

gozson. Tanítómesteréhez, Bohrhoz fordult tanácsért. Bohr nem mondta meg, hogy mit csináljon, csak a következő kérdést tette fel neki: *Vajon Nyugat-Európa szabad lehetne-e a szovjet fenyegetés árnyékában, ha nem fejlesztették volna ki az atombombát?* Wheeler számára Bohr kérdése egyértelműen megmutatta a követendő utat. Lemondott párizsi ösztöndíjáról és csatlakozott a magfúziót kutató *Matterhorn Project*hez.

Wheeler előszeretettel foglalkozott a gravitációval és Einstein általános relativitáselméletével. A gravitációs összeomlás elméletével kapcsolatos, ma már oly népszerű kifejezés, a „fekete lyuk”, egyértelműen az ő nevéhez fűződik. Hozzá kell tennem, hogy ezt nem ő találta ki. Egy konferencián beszélt a gravitációs összeomlásról, amikor valaki bekiabált a hallgatóság köréből ezzel a kifejezéssel. Wheelernek annyira megtetszett, hogy ezentúl már ő is ezt a kifejezést propagálta. Az addig használt „a gravitáció miatt teljesen összeomlott csillag” kifejezés rettenetesen hosszú volt és, ahogy Wheeler megjegyezte: *Elég néhányszor egymás után kimondani ezt a hosszú dolgot, hogy azután kétségbeesetten keressél valami mást helyette.* Persze, itt csak ezeknek a hatalmas gravitációs vonzással rendelkező csillagoknak az elnevezéséről és nem a felfedezéséről beszélünk. A fekete lyukszerű csillagok létezését már közel kétszáz évvel előttük felvetették, elsőként *John Michell* angol csillagász 1784-ben, majd vagy az ő hatására, vagy tőle függetlenül, írt ugyanerről a híres francia matematikus, *Pierre-Simon Laplace* is 1796-ban.

Fontos azt is megemlíteni, hogy kiváló tanár és legalább annyira kiváló tankönyvíró volt. Tanítványai közül *Richard Feynman* emelem ki. Könyvei didaktikusak, szép és közérthető nyelven szólnak az olvasóhoz. Különösen a *Gravitáció* című könyve [2] lett sikeres; két kollegájával, *Charles Misner*rel és *Kip Thorne*-nal együtt írta az 1970-es évek elején, és nemzedékeket tanított az általános relativitáselméletre.

Szerette a szavakat és szeretett játszani velük, sok mondására emlékeznek. Az egyik leghíresebb közülk: „Az idő az, ami megakadályozza, hogy minden egyszerre történjék.” [3].

Végül egy keveset az indulásáról. A floridai Jacksonville-ben született, de hamarosan Baltimore-ba költöztek, ott nőtt fel. Édesapja könyvtáros volt és sokat tett a könyvek és az olvasás népszerűsítéséért. Wheeler érdeklődését a természettudományok iránt valószínűleg édesanyjától örökölte. Doktorátusát a Johns Hopkins Egyetemen szerezte. Életének legnagyobb részében a Princetoni Egyetemen dolgozott, kivéve néhány évet, amelyet a Texasi Egyetemen töltött Austinban és a korábban már említett háború alatti munkáját a Manhattan-tervben és a későbbi hidrogénbomba-projektben. Utolsó találkozásunkkor épp szokásos szabadságára készült Maine-államba, ahol a családjuknak van nyaralója. Kérdeztem, mit fog ott csinálni. A következőt válaszolta: „Látod a kezemet, a lábamat? Mindegyiket boldogan odaadnám, ha megtudhatnám, mi az a kvantum? Mi az, hogy létezés? A kettő kell, hogy összefüggjön, de hogyan? A nyaralónkban van egy kő, amelyet a fiam és a felesége hozott nekem Görögországból, Athén külvárosából, ahol Platón és Arisztotelész sétált és beszélgetett. Egy olyan gépről álmodozom, amelybe beletehetném ezt a követ és a gép kiadná ezeknek a fantasztikus embereknek a beszélgetését. Mindenemet odaadnám azért, hogy hallhassam őket!”

