

A Fourier-analízis kiterjeszhető volt a lokális stabilitás vizsgálatára is, és meg lehetett mutatni, hogy a ρ^* sűrűségen a tércentrált köbös rács az egyetlen alapállapot nemcsak a Bravais-rácsok között, hanem a konfigurációk egy nagyobb családján belül, amely a periodikus konfigurációkat és ezek unióit tartalmazza. Ha a sűrűség ρ^* -nál nagyobb, az alapállapotok között más Bravais-rácsok és ezek periodikus és nemperiodikus uniói is megjelennek. A fajlagos alapállapot energiája minden esetben e_p , és ez az érték az adott sűrűségen elérhető abszolút minimum. A megtalált alapállapotok tehát globálisan stabilak.

Felvetődik a kérdés, mi a köze mindennek a természetben végbemenő kristályképződéshez? A párkölcsönhatás korlátossága a szerves kristályok (sók, fémek) körében nem reális feltevés. Érvényesül ugyanis a Pauli-elv, amely gyakorlatilag végtelenül erős taszításban nyilvánul meg az atomok, ionok átlapolása esetén. Molekulák, polimerek kristályai azonban jól leírhatók a tömegközéppontok közötti párkölcsönhatással, és a tömegközéppontok átlapolásának nincs fizikai akadály. Másrészt, a párkölcsönhatás módosítható egy véges hatósugarú, tetszőleges erősen taszító kölcsönhatás hozzáadásával. A fent leírt eredmények még érvényben maradnak egy felülről is behatárolt sűrűségtartományban [8]. A $v(\mathbf{k})$ Fourier-transzformáltra tett két feltevés erősen megszorító jellegű, azonban a természetben léteznek ilyen effektív erők a

fémbebeli ionok között. Valóban, $v(\mathbf{k})$ levágása K_0 -nál az u potenciálban oszcillációt és hatványfüggvény szerinti lecsengést idéz elő, és megkapható ily módon a fémfizikából ismert Ruderman–Kittel–Kasuya–Yosida- vagy Friedel-potenciál. Az alkalmazhatóságot leginkább az korlátozza, hogy az eredmény a ρ^* -nál kisebb sűrűségekre nem érvényes.

Beszámolómat azzal kell zárjam, hogy mind a Bose–Einstein-kondenzáció, mind a kristályosodás problémája a tagadhatatlan előrelépés ellenére lényegében megoldatlan. Íme két szép feladat a matematikai fizikusok újabb nemzedéke számára.

Irodalom

1. A. Sütő: Equivalence of Bose–Einstein condensation and symmetry breaking. *Phys. Rev. Lett.* 94 (2005) 080402.
2. E. H. Lieb, R. Seiringer, J. Yngvason: Justification of c-number substitutions in bosonic Hamiltonians. *Phys. Rev. Lett.* 94 (2005) 080401.
3. E. H. Lieb, R. Seiringer: Proof of Bose–Einstein condensation for dilute trapped gases. *Phys. Rev. Lett.* 88 (2002) 170409.
4. A. Sütő: Thermodynamic limit and proof of condensation for trapped bosons. *J. Stat. Phys.* 112 (2003) 375–396.
5. E. Kim, M. H. W. Chan: Probable observation of a supersolid helium phase. *Nature* (London) 427 (2004) 225.
6. E. Kim, M. H. W. Chan: Observation of superflow in solid helium. *Science* 305 (2004) 1941.
7. A. Sütő: Crystalline ground states for classical particles. *Phys. Rev. Lett.* 95 (2005) 265501.
8. A. Sütő: From bcc to fcc: Interplay between oscillating long-range and repulsive short-range forces. *Phys. Rev. B* 74 (2006) 104117.

