Bérczi Sz., Hargitai H., Kereszturi Á., Sik A. (2001): *Bolygótestek atlasza.* Kis atlasz a Naprendszerről (2). ELTE TTK KAVÜCS, Uniconstant, Budapest, Püspökladány.
Bérczi Sz., Hargitai H., Illés E., Kereszturi Á., Sik A., Földi T., Hegyi S., Kovács Zs., Mörtl M., Weidinger T. (2003): *Bolygófelszíni mikrokörnyezetek atlasza.* ELTE TTK KAVÜCS, Uniconstant, Budapest, Püspökladány.
Bogard, D.D., Johnson, P. (1983): Martian gases in an Antarctic meteorite? *Science, 221,* Aug. 12, 651–654.
Harvey, R.P., Hamilton, V.E. (2005): Syrtis Major as the Source Region of the Nakhlite/Chassigny Group of Martian Meteorites: Implications for the Geological History of Mars. *36th LPSC,* #1019.
Lentz, R.C., Friedman, Taylor, G.J., Treiman, A.H. (1999): Formation of a martian pyroxenite: A comparative study of the nakhlite meteorites and Theo's Flow. *Meteoritics & Planetary Science, 34/6,* 919–932.
McSween, H.Y., Jr., Milam, K.A. (2005): Comparison of Olivine-rich Martian Basalts and Olivine-Phyric Shergottites. *36th LPSC,* #1202; LPI, Houston, CD-ROM.
Mikouchi, T. et al. (2003): Mineralogical Comparison of Y000593 with Other Nakhlites: Implications for Relative Burial Depths of Nakhlites. *34th LPSC,* #1883; LPI, Houston, CD-ROM.
Treiman, A.H., Norman, M., Mittlefehldt, D., Crisp, J. (1996): "Nakhlites" on Earth: Chemistry of Clinopyroxenites from Theo's Flow, Ontario, Canada. *27th LPSC,* 1341, LPI Houston, CD-ROM.
Warren, P.H., Bridges, J.C. (2005): Geochemical Subclassification of Shergottites and the Crustal Assimilation Model. *36th LPSC,* #2098; LPI, Houston, CD-ROM.

AZ EGYSZERŰ RADIOAKTÍV BOMLÁS STATISZTIKÁJA

Kocsy Gábor
OSSKI, Lakossági és
Környezeti Sugáregészségügyi Osztály

A legtöbb radioaktivitással foglalkozó könyvben az első oldalakon szerepel az egyszerű radioaktív bomlás egyenlete:

$$N(t) = N_0\, e^{-\lambda t},$$

amit a

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda\, N$$

differenciálegyenletből származtatnak. Ennek értelmezéséhez rendszerint hozzáfűzik, hogy N a bomló magok száma, λ pedig egy pozitív valós szám.

Azonban ezzel az értelmezéssel van egy kis gond. Ugyanis, ha N a bomló magok száma, akkor N egész szám, következésképpen az $N(t)$ függvény nem differenciálható, tehát a kiindulási egyenlet eleve értelmetlen. Nem beszélve arról, hogy a bomlás statisztikus jellege miatt a bomló magok számára vonatkozóan csak valószínűségi megállapításokat tehetünk.

Természetesen vannak alaposabb könyvek is, amelyek N-et a bomló magok számának *várható értékeként* értelmezik. Ekkor viszont joggal vagyunk kíváncsiak arra a *valószínűségi eloszlásra* is, amelyikből ezt a várható értéket származtatják. Az sem egészen nyilvánvaló, hogy ennek a várható értéknek az idő szerinti deriváltja arányos magával a várható értékkel.

További gond az a széles körben elterjedt állítás, hogy a radioaktív bomlás Poisson-eloszlást követ. Ezt könnyen megcáfolhatjuk. A Poisson-eloszlás szerint n számú esemény bekövetkezésének a valószínűsége

$$P_\lambda(n) = \frac{\lambda^n}{n!}\, e^{-\lambda},$$

ahol λ az eloszlás paramétere. Látható, hogy ez a valószínűség bármilyen $n \in \mathbb{N}$ esetén nagyobb nullánál. Tehát adott N számú bomló mag esetén annak a valószínűsége, hogy $N+1$, $2N$ vagy akár $100N$ mag fog elbomlani valamennyi idő alatt, nem nulla, ami nyilvánvalóan hibás.