*Hargittai Magdolna*

Magyar Tudományos Akadémia

#### Irodalom

1. Bohr N., Wheeler J.A.: The Mechanism of Nuclear Fission. *Phys. Rev.* 56 (1939) 426–450.
2. Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A.: *Gravitation*. W.H. Freeman, San Francisco, 1973.
3. Mackay A.L.: *A Dictionary of Scientific Quotations*. IOP Publishing, Bristol, 1991, 261.

## A FIZIKA TANÍTÁSA

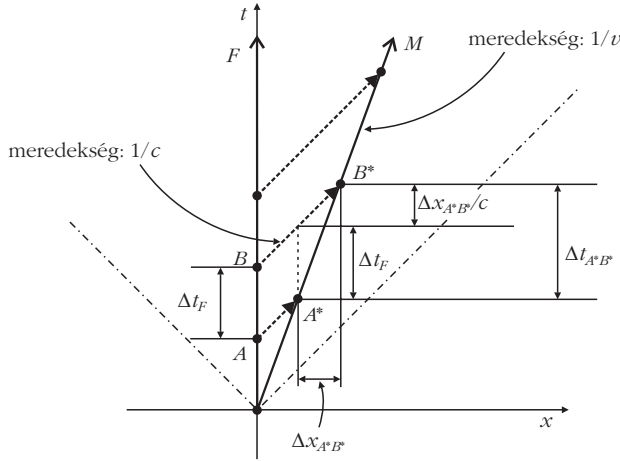
# AZ ELEKTROMÁGNESES ÉS AZ AKUSZTIKAI DOPPLER-EFFEKTUS ELEMZÉSE GEOMETRIAI DIAGRAMOKKAL

Bokor Nándor  
BME, Fizika Tanszék

A középiskolás diákok és az első éves egyetemi hallgatók, amikor a hullámtannal ismerkednek, gyakran találják zavarba ejtőnek az elektromágneses és az akusztikus Doppler-formulák közötti különbséget. Geometriai diagramoknak, valamint az „esemény” fogalmának felhasználásával egyszerűen rá lehet világítani a kétféle Doppler-effektus közötti matematikai különbségeket fizikai okaira.

## Egydimenziós elektromágneses Doppler-effektus

Tekintsük először az elektromágneses Doppler-effektust, egy térbeli dimenzióban. Az *1. ábra* egy 2-dimenziós ( $x$  és  $t$ ) téridő-diagramot mutat arra az esetre, amikor a fényforrás ( $F$ ) és a megfigyelő ( $M$ )



1. ábra. Az elektromágneses Doppler-effektus téridő-diagramja. A forrás ( $F$ ) nyugalmi rendszerét használjuk; az ábrán szereplő összes távolság és időtartam ebben az inerciarendszerben értendő. A fénylejek  $c$  sebességgel terjednek. A megfigyelő ( $M$ )  $v$  relatív sebességgel mozog, amelyre  $v < c$ . A tengelyek olyan módon vannak kalibrálva, hogy a forrás által jobbra kibocsátott fénylejek világvonalai  $+45^\circ$ -os egyenesek (szaggatott vonalak az ábrán).  $A$  és  $B$  két egymás utáni kibocsátási esemény,  $A^*$  és  $B^*$  a hozzájuk tartozó észlelési események.