SZOCIOFIZIKA: HUMÁN KAPCSOLATOK HÁLÓZATA NAGY SKÁLÁN

Palla Gergely
MTA–ELTE Statisztikus és Biológiai Fizika Tanszék
Kertész János
BME Fizikai Intézet

A hálózatok kutatás igazi multidiszciplináris tudomány, matematikusok, fizikusok, vegyészek és biológusok egyaránt hozzájárulnak. A „kemény” tudományok művelőit talán meglepi, de ez a terület sokat köszönhet a szociológiának is, amelynek keretében már a 30-as évektől kezdve tanulmányoztak emberek kis méretű kapcsolati hálózatokat, és fontos felismeréseket tettek. (Itt meg kell említeni a világhírű *Mérei Ferenc* nevét.) Az adatgyűjtés alapvető eszközei a kérdőívek voltak. Az ilyen vizsgálatok előnye, hogy a kapcsolatokról nagyon részletes információkat lehet kapni: milyen az ismeretség, milyen erős a kapcsolat, mennyire

kölcsönös, érzelmileg hogyan viszonyulnak egymáshoz a vizsgált személyek stb. Ezzel szemben nagy hátrány, hogy az ilyen módon tanulmányozható minta mérete erősen korlátozott, továbbá a válaszokból a szubjektivitást nem lehet teljesen kiszűrni.

A hálózati megközelítés közben nagy sikereket hozott biológiai, technológiai és gazdasági problémák vizsgálatánál is, amelynek eredményeként mára a komplex hálózatok témaköre önálló, interdiszciplináris tudományterületté fejlődött [1]. Fontos szerep jutott ezen a téren a fizikusoknak is, ugyanis a sok kölcsönható alegységből álló rendszerek tárgyalására kidolgozott statisztikus fizikai megközelítés rendkívül gyümölcsözőnek bizonyult. Ez a fajta megközelítés több fontos új eredménnyel bővítette a korábbi, kisméretű társaskapcsolat-hálózati mintákon szerzett ismereteket. Az információtechnológia utóbbi két évtizedben bekövetkezett rohamos fejlődésének köszönhetően olyan új lehetőségek nyíltak meg az emberi

A szerzők kutatásait az OTKA K68669 és K60456 jelű pályázatai támogatták.

A szerzők köszönettel tartoznak Szabó Gábornak, Barabási Albert-Lászlónak és Vicsek Tamásnak, valamint az ezen cikk alapjául szolgáló korábbi publikációk további társszerzőinek is.

kapcsolathálózatok feltérképezésére, amelyek révén akár több millió személyt tartalmazó minták is vizsgálhatók.

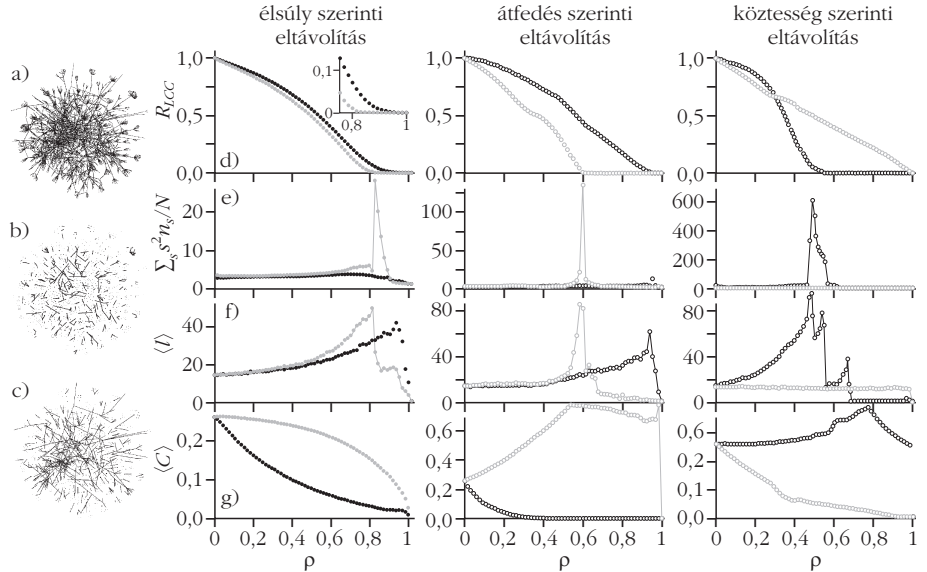
A továbbiakban egy több mint 4 millió fős mobiltelefon-hívási hálózat legfontosabb statisztikus tulajdonságait ismeretjük. A kérdőíves adatgyűjtéssel szemben itt csak korlátozott és közvetett, de ugyanakkor objektív információ áll rendelkezésre az egyes kapcsolatokról: kéthetes periódusokra aggregálva a hívások száma, összesített ideje és költsége. Ezeket az adatok alapján megszerkesztett hálózatban az adott kapcsolat erősségére jellemző élsúlyként lehet szerepeltetni. A nem személyes ismerettséghez kötődő hívások kiszűrésének érdekében csak azokat a kapcsolatokat vettük figyelembe, amelyeknél mindkét irányban volt hívás.