Hogyan kell hát értelmeznünk a bomlás egyenletét?

Hogy az iménti kérdésekre választ kapjunk, tekintsük a következő gondolatkísérletet. Legyen adva valamilyen radioaktív anyag és két megfigyelő, *A* és *B,* akik mindent tudnak a szóban forgó anyag bomlásáról.

Az *A* megfigyelő előveszi a nagyítóját, és megfigyel egy atommagot. (Ennek a nagyítónak természetesen mágikus tulajdonságokkal kell rendelkeznie, hiszen az atommagok nagyítóval nem láthatók.) Azt látja, hogy még nem bomlott el. Ismeri az atom bomlási idejének valószínűségi eloszlásfüggvényét, p-t. Értelmezése szerint tehát $p(t) = P(t_{\text{bomlás}} < t)$, ahol P a valószínűséget, $t_{\text{bomlás}}$ pedig a bomlás idejét jelöli. Emberünket azonban az is érdekli, hogy ha valamely t_1 ideig nem bomlik el a kiszemelt mag, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy a t_1-től számított t_2 időn belül elbomlik. Itt *feltételes valószínűségről* van szó, ezért emlékeztetünk a feltételes valószínűség formulájára. A q eseménynek az r eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége:

$$P(q|r) = \frac{P(qr)}{P(r)},$$

ahol $P(qr)$ a q és r esemény együttes bekövetkezésének valószínűsége. Esetünkben az r esemény az, hogy a kiszemelt mag t_1 ideig nem bomlik el, a q esemény pedig az, hogy a t_1-től számított t_2 időn belül elbomlik. Könnyen látható, hogy $P(qr) = p(t_1+t_2) - p(t_1)$, és $P(r) = 1 - p(t_1)$. A keresett feltételes valószínűség tehát:

$$P(q|r) = \frac{p(t_1 + t_2) - p(t_1)}{1 - p(t_1)}.$$

Eltelik t_1 idő, és megjelenik a *B* megfigyelő. Ő is előveszi a nagyítóját, és véletlenül ugyanazt a magot veszi szemügyre, amit korábban az *A* megfigyelő. Azt tapasztalja, hogy még mindig nem bomlott el. Mivel ő is mindent tud a megfigyelt mag bomlásáról (és semmit sem tud az *A* megfigyelő ténykedéséről), azt mondja, hogy annak valószínűsége, hogy a mag t_2 időn belül elbomlik, $P(t_{bomlás} < t_2) = p(t_2)$.

Mivel egyik megfigyelő sem követett el hibát, és a mag tényleg nem bomlott el t_1 ideig, a fenti két valószínűségnek egyenlőnek kell lennie:

$$\frac{p(t_1 + t_2) - p(t_1)}{1 - p(t_1)} = p(t_2)$$

minden t_1, $t_2 > 0$ esetén. Vezessük be az $s := 1 - p$ függvényt. Ez nyilván $\mathbb{R}_0^+ \to [0, 1]$ leképezés. Ezzel a fenti egyenlet a következőképpen írható át:

$$s(t_1)\, s(t_2) = s(t_1 + t_2).$$

Tudjuk, hogy az exponenciális függvény teljesíti ezt az egyenletet. De vajon következik-e ebből az egyenletből, hogy *s* exponenciális függvény?

Könnyen jutunk arra a következtetésre, hogy a nemnegatív racionális számok halmazán *s* megegyezik az $f\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ t \mapsto s(1)^t$ függvénnyel. Ugyanis $s(0) = 1 - p(0) = 1 = s(1)^0$. Továbbá $x \in \mathbb{Q}^+$ esetén létezik n, $m \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $x = n/m$. Tekintsük a következő átalakítást:

$$s\left(\frac{n}{m}\right)^m = s\Bigg(\underbrace{\frac{n}{m} + \ldots + \frac{n}{m}}_{m\text{ db}}\Bigg) = s(n) = s(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n\text{ db}}) = s(1)^n,$$

amiből m-edik gyökvonás után adódik, hogy

$$s(x) = s\left(\frac{n}{m}\right) = s(1)^{n/m} = s(1)^x.$$

Innen, ha belátjuk, hogy *s* folytonos, már az is következik, hogy *s* megegyezik *f*-fel a nemnegatív valós számok halmazán is. A bizonyítást a folyóirat honlapján megtalálja az érdeklődő.