távolodik egymástól az  $x$ -tengely mentén. A forrás és a megfigyelő mozgása is időszerű világvonallal írható le (azaz világvonalluk mindenütt a lokális fénykúp belsejében halad), ez megfelel annak a követelménynek, hogy  $v_F$  és  $v_M$  sebességük kisebb a fény  $c$  vákuumbeli sebességénél. Ezen a ponton kihangsúlyozandó az a tény, hogy inerciarendszerünk teljesen tetszőlegesen választható, mivel a fénysebesség *bármelyik* inerciarendszerben  $c$ , és csak a forrás és a megfigyelő egymáshoz képesti  $v$  sebessége számít. Ilyen módon, az egyszerűség kedvéért és az általánosságból semmit sem veszítve, választhatjuk a forrás nyugalmi rendszerét, vagyis  $v_F = 0$  és  $v_M = v$ , amint az 1. ábra mutatja. Az ábra  $A(x,t)$  és  $B(x,t)$  pontjai két egymás utáni kibocsátási eseményt (pl. egymás utáni fényimpulzusok vagy szomszédos hullámfrontok elindítását) jelképezik. A hozzájuk tartozó észlelési eseményeket az  $A^*(x,t)$  és  $B^*(x,t)$  pontok ábrázolják. A kényelem kedvéért kalibráljuk a  $t$ - és  $x$ -tengelyeket olyan módon, hogy bármely fényimpulzus világvonala  $\pm 45^\circ$  meredekségű egyenes vonal legyen ( $+45^\circ$ , ha az impulzus jobbra, és  $-45^\circ$ , ha balra halad). Ezt elérhetjük például úgy, ha az  $x$ -tengelyen az  $x = 1$  métert választjuk egységnek, a  $t$ -tengelyen pedig a  $t = (1 \text{ méter}) / (3 \cdot 10^8 \text{ méter/másodperc}) = 3,33 \cdot 10^{-9}$  másodpercet. Az ábrán tehát a  $+45^\circ$  meredekségű szaggatott vonalak a forrástól a megfigyelőhöz haladó fényimpulzusok világvonalai.

Az  $A$  és  $B$  kibocsátási események téridőbeli koordinátáit felhasználva az  $A^*$  és  $B^*$  észlelési események között eltelt idő így írható (lásd 1. ábra):

$$\Delta t_{A^*B^*} = \Delta t_F + \frac{\Delta x_{A^*B^*}}{c} = \Delta t_F + \frac{v \Delta t_{A^*B^*}}{c}, \quad (1)$$

amiből

$$\Delta t_{A^*B^*} = \frac{\Delta t_F}{1 - \frac{v}{c}}, \quad (2)$$

ahol  $\Delta t_F$  az  $A$  és  $B$  kibocsátási események között eltelt időtartam, a nyugvó rendszerben (a forrás inerciarendszeréből) mérve. A  $\Delta t_{A^*B^*}$  és a  $\Delta t_M$  (az  $A^*$  és  $B^*$  események között eltelt, a megfigyelő rendszerében mért sajátidő) kapcsolatát az idődilatació adja meg:

$$\Delta t_{A^*B^*} = \frac{\Delta t_M}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3)$$

A (2) és (3) egyenletek összevetéséből:

$$\Delta t_M = \Delta t_F \frac{\sqrt{1 + \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}} = \Delta t_F \frac{\sqrt{c+v}}{\sqrt{c-v}}. \quad (4)$$

Mindkét oldal reciprokát véve megkapjuk a megfigyelt és a kibocsátott frekvencia közötti kapcsolatot:

$$f_M = f_F \frac{\sqrt{c-v}}{\sqrt{c+v}}. \quad (5)$$

Egy hasonló téridő-diagram segítségével azt is könnyű megmutatni (ez a diákoknak házi feladatként feladható), hogy ha a forrás a megfigyelő felé mozog, a (4) és (5) képletekben szereplő plusz és mínusz előjel felcserélődik. Az egydimenziós esetre az általános képlet tehát:

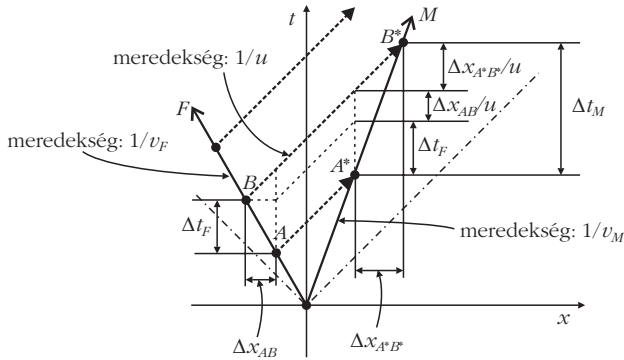
$$f_M = f_F \frac{\sqrt{c \pm v}}{\sqrt{c \pm v}}, \quad (6)$$

ahol a felső előjelek az egymástól távolodó forrás és megfigyelő, míg az alsó előjelek az egymáshoz közeledő forrás és megfigyelő esetén érvényesek.