A súlyozott hálózatok fontos jellemzői a csúcsok *fokszám- és súlyerősség-eloszlása*. (Egy adott csúcs fokszáma a kapcsolatainak száma, míg erőssége a hozzá kapcsolódó élek súlyainak összege.) A vizsgált telefonhívási hálózat esetén mindkét eloszlás lassan cseng le [2, 3]. Ez arra utal, hogy ugyan csekély számban, de vannak a hálózatban olyan csúcsok, amelyek kiugróan sok kapcsolattal, illetve nagy erősséggel rendelkeznek.

A fokszámeloszlás és a súlyerősség-eloszlás hasonló viselkedése felveti azt a kérdést, hogy mennyire korrelált ez a két mennyiség. Amennyiben semmilyen korreláció nem lenne egy adott csúcshoz kapcsolódó élek súlya és a csúcs fokszáma között, akkor a csúcs erősségét jól becsülhetnénk fokszámának és a teljes hálózatban mért átlagos élsúly szorzataként. Ezzel szemben a tapasztalat azt mutatta, hogy a csúcsok erőssége a fokszámmal a lineárisnál lassabban nő, ami azt jelenti, hogy aki sok ismerőssel folytat telefonbeszélgetéseket, annak általában kevesebb ideje marad egy-egy emberre [2, 3].

A fentiek alapján természetesen adódik az a kérdés, hogy mi határozza meg az élek erősségét egy társas kapcsolati hálózatban? *M. Granovetter*, a szociális hálózatok egyik legnevesebb amerikai kutatója a következő érdekes hipotézissel állt elő még a hetvenes években [4]:

- két ember kapcsolatának erőssége az egymáshoz szentelt idő, anyagi ráfordítás, érzelmi intenzitás, bizalom és kölcsönös segítség/szívesség kombinációja,
- és ez monoton növekvő függvénye a két ember közös ismerősei relatív hányadának a kettejük összes ismerőiséhez viszonyítva. Ez utóbbi mennyiséget a két személy *relatív élátfedésének* nevezzük.



1. ábra. Perkolációs vizsgálatok. a) egy kis részlet a hálózatból, b) ugyanez a részgráf az élek 80%-ának eltávolítása után, a gyengébb élektől az erősebbek felé haladva ($\rho = 0,8$, szürke görbe), valamint c) az erősebbek felől a gyengébbek felé haladva ($\rho = 0,8$, fekete görbe). A második, harmadik és negyedik oszlopban az élsúly, a relatív élátfedés és a közösség szerinti kialakított élsorrendhez kapcsolódó eredmények vannak feltüntetve; a fekete görbék esetén a nagyobb értékektől a kisebbek felé halad az éltávolítás, míg a szürke görbékénél fordítva. A vízszintes tengely minden ábrán az eltávolított élhányadnak, ρ -nak felel meg. A d), e), f) és g) sorokban a függőleges tengelyen rendre az R_{cc} tendparaméter, a $\sum_i s_i^2 n_i / N$ szuszceptibilitás (N a csúcsok száma), az $\langle l \rangle$ átlagos távolság, illetve a $\langle C \rangle$ átlagos klaszterezettségi együttható látható.

A tanulmányozott mobilhívási hálózat ideális terepet nyújt ezen hipotézis nagy skálájú vizsgálatára. Az élek súlya (a hívások ideje vagy száma két felhasználó között) ugyan nem ad lehetőséget például a felhasználók közötti bizalom felmérésére olyan módon mint egy kérdőíves szociometria, de tartalmazza a Granovetter-féle erősség néhány elemét (idő-, illetve anyagi ráfordítás), és így várhatóan jól tükrözi a kapcsolatok intenzitását, erősségét; a mintában szereplő csúcsok rendkívüli nagy száma pedig jó statisztikát biztosít. Az eredmények egy, a kötések 95%-áig határozottan emelkedő relatív átfedési görbét mutattak az élsúly függvényében [2, 3], azaz a hipotézis beigazolódt.

