha a' holdig érne a fa, [az alma] leesnék é? S hát a hold miért nem esik le?" [24]

[17] = középponti mozgás elméletét
[18] = megtalálták azt az erőt, aminek következtében
[19] = bolygók
[20] = holdjaik
[21] = matematikai következtetési módszer
[22] = szaktekintély
[23] B 545/2–3
[24] B 598/16v Bálint kézírása



4. ábra. Az alma pályája

A Holdig érő fáról leeső alma földet érésének feltételei (itt a Hold jelenlététől eltekintünk, csupán egy olyan almafára gondolunk, melynek magassága a Föld–Hold távolsággal egyenlő):

- mozogjon ellipszis pályán,
- az egyik fókuszban a Föld középpontja legyen,
- a leszakadás pillanatában az *A* apogeumban legyen,
- a *P* perigeumban érjen Földet.

Az ellipszis pályán mozgó almára érvényes a területi sebesség és energiamegmaradás törvénye:

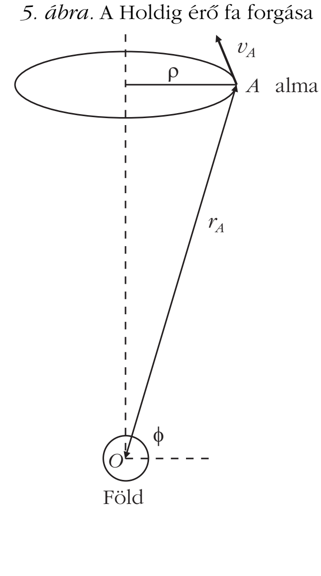
$$v_P\, r_P = v_A\, r_a,$$

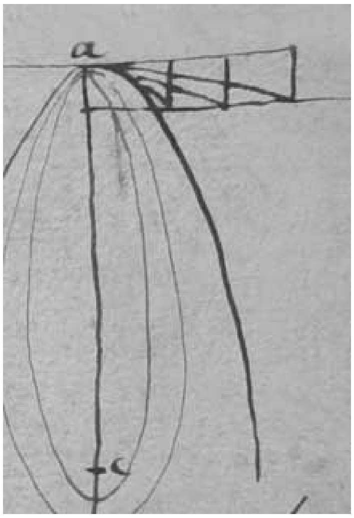
$$\frac{m\,v_P^2}{2} - \gamma\,\frac{M\,m}{r_p} = \frac{m\,v_A^2}{2} - \gamma\,\frac{M\,m}{r_A}.$$

A *4. ábra* alapján írhatjuk, hogy: $r_P = R$, $r_A = 60\,R$, $g = \gamma M/R^2 = 9{,}8$ m/s^2. Kiküszöbölve a v_P-t és felhasználva a feltételeket, a leszakadó alma sebességére kapjuk: $v_A = 185{,}7$ m/s.

Ismerve ezt a sebességet meg tudjuk határozni, hogy a Föld mely szélességi körén kellene a Holdig érő fának kinőni (*5. ábra*).

5. ábra. A Holdig érő fa forgása





6. ábra. A Földről leszakadt gránitdarab lehetséges pályái

v_A a Holdig érő fa Földtengely körüli forgásából származik. Így $v_A = 2\pi\rho/T$. Az *5. ábrá*n látszik, hogy $\rho = r_A\cos\phi$. E két összefüggésből kapjuk:

$$\cos\phi = \frac{v_A\,T}{2\pi\,r_A} = \frac{184{,}7\cdot 24\cdot 3600}{2\pi\cdot 60\cdot 6370000} \quad \text{és} \quad \phi = 89{,}6°.$$

Tehát szinte a Sarkoknál kellene állnia az almafának!

Hasonló jelenségekről olvashatunk még a *Benkő* nevű Bolyai-tanítvány kézírásában is: „… Ha függélyi lapban egy abroncs ollyan sebességgel forog, a' mekkorát kapna a' fél radiushoz egyenlö magasságrol esve, az alol belöl felöl tett pohár viz felyül fordulva sem esnék le: mert ekkor a' $V = c^2/2r = g$, tehát $2rg = c^2 = 4\sigma g$; tehát $\sigma = c^2/4g = r/2$. Innen egy kereken forgo rostában a' nehéz buza szemek mennek legmesszébb, a' gaz közböl maradván."[25]