(Egyszerű házi feladatként az is feladható, hogy a diákok – hasonló téridő-diagramot használva – a megfigyelő nyugalmi rendszerében tárgyalva vezessék le a (6) képletet.)

## Egydimenziós akusztikai Doppler-effektus

Ezután készítsünk a fentivel analóg téridő diagramot az akusztikai Doppler-jelenségre. Mivel mind a forrás, mind a megfigyelő lassabban mozog a hang sebességénél (különben nincs Doppler-effektus), ebben az esetben a hang  $u$  sebessége az, ami a „természeti háttérsebesség”. Amikor tehát az akusztikus téridő-diagramot készítjük, a  $t$ - és  $x$ -tengelyeket úgy kalibráljuk, hogy a  $\pm 45^\circ$  meredekségű egyenesek a hangimpulzusok világvonalai legyenek. Ezt elérhetjük például úgy, ha az  $x$ -tengelyen az  $x = 1$  métert választjuk egy-



2. ábra. Az akusztikai Doppler-effektus tér-idő-diagramja. A terjedési közeg nyugalmi rendszerét használjuk; az ábrán szereplő összes távolság és időtartam az ebben a vonatkoztatási rendszerben mért értéket jelenti. (Itt azonban, mivel a sebességek kicsik, a nyugvó rendszer, a forrás mozgó vonatkoztatási rendszere és a megfigyelő mozgó vonatkoztatási rendszere mind ugyanazokat az időtartamokat mérik!) A tengelyek olyan módon vannak kalibrálva, hogy a közeg vonatkoztatási rendszerében az izotróp  $u$  sebességgel terjedő hangjelek világvonalai  $\pm 45^\circ$ -os egyenesek (a hangsebesség csak ebben a vonatkoztatási rendszerben izotróp!). A forrás ( $F$ ) balra mozog  $v_F$  sebességgel, a megfigyelő ( $M$ ) pedig jobbra,  $v_M$  sebességgel, amelyekre  $v_F, v_M < u$ .  $A$  és  $B$  két egymás utáni kibocsátási esemény,  $A^*$  és  $B^*$  a hozzájuk tartozó észlelési események.

ségnek, a  $t$ -tengelyen pedig a  $t = (1 \text{ méter})/(340 \text{ méter/másodperc}) = 2,94 \cdot 10^{-3}$  másodpercet ( $u = 340$  méter/másodperces hangsebességet feltételezve). A Doppler-effektus feltétele, hogy mind a forrás, mind a megfigyelő világvonala mindenütt a lokális „hangkúp” belsejében haladjon. Ezen a ponton kihangsúlyozandó az a tény, hogy *csak egyetlen* olyan inerciarendszer van, amelyben a hangimpulzusok minden irányban ugyanazzal az  $u$  sebességgel haladnak – és amelyben  $\pm 45^\circ$ -os világvonallal ábrázolhatók: ez az az inerciarendszer, amelyben a *terjedési közeg* nyugalomban van.

A 2. ábra egy akusztikai tér-idő-diagram arra az egydimenziós esetre, amikor a hangforrás és a megfigyelő távolodik egymástól az  $x$ -tengely mentén. A fentiekhez hasonlóan  $A(x, t)$  és  $B(x, t)$  két egymás utáni kibocsátási esemény (pl. két hangimpulzus vagy két egymást követő hullámfront elindítása),  $A^*(x, t)$  és  $B^*(x, t)$  pedig a hozzájuk tartozó észlelési események. Mint az ábra mutatja, az  $A^*$  és  $B^*$  között eltelt idő:

$$\begin{aligned} \Delta t_M &= \Delta t_F + \frac{\Delta x_{AB}}{u} + \frac{\Delta x_{A^*B^*}}{u} = \\ &= \Delta t_F + \frac{v_F \Delta t_F}{u} + \frac{v_M \Delta t_M}{u}. \end{aligned} \quad (7)$$

Átrendezve kapjuk:

$$\Delta t_M = \Delta t_F \frac{u + v_M}{u - v_F}. \quad (8)$$

Mindkét oldal reciprokát véve kapjuk az akusztikai Doppler-effektus ismert képletét:

$$f_M = f_F \frac{u - v_M}{u + v_F}. \quad (9)$$

Könnyű megmutatni, hogy közeledő forrás vagy közeledő megfigyelő esetén a (9) képletben szereplő megfelelő előjel ellenkezőjére változik. Az egydimenziós esetre az általános képlet tehát:

$$f_M = f_F \frac{u \mp v_M}{u \pm v_F}, \quad (10)$$

ahol felső előjelek a távolodó forrás/megfigyelő esetében, az alsó előjelek a közeledő forrás/megfigyelő esetében érvényesek.