Ezen eredmény révén igen szemléletes, kvalitatív képet kaphatunk a hálózat felépítéséről. Az erős élek olyan személyeket kötnek össze, akiknek viszonylag sok a közös ismerőse, így várhatóan egy közösséghez (baráti kör, család stb.) tartoznak. Ezzel szemben a gyenge élek olyan csúcsokat kötnek össze, amelyeknek kicsi a relatív élátfedése, ezért várhatóan más-más közösségek tagjai. Másként megfogalmazva az erős élek közösségek, csoportosulások összetartását jellemzik, míg a gyenge élek a csoportokat, közösségeket kapcsolják össze. Az erős és gyenge élek szerepének illetően szétválása Granovetter másik híres hipotézise, a *gyengeél-hipotézis* [4].

A fenti hipotézist igazolják a hálózat *perkolációs tulajdonságaival* kapcsolatos vizsgálatok is [2, 3]. A csúcsok 84%-a egy összefüggő, óriás komponensből alkotja a hálózatban (ezen belül bármelyik csúcsból el lehet jutni bármely másikkba az éleken keresztül), ám a hálózat éleit fokozatosan eltávolítva, egy ponton ez a komponens szétesik sok apró izolált csoportra (részgráfra),

amelyek mérete már elhanyagolható a teljes hálózatéhoz viszonyítva. Ez az átalakulás megfelel a statisztikus fizikában tanulmányozott perkoláció jelenségének. Az óriás komponens eltűnése érdekes módon máshol következik be attól függően, hogy az éleket milyen sorrendben távolítjuk el. Egyik lehetőség az élsúly szerinti emelkedő, illetve ereszkedő sorrend, vagy az él által összekapcsolt csúcspár relatív éltárfedése szerinti emelkedő, illetve ereszkedő sorrend. Egy további lehetőséget nyújt a sorrend kialakítására az élek *köztessege* is. Egy él köztessege a hálózatban található összes lehetséges csúcspárt összekötő legrövidebb utak közül azoknak a száma, amelyek rajta áthaladnak.

Az átalakulás kontrollparamétere minden esetben az eltávolított élek ρ hányada, a rendparaméter pedig a legnagyobb összefüggő komponens (largest connected component) R_{LCC} relatív mérete az eredeti állapothoz képest. Definiálható egy, a szuszceptibilitással analóg mennyiség is,

$$S = \sum_s s^2 n_s,$$

ahol n_s az s méretű komponensek számát jelöli; ennek a mennyiségnek éles csúcsa van az átalakulás kritikus pontjánál. A vizsgálat eredményeit az 1. *ábra* mutatja be. Az első oszlopban egy kisebb részgráf látható eredeti állapotában, valamint az élek 80%-ának eltávolítása után, egyszer a kis élsúlytól a nagyobb felé haladva, egyszer meg ellentétes sorrendben. A másik három oszlop a háromféle (élsúly, relatív éltárfedés, köztessege alapján kialakított) éltávolítási-sorrend mellett kapott eredményeket mutatja be. A fekete színű görbéknel a hálózat ritkítása a nagy értékkel rendelkező élektől halad a kisebb értékűek felé, a szürke görbéknel fordítva. A rendparaméter és a szuszceptibilitás mellett a csúcsok $\langle l \rangle$ átlagos távolsága (minden lehetséges csúcspár közötti legrövidebb utak átlagos hossza) és a $\langle C \rangle$ átlagos klaszterezettségi együttható is fel van tüntetve. (Az i -ik csúcshoz tartozó C_i az i -ik csúcs szomszédai közt lévő kapcsolatok száma osztva a szomszédok között lehetséges kapcsolatok maximális számával.) A görbék alapján egy fázisátalakulás történik az él eltávolítás során, amennyiben kis élsúlyoktól haladunk a nagyok felé, vagy a kis relatív éltárfedésektől a nagyok felé, illetve a nagy köztessegek felől a kicsik felé. (Egyrészt a rendparaméter egy ponton lecsökken gyakorlatilag nullára, másrészt ugyanitt egy éles csúcs jelenik meg a szuszceptibilitásban.) Ezzel szemben nincs fázisátalakulás, ha megfordítjuk az élkivétel sorrendjét [2, 3].