Azt kaptuk tehát, hogy minden $t \ge 0$ esetén $s(t) = s(1)^t$. Mivel $s(1) \le 1$, ezért egyértelműen létezik $\lambda \ge 0$ úgy, hogy $s(t) = e^{-\lambda t}$. Nevezzük λ-t bomlási állandónak. Ezek után $p(t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Megvan tehát a bomlás idejének valószínűségi eloszlásfüggvénye. Ahhoz, hogy a valamely *t* idő alatt elbomló magok számának várható értékét meghatározzuk, tudnunk kell, hogy milyen eloszlás szerint zajlik a radioaktív bomlás. Itt azzal a feltételezéssel élünk, hogy a magok *függetlenek* egymástól, azaz egymás bomlását nem befolyásolják. Független események bekövetkezését pedig a *binomiális eloszlás* írja le. Ha valamely esemény bekövetkezésének valószínűsége *p,* akkor annak a valószínűsége, hogy ez az esemény *N* független kísérletből *n*-szer bekövetkezik:

$$P(n) = \binom{N}{n} p^n (1 - p)^{N - n}.$$

Ismeretes, hogy a binomiális eloszlás várható értéke: $\overline{n} = Np$, ennek szórásnégyzete pedig: $\sigma^2(\overline{n}) = Np(1 - p)$. Esetünkben tehát az *N* magból *t* idő alatt elbomló magok számának várható értéke és szórásnégyzete:

$$\overline{N} = Np(t) = N\left(1 - e^{-\lambda t}\right),$$

$$\sigma^2(\overline{N}) = Np(t)\left[1 - p(t)\right] = Ne^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right).$$

Meg kell még említenünk, hogy a binomiális eloszlás *bizonyos esetekben* közelíthető a Poisson-eloszlással. Ennek feltétele, hogy $N \gg 1$ és $p(t) \ll 1$. Az első feltétel rendszerint triviálisan teljesül, az utóbbi feltétel pedig azt jelenti, hogy $\lambda t \ll 1$, azaz $t \ll T_{1/2}/\ln 2$ ($T_{1/2}$ a felezési idő).

A detektált beütések statisztikája

Ezek után vizsgáljuk meg azt is, hogy milyen eloszlást követ egy mérés során a *detektált beütések* száma.

Minden egyes fotont, amely a vizsgált mintában keletkezik, valamilyen ε valószínűséggel detektálunk. Annak valószínűsége tehát, hogy egy adott atommag bomlását *t* időn belül detektáljuk, $P(t_{jel} < t) = p(t)\varepsilon$. Ezek után annak a valószínűsége, hogy *N* darab atommagot *t* ideig mérve *k* beütést detektálunk, a binomiális eloszlás szerint számolható, hiszen az egyes beütések (kis holtidő esetén) függetlenek egymástól:

$$P_{det}(k) = \binom{N}{k}\left[p(t)\,\varepsilon\right]^k \left[1 - p(t)\,\varepsilon\right]^{N - k}.$$

Ugyanerre az eredményre jutunk akkor is, ha úgy gondolkodunk, hogy *n* bomlás esetén annak a valószínűsége, hogy ebből *k*-t detektálunk,

$$\binom{n}{k}\varepsilon^k (1 - \varepsilon)^{n - k}.$$

Ha ezt kiszámoljuk valamennyi lehetséges n-re, és a kapott értékeket az *n* bomlás valószínűségével súlyozva összeadjuk, szintén $P_{det}(k)$-t kell kapnunk (teljes valószínűség tétele). A levezetés szintén a honlapon található.

Itt is meg kell még jegyeznünk, hogy a binomiális eloszlás közelíthető a Poisson-eloszlással, sőt a második feltétel ($p\varepsilon \ll 1$) itt még inkább teljesül, mint az előbb, hiszen ε rendszerint jóval kisebb 1-nél.

Ezek után a *t* idő alatt detektált beütések számának várható értéke és szórásnégyzete:

$$\overline{c} = Np(t)\,\varepsilon = \overline{N}\varepsilon,$$

$$\sigma^2(\overline{c}) = Np(t)\,\varepsilon\left[1 - p(t)\,\varepsilon\right].$$

Ez a képlet lehetőséget nyújt ε meghatározására: valamely *t* ideig mérünk egy ismert aktivitású mintát, majd a detektált beütések számát elosztjuk a *t* idő alatt várható bomlások számával.