## Az elektromágneses és az akusztikai Doppler-képletek levezetésének összehasonlítása

Ezen a ponton pedagógiai szempontból hasznos felkérni a diákokat, sorolják fel az alapvető különbségeket a kétféle levezetéshez használt tér-idő-diagramok és algebrai lépések között. Ez segíti őket összpontosítani az elektromágneses és az akusztikus hullámok, valamint a relativisztikus és a klasszikus kinematika közötti alapvető fizikai különbségekre. A felsorolandó különbségek a következők:

### Inerciarendszer

- Az elektromágneses hullámterjedés szempontjából *nincs preferált inerciarendszer*. Minden inerciarendszer egyenértékű, és a fény sebességét mindegyik inerciarendszerben, bármilyen irányban ugyanolyan  $c$  értékűnek mérjük. Ez a meglepő kísérleti tény tette lehetővé, hogy az általánosságról való bármilyen lemondás nélkül olyan egyszerűsített tér-idő-diagramot tekintsünk, amelyben a megfigyelő nyugszik (1. ábra). Az inerciarendszerek egyenértékűségéből következik az is, hogy csak a forrásnak a megfigyelőhöz képesti, *relatív* sebessége fog szerepelni a végső (6) képletben.

- Az akusztikus esetben azonban *van preferált inerciarendszer*: az a rendszer, amelyben a hullámterjedés közege nyugalomban van. Ez az egyetlen vonatkoztatási rendszer, amelyben a hang sebessége izotróp, és  $u$ -val egyenlő. Úgy döntünk, hogy tér-idő-diagramunkat erre az inerciarendszerre rajzoljuk fel (2. ábra). Az általánosság megőrzése végett a számításainkban külön-külön figyelembe kell vennünk a forrás mozgását és a megfigyelő mozgását (lásd 2. ábra). Nem az egymáshoz képesti relatív sebességük, hanem külön-külön mindkettőjük „abszolút” sebessége, azaz ebben a preferált inerciarendszerben (a terjedési közeghez rögzített rendszerben) mért sebességük jelenik meg a (10) végső képletben.

### Természetes határsebesség

- Az 1. ábrán a természetes határsebesség a fény vákuumbeli  $c$  sebessége. Mind a fényforrás, mind a megfigyelő világvonalának a lokális fénykúpon belül kell elhelyezkednie. A kísérleti eredmények azt mutatják, hogy a  $c$  minden fizikai objektum számára alapvető határsebesség. Mivel tehát  $v < c$ , a (6) képlet mindig tényleges fizikai tartalommal bíró értéket ad  $f_M$ -re.

• A 2. ábrán a „természetes határsebességet” a hang  $u$  sebessége adja. Mind a hangforrás, mind a megfigyelő világvonalának a lokális „hangkúpon” belül kell elhelyezkednie. Az  $u$  hangsebesség *nem* alapvető határsebesség; a természet mind a hangforrás, mind a megfigyelő számára megengedi  $u$  túllépését. A (10) képletben azonban a  $|v_F| \geq u$  vagy  $|v_M| \geq u$  értékek fizikailag értelmetlen (negatív, zérus, vagy végtelen)  $f_M$ -értékekhez vezethetnek. Ezek olyan eseteknek felelnek meg, amikor lökéshullámok alakulnak ki és/vagy a hanghullámok nem érik el a megfigyelőt. A Doppler-képlet ilyen esetekben nem alkalmazható.