A csúcsok átlagos távolsága intenzívebben nő, ha a kis súlyú, kis relatív éltárfedésű, nagy köztesességű élektől kezdjük az élek eltávolítását (1. *ábra*, f) sor). Ez a jelenség arra a hídszerepre világít rá, amit ezek az élek betöltenek, biztosítva a sűrűbb, nagyobb élsúlyú tartományok közti gyors összeköttetéseket [2, 3].

A klaszterezettségi együttható nagy olyan felhasználók esetén, akiknek ismerősei egymásnak is ismerősei, illetve kicsi ellenkező esetben. Ennek fényében érthető, hogy $\langle C \rangle$ érzékenyen reagál arra, ha a nagy

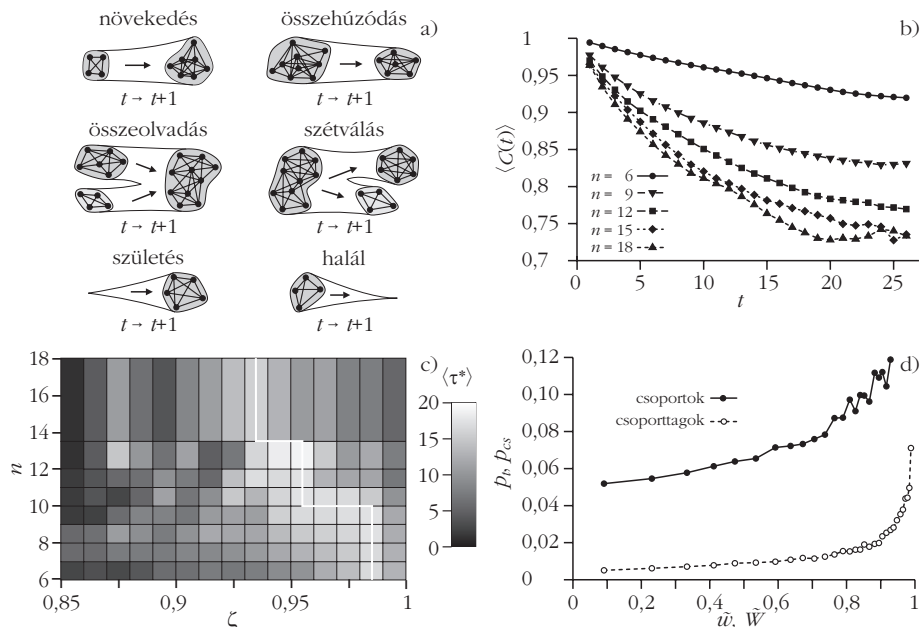
súlyú, nagy relatív éltárfedésű, kis köztesességű élek felől kezdjük a hálózat ritkítását (1. *ábra*, g) sor), hiszen ezek az élek várhatóan sok háromszögben vannak benne, és eltávolításuk drasztikusan csökkenti $\langle C \rangle$ -t. Ezzel szemben például a kis relatív éltárfedéshez tartozó élek (a sűrű tartományokat összekötő „hidak”) eltávolítása növeli az átlagos klaszterezettségi együtthatót [2, 3].

Összegezve a perkolációs vizsgálatok eredményeit azt mondhatjuk, hogy a gyengeél-hipotézis beigazolódott nagy skálán is. Az eredeti sejtésen felül az is kiderült, hogy az élek két eltérő szerepe, (közösségek belső összetartása, illetve eltérő közösségek közötti hidak létrehozása), nemcsak élsúly szerint választható el egymástól, hanem legalább olyan jól a relatív éltárfedés, illetve a köztessege alapján is. Természetesen a hálózati szerkezetnek mélyreható következményei vannak az információterjedésre [2, 3].

Koncentráljunk most a már említett sűrű, erős élekkel összetartott *csoportosulásokra*, *közösségekre*. Ezek a való életben egy-egy baráti körnek, családnak, munkahelyi közösségnek, vagy egyéb olyan társaságnak felelnek meg, amelynek tagjai jól ismerik, és ennek megfelelően gyakran hívják egymást. A hálózati csoportosulások nagyon fontos szerkezeti egységeket alkotnak más, például biológiai hálózatokban is, és egyelőre nincs egy egységesen elfogadott, általános definíciójuk. A vizsgált mobilhívási hálózat esetén a *klikk perkolációs módszerrel* (clique percolation method