Valóban, az $r/2$ magasságból leeső test

$$\sqrt{2\,a\,\frac{r}{2}} = \sqrt{a\,r}$$

sebességre tesz szert ($a = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$). Ha ezzel a kerületi sebességgel forog az r sugarú abroncs, akkor a centripetális gyorsulás

$$a_c = \frac{\left(\sqrt{a\,r}\right)^2}{r} = \frac{a\,r}{r} = a = 9{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Ha a függőleges síkban forgó abroncshoz a forgáspontra néző poharat rögzítettek, abból legmagasabb helyzetében sem folyna ki a víz, mert a víz súlyát kiegyensúlyozná a forgás miatt fellépő centrifugális tehetetlenségi erő. Az idézett szövegben megadott levezetés is követhető, ha figyelembe vesszük, hogy c (celeritas) a sebességet, V (vis centripeta) a centripetális gyorsulás felét, g a gravitációs gyorsulás felét, σ pedig az esés közben megtett utat jelenti.

„A' föld foroghatna olly sebessen, hogy a' gránit hegyek ollyas darabjait elhányná; könnyü látni, hogy tangensbe esnék az elszakadás; az elszakadás után visszavonatva a' földre (,) kérdés micsoda utat irna az elszakadt darab? Meg lehet mutatni, hogy ha a' tang · sebesség akkora a' mekkorát az otti nehézséggel kapni a' közép pontoli táv' közepéig esve parabola iratik, ha kisebb ellipszis, ha nagyobb hyperbola; tehát az irt esetben a' forgás' sebessége, 's a' tengelytöli táv határoz,…"[26]

A leszakadt darab lehetséges pályáit szemléltető *6. ábrá*t egy latin jegyzetből mellékeljük.[27] Nézzük meg, mekkora sebességre gyorsul fel az a test, amely „a' közép pontoli táv közepéig esne", vagyis, amely az R földsugárnyi távolságból $R/2$ távolságra közelítené meg a tömegpontnak képzelt Földet. Nyilvánvaló, hogy ez esetben már nem tekinthető homogénnek a mező, centrális erőtérre kell felírni az energiamegmaradás törvényét:

$$0 = \gamma\,\frac{m\,M}{R} = \frac{m\,v^2}{2} - \gamma\,\frac{m\,M}{R/2},$$

ahonnan

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma\,M}{R}} = \sqrt{2\,g\,R} = \sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 6370000} =$$

$$= 11{,}18\cdot 10^3\ \mathrm{m/s} = 11{,}18\ \mathrm{km/s}.$$

Az itt kapott sebesség éppen a szökési sebesség. Valóban, a szökési sebesség értéke abból a feltételből határozható meg, hogy a megszökő test mozgási energiája egyenlő a Föld vonzásából származó potenciális energiával:

$$\frac{1}{2}\,m\,v_{sz}^2 = \gamma\,\frac{M\,m}{R}$$

és innen

$$v_{sz} = \sqrt{\frac{2\,\gamma\,M}{R}} = \sqrt{\frac{2\,g\,R^2}{R}} = \sqrt{2\,g\,R}\,.$$

Ha tehát legalább 11,18 km/s sebességgel forogna a Föld Egyenlítője, az onnan leszakadó gránitdarabok elrepülnének és parabola- vagy hiperbolapályán hagynák el a Földet.

Ehhez a sebességhez

$$T = \frac{2\,\pi\,R}{v} = \frac{2\,\pi\,6370}{11{,}18}\ \mathrm{s} = 0{,}993\ \text{óra} \approx 1\ \text{óra}$$

periódusidő lenne szükséges, tehát 24-szer gyorsabban kellene forognia a Földnek.

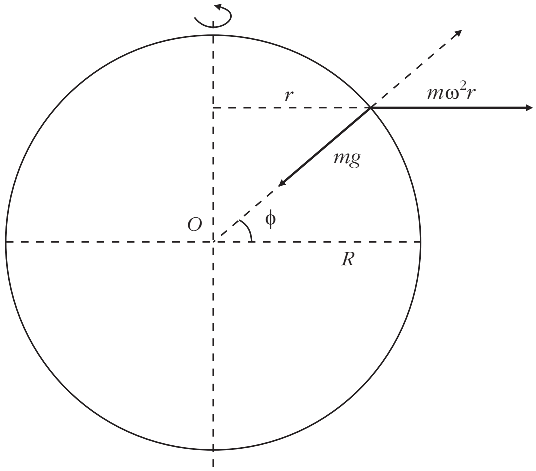
Ha a ϕ szélességi körön levő tárgy „megszökésére" gondolunk, a forgási sugár és a forgási periódus is $\cos\phi$-szeres érték lesz. A ϕ szélességi körről tehát akkor szökhetne meg egy „elszakadt darab", ha a Föld $T = \cos\phi$ óra alatt fordulna meg a tengelye körül, tehát ha $24/\cos\phi$-szer gyorsabban forogna.