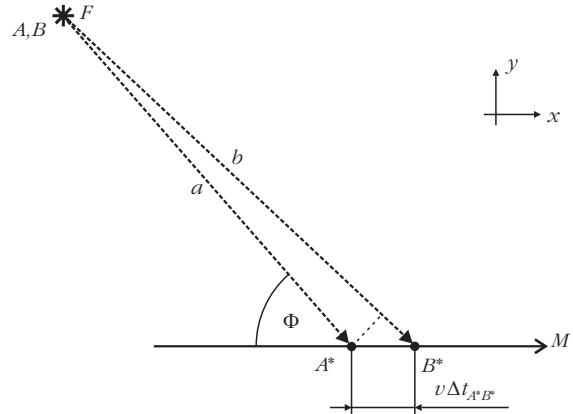
### Idődilatáció

• Az elektromágneses esetben az  $A^*$  és  $B^*$  események között eltelt időtartam függ attól, melyik inerciarendszerben mérjük. Ez az időtartam a forrás vonatkoztatási rendszerében mérve  $\Delta t_{A^*B^*}$ , a megfigyelőében mérve pedig  $\Delta t_M$ . A két mért érték közötti kapcsolatot az *idődilatáció* (3) képlete adja meg.

• Az akusztikai esetben a jelenségben szereplő összes sebesség (lényeges módon az  $u$  „határsebességet” is beleértve) sokkal kisebb a fénysebességnél:  $v_F, v_M, u \ll c$ . Az idődilatációs hatást tehát biztonsággal elhanyagolhatjuk; ugyanazokat az időtartamokat mérjük a közeg, a forrás és a megfigyelő vonatkoztatási rendszerében egyaránt. A (7) egyenletben ezt használtuk ki.

## Háromdimenziós elektromágneses Doppler-effektus

Nem csak az egydimenziós, hanem az általános háromdimenziós mozgás esetére is konstruálható tér-idő-diagram, amelyből az elektromágneses Doppler-képlet általános alakja könnyen levezethető. Mivel a forrásnak és a megfigyelőnek csak a relatív sebessége számít, bármelyiket tekinthetjük nyugvónak. Tegyük fel ismét, hogy a forrás van nyugalomban (helyesebben: írjuk le a jelenséget a forrás nyugalmi vonatkoztatási rendszerében). Tegyük fel továbbá, hogy a forrás és a megfigyelő elegendően nagy távolságra van egymástól, így a tárgyalt megfigyelési időtartam alatt párhuzamos fénysugarak érik a megfigyelőt. Ekkor, az általánosságból semmit sem veszítve, választhatjuk az  $x$ -tengelyt úgy, hogy egybeessen a megfigyelő mozgási irányával; és választhatjuk az  $y$ -tengelyt úgy, hogy a hullám terjedési irányát meghatározó  $\mathbf{k}$  hullámszámvektor az  $(x,y)$  síkban fekszen. Ilyen módon az általános 3 térbeli dimenziós eset 2 térbeli dimenzióra redukálható. A jelenség tehát teljes egészében leírható egy 3 (2 térbeli + 1 időbeli) dimenziós  $(x,y,t)$  tér-idő-diagrammal, az 1. ábra 2-dimenziós  $(x,t)$  tér-idő-diagramjának analógiájára. Az érdeklődőbb diákoknak házi feladatként feladható, hogy konstruálják meg papíron (axonometrikus nézetben) ezt a 3-dimenziós tér-idő-diagramot, és vezessék le belőle az elektromágneses Doppler-effektus általános képletét.



3. ábra. A 3-dimenziós elektromágneses Doppler-effektus térbeli diagramja. Mivel csak a relatív sebesség számít a forrás ( $F$ ) és a megfigyelő ( $M$ ) között, a forrást tekinthetjük nyugalomban levőnek.  $A$  és  $B$  két egymás utáni kibocsátási esemény,  $A^*$  és  $B^*$  a hozzájuk tartozó észlelési események. A térbeli diagram ezeknek az eseményeknek csak a helyét ábrázolja, időkoordinátájukat az algebrai levezetésben külön figyelembe kell venni.

Itt azonban ismét meg kell jegyezni, hogy az *akusztikai* Doppler-effektusnál a forrás és a megfigyelő sebessége külön-külön veendő figyelembe. Teljesen általános esetben még az sem biztos, hogy – a hullámot szállító közeg nyugalmi rendszerében nézve – a forrás és a megfigyelő pályaegyenese egy síkba esik. A jelenség teljes téridőbeli leírásához tehát egy 4-dimenziós  $(x,y,z,t)$  diagramra lenne szükség. *Téridő*-diagram helyett ezért használjunk most egy egyszerű 3-dimenziós *térbeli* diagramot, amelyen a forrás és a megfigyelő  $(x,y,z)$  *pályáját* [nem pedig az  $(x,y,z,t)$  *világvonalukat*] fogjuk ábrázolni. A grafikus megjelenítésből kimaradó időkoordinátát természetesen figyelembe vesszük az algebrai levezetésben. Mint kiderül, a térbeli diagram segítségével ismét tanulságos összehasonlítást végezhetünk az elektromágneses és az akusztikai eset között.

A 3. ábra az elektromágneses Doppler-effektus térbeli diagramját mutatja, a forráshoz rögzített inerciarendszerben. Az  $A$ -val és  $B$ -vel jelölt két egymás utáni kibocsátási esemény ugyanazon a helyen (bár különböző időpontokban) zajlik, tehát ugyanaz a pont jelzi őket az ábrán. A hozzájuk tartozó két észlelési esemény  $A^*$  és  $B^*$ . Feltesszük, hogy az  $A^*$  és  $B^*$  közötti térbeli távolság elég kicsi a forrás és a megfigyelő közötti távolsághoz képest, vagyis a tekintett megfigyelési időtartam alatt a forrás iránya a megfigyelőhöz képest egyetlen  $\Phi$  szöggel jellemezhető.

Az ábrán szaggatott vonallal jelölt két fénysugár úthosszkülönbsége:

$$b - a = c(\Delta t_{A^*B^*} - \Delta t_{AB}) = c \left( \frac{\Delta t_M}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \Delta t_F \right) \quad (11)$$

A fenti zárójel első tagjában a (3) idődilatációs összefüggést alkalmaztuk, a második tagban pedig kihasználtuk, hogy inerciarendszerünkben a forrás nyugalomban van.

Ugyanez a távolság úgy is kifejezhető, mint

$$b - a = v \Delta t_{A^* B^*} \cos \Phi = v \frac{\Delta t_M}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cos \Phi. \quad (12)$$

A (11) és (12) egyenletek jobb oldalát egyenlővé téve, és a kapott egyenletet  $\Delta t_M$ -re megoldva kapjuk:

$$\Delta t_M = \Delta t_F \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \Phi}, \quad (13)$$

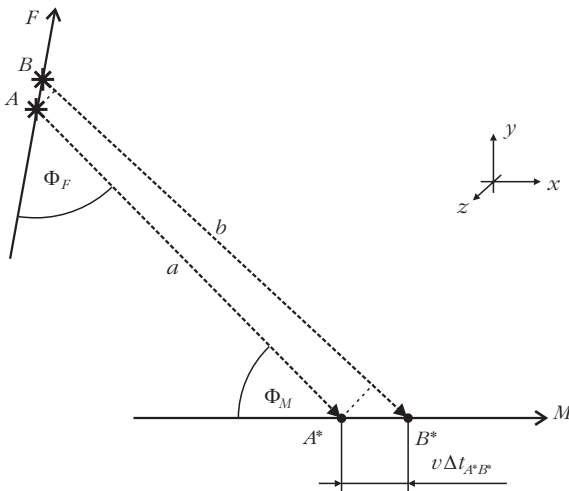
és reciprokát véve megkapjuk az elektromágneses Doppler-effektus képletének ismert általános alakját:

$$f_M = f_F \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \Phi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (14)$$

### Háromdimenziós akusztikai Doppler-effektus

A 4. ábra (a 3. ábrán bemutatott elektromágneses eset analógiájára) az általános, 3-dimenziós akusztikai Doppler-effektus térbeli diagramját ábrázolja. A hullámot szállító közeg inerciarendszerében a forrás és a megfigyelő pályája nem szükségképpen fekszik azonos síkban. Ez ellentétben áll az elektromágneses esettel, ahol vagy a forrásról, vagy a megfigyelőről feltehetjük, hogy nyugszik (lásd az *Inerciarendszer* megjegyzést az 1-dimenziós tárgyalásnál). Feltesszük, hogy mind az  $A$  és  $B$  kibo-