---

[25] B 598/17–17v

[26] B 598/17–18v

[27] B. F. 390/6



7. ábra. A tengelye körül forgó Föld

Súlytalanság

„A Föld maga is, ha bizonyos sebességgel forogna, a flasztereket az égre hányná, s fel lehet vetni, hogy mekkorának kellene lenni [a sebességnek], hogy az aequatornál a testnek semmi nehézsége ne légyen, s akárholis a pólusokon kivül?” [28]

A feladat mai megfogalmazása: Mekkora szögsebességgel/periódusidővel kellene a Földnek forognia ahhoz, hogy a test súlya nulla legyen a) az Egyenlítőn, b) bárhol máshol?

b) Ha a test a ϕ szélességi körön van, a súlytalanság feltétele (*7. ábra*):

$$m g = m\omega^2 r\cos\phi,$$

ahol $r = R\cos\phi$, $g = 9{,}8$ m/s^2 és $R = 6\,370\,000$ m. Innen kapjuk a szögsebességet:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}\frac{1}{\cos\phi}} = \frac{0{,}00124}{\cos\phi}\ (1/\mathrm{s}),$$

és ennek ismeretében kiszámítható a periódusidő:

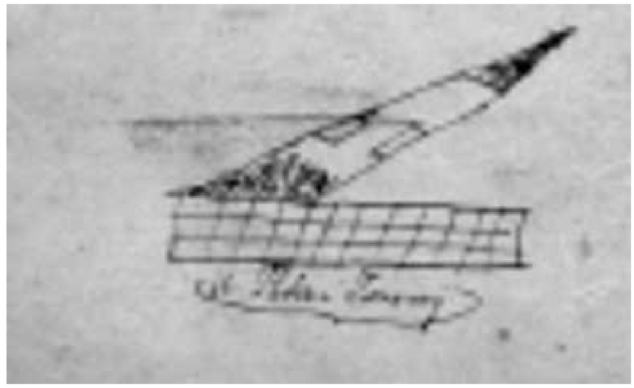
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 5064{,}73\cdot\cos\phi\ (\mathrm{s}).$$

a) Az Egyenlítőn $\cos\phi = 1$, így a szögsebesség:

$$\omega_E = \sqrt{\frac{g}{R}} = 0{,}00124\ (1/\mathrm{s})$$

és a periódusidő:

$$T_E = \frac{2\pi}{\omega_E} = 5064{,}73\ (\mathrm{s}).$$



8. ábra. A pisai torony. Ditső Lajos rajza

Összehasonlítva ez utóbbi értéket a Föld 24 órás periódusidejével, azt kapjuk, hogy a Földnek $24\cdot3600 : 5064{,}73 = 17$-szer kellene gyorsabban forognia ahhoz, hogy a testek súlytalanok legyenek az Egyenlítőn. Ahhoz, hogy a ϕ szélességi körön legyenek súlytalanok a testek, $17/\cos\phi$-szer kellene gyorsabban forognia a Földnek.

Súlypont

„Hogy sulypont van, s hova esik, ebbe vagy abba, a könnyebb eseteken kivül felsöbb mathesissel lehet látni még Archimédesben, s más felsöbb mechanikai munkákban, s az Aritmetica elejében is. A testek nyugtára nézve meg kivántatik, hogy a nyugponton tett függélyi[29] tartva legyen; s annál biztosabb az állása, minél alább van a sulypont, s terjedtebb az alja.”

„…minél fennebb esik a test suly pontja, annál könnyebben fordul fel, s legbiztosabb ha alol esik. Ide tartozo a pisai torony[30] is; melynek a fundamentumával keményen foglalva össze a suly pontja az alyan[31] belöl esik (*8. ábra*)[32]; a Kánt emlék pénzen ez a torony van ’perscrutatis fundamentis stabilitur veritas’ kör irattal. – A mozgásban a súly pont útját kell nézni: innen szögre útját kell nézni: innen szögre tett két hágo lapon a fenekeikkel össze tett két conus a tornyig fel hághat, ha a szög s conusahoz vannak mérve.”[33]

Bolyai Farkas fizikajegyzeteiben más változatban is megtalálható ezen érdekes paradox kísérlet: „A duplex conus apparens felmenése két szegeletre tett planum inclinatumon, amidön a centrum gravitatis lefele megyen.”[34]

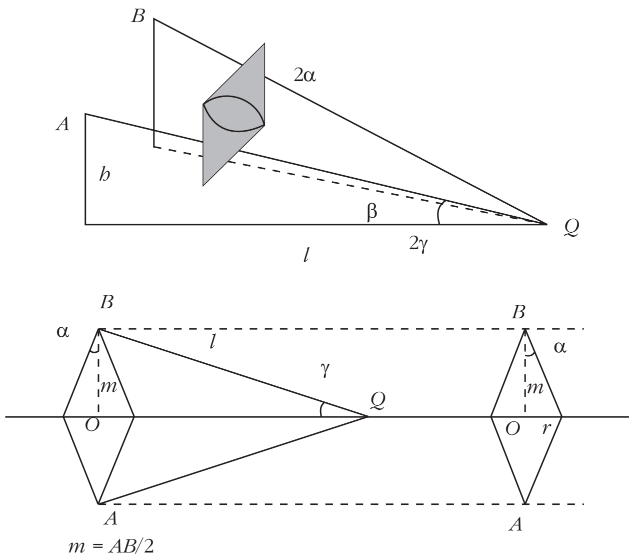
Sok fizikaszertárban ma is megtalálható a kettős kúp, két egymással változtatható szöget bezáró „hágólappal” (függőleges helyzetű derékszögű háromszög alakú, merev lap). Ha ez a szög nem túlságosan kicsi, a „hágólapokra” tett kettős kúp „felemelkedik” (*9. ábra*). Kimutatható, hogy a kettős kúp „felemelkedésének” feltétele:

$$tg\beta < tg\alpha\cdot\sin\gamma,$$

ahol 2α a kúp szögét, β lejtő szögét, 2γ az élek által bezárt szöget jelenti.

Bizonyítás: Legyen a kúpok alapkörének sugara *r*, egy kúp magassága *m*, a lejtőlapok magassága *h*, a lej-

[28] B 546/10v A FIZIKA
[29] = függőleges egyenes
[30] B 545/3v
[31] = alapján
[32] B 545/3vm
[33] B 598/22–22v
[34] B 546/8



9. ábra. A kettős kúp felgurul a szöget bezáró lejtőéleken

tők alapjának hossza *l,* és a lejtőlapok legalsó, közös pontja *Q,* legfelső pontjai pedig *A* és *B.* Helyezzük a kúppárt gondolatban a *Q* pontba, és tételezzük fel, hogy a kúppár az *AB* helyzet felé gurul. A kúppár súlypontja eközben *r* magasságból *h* magasságba kerül, közben gravitációs helyzeti energiája csökken. Ezért $r > h$. Az ábra alapján megfigyelhető, hogy: $r = m\,\mathrm{tg}\alpha$; $m = l\sin\gamma$; $h = l\,\mathrm{tg}\beta$. Ez utóbbi négy összefüggés alapján könnyen megkapható a már említett feltétel.

Következtetések

„A Bolyai hagyaték szénakazlából” – *Tóth Imre* [8] szóhasználatával élve – kiemelt szövegrészek révén az olvasót is magával ragadhatták Bolyai Farkas gravitációról szárnyaló gondolatai.

Benkő Samu saját fényű, szellemi értelemben vett csillagnak tekinti a két Bolyait [9]. Így érezhetett az olvasó is, amikor Bolyai Farkassal a Holdig érő fáról, a felpörgetett Földről megszökő gránitdarabról, a belül üresnek képzelt Föld súlytalanságáról stb. elmélkedett. Elmondhatjuk, hogy Bolyai Farkas 150–170 éves feladatai érdekesek és értékesek a mai olvasó számára is. Megoldásuk javasolható a fizika iránt elkötelezett, érettségihez közeledő diákoknak.

Új szakkifejezésekkel is találkoztunk az idézett szövegekben, például: adott mennyiség „egyenesen”, illetve „visszásan függ” egy másiktól (egyenes, illetve fordított arányosság), egy mennyiség „másodrangja” (négyzete) stb. A „nehézség ereje/köznehézség” kifejezéseket Bolyai Farkas a gravitációs gyorsulás/térerősség megfelelőjeként használja teljes következetességgel csupán azzal a különbséggel, hogy félakkora értékűnek tekinti. A „planéták / bujdosók darabontjai” a bolygók holdjait jelentik.

Tapasztalhattuk, milyen fontos Bolyai Farkas számára a szemléletesség és a gyakorlatiasság. Például a gravitációs térerősség nagy értékét a Nap felszínén a puskagolyó sebességével, a súlytalanság állapotát a Föld üres belsejében az alvilági nyugalommal (ahol az általunk súlyosnak ismert harang csak úgy megáll) érzékelteti. A Föld-pálya „szinte kör” alakját egy képzeletbeli – de kicsiben el is végezhető – ellipszisszerkesztéssel láttatja.

Jellemző Bolyai Farkas fizikajegyzeteire a tömörség. Például a kettős kúp látszólagos „felgurulása” azzal magyarázható, hogy a „centrum gravitatis lefele megyen”. Vagy „A föld közepe felé menve, a köznehézség apad” kijelentés arra a tömör megjegyzésre alapozható, hogy „a kivül levö boriték visszá von”.

Más esetekben Bolyai Farkas elkalandozik a tárgytól és kultúrtörténeti kitérőket tesz. Például, miután a pisai ferde tornyot példaként említi az alátámasztott testek egyensúlyára („A pisai torony … súlypontja az alyán belöl esik”), eljut a Kant-emlékérmen olvasható filozófiai kijelentéshez, hogy „perscrutatis fundamentis stabilitur veritas”.[35]

Befejezésképpen meg kell említenünk, hogy a két Bolyainak a gravitáció tárgykörében is voltak új, forradalmi gondolatai. Erről értesített *Gábos Zoltán* nemrég megjelent cikkében [3]: „Bolyai Farkas 1832-ben kiadott *Tentamen* című munkája első kötetében egy zseniális sejtést fogalmazott meg. Elsőként állította, hogy a bolygók mozgásában jelentkezhetnek olyan zavarok, amelyeket csak nemeuklideszi alapon lehet magyarázni. A sejtést a fejlődés 27 év múltán a tények körébe sorolta.” Ugyanitt olvashatjuk, hogy *Bolyai János* az

$$F = -\frac{K\,m\,M}{r^2}$$

newtoni gravitációs törvényt a következő nemeuklideszi alapra helyezett „erőképlettel” helyettesítette:

$$F = -\frac{K\,m\,M}{k^2\,\sinh^2(r/k)}.$$

E törvénnyel Bolyai János fél évszázaddal előzte meg korát.

[35] Az alapelvek vizsgálata által szilárdabb lesz a tudás.

Irodalom

1. Gajzágó M.: A fizika tanítása a marosvásárhelyi kollégiumban 1851-ig. *Korunk* 1983/11, 890–895.
2. Gündischné Gajzágó M.: „A világosság különböző színű szálai habjai hossza” Bolyai Farkas, a fizikatanár. *Fizikai Szemle 44/3* (1994) 110–115.
3. Gábos Z.: A klasszikus gravitációelméletről. *Fizikai Szemle 54/12* (2004) 397–401.
4. Gündischné Gajzágó M.: Bolyai Farkas élete és munkássága. In: *Bolyai Emlékkönyv.* EMT (2002) Kolozsvár, 90–108.
5. Gündischné Gajzágó M: Göttinga szerepe Bolyai Farkas és János életében. *Természet Világa* 2003. I. különszám, 24–29.
6. Deé Nagy A.: *A Bolyaiak könyvtára.* In: *Bolyai Emlékkönyv.* Vince Kiadó (2004) Budapest, 333–388.
7. Gündischné Gajzágó M.: Lapozgatás Bolyai Farkas elektromosság jegyzeteiben. *Firka* 2006–07/2, 55–62.
8. Vekerdi László: Változók és konstansok a Bolyai-kutatásban a bicentenárium tükrében. *Természet Világa* 2003. I. különszám, 137–140.
9. Benkő Samu: A Bolyaiak és a *-ok. In: Bolyai Emlékkönyv Vince Kiadó (2004) Budapest, 13–20.
10. Bolyai Hagyaték