4. ábra. A 3-dimenziós akusztikai Doppler-effektus térbeli diagramja, a hullámot szállító közeg inerciarendszerében. Ebben az inerciarendszerben a forrás ( $F$ ) és a megfigyelő ( $M$ ) mozgása általános irányokkal veendő figyelembe.  $A$  és  $B$  két egymás utáni kibocsátási esemény,  $A^*$  és  $B^*$  a hozzájuk tartozó észlelési események. A térbeli diagram ezeknek az eseményeknek csak a helyét ábrázolja, időkoordinátájukat az algebrai levezetésben külön figyelembe kell venni.



csátási események közötti távolság, mind az  $A^*$  és  $B^*$  észlelési események közötti távolság elegendően kicsi a forrás és a megfigyelő közötti távolsághoz képest, azaz a  $\Phi_F$  és  $\Phi_M$  szögek nem változnak észrevehető mértékben a megfigyelési időtartam alatt. A két hangjel által megtett úthosszak különbsége:

$$b - a = u(\Delta t_{A^* B^*} - \Delta t_{AB}) = u(\Delta t_M - \Delta t_F). \quad (15)$$

Bár  $\Delta t_{A^* B^*}$  és  $\Delta t_{AB}$  is a hullámterjedési közeg inerciarendszerében mért időtartamok, mégis egyenlővé tehetők  $\Delta t_M$ -mel, illetve  $\Delta t_F$ -fel (amelyek a megfigyelő, illetve a forrás inerciarendszerében mért időtartamok), mert az idődilatació szerepét itt el lehet hanyagolni (lásd az *Idődilatació* megjegyzést az 1-dimenziós esetre).

Ugyanez a távolság kifejezhető úgy is, mint

$$b - a = v_M \Delta t_{A^* B^*} \cos \Phi_M + v_F \Delta t_{AB} \cos \Phi_F = v_M \Delta t_M \cos \Phi_M + v_F \Delta t_F \cos \Phi_F. \quad (16)$$

A (15) és (16) egyenletek jobb oldalát egyenlővé téve, és a kapott egyenletet  $\Delta t_M$ -re megoldva kapjuk:

$$\Delta t_M = \Delta t_F \frac{u + v_F \cos \Phi_F}{u - v_M \cos \Phi_M}, \quad (17)$$

amelynek a reciprokát véve megkapjuk az akusztikai Doppler-effektus képletének általános alakját:

$$f_M = f_F \frac{u - v_M \cos \Phi_M}{u + v_F \cos \Phi_F}. \quad (18)$$

### Megjegyzés

Az akusztikai Doppler-effektus általános esetének teljes grafikai megjelenítéséhez 4-dimenziós tér-idő-diagramra lenne szükség. Mivel ilyen diagramot nem tudunk a táblára rajzolni, kénytelenek vagyunk beérni egy 3-dimenziós térbeli diagram megrajzolásával (lásd 4. ábra), és lemondani az időkoordináta grafikus megjelenítéséről. Ez a szegényesebb geometriai megjelenítés is hasznos lehet pedagógiailag az elektromágneses és az akusztikus Doppler-képletek különbségeinek megértéséhez, de az ábráról bizonyos lényeges vonások óhatatlanul hiányoznak. Amikor a diákok a két eset közötti különbségeket sorba veszik (*Az elektromágneses és az akusztikai Doppler-képletek levezetésének összehasonlítása* pontban az 1-dimenziós esetre felírt lista analógiájára), nincs például semmi vizuális támpont, ami a *Természetes határsebesség* megjegyzésre (és a hozzá tartozó diskusszióra a lökéshullámokról és az információ eljutásáról a megfigyelőhöz) utalna az ábrákból. Elképzelhető, hogy a „kevesebb többet ér”: ha csak az 1-dimenziós eset tárgyalására szorítkozunk, a diákok általánosabb következtetések levonására lesznek képesek.

### Irodalom

E.F. Taylor, J.A. Wheeler: *Tér-időfizika*. Typotex, Budapest, 2006.  
www.mathpages.com/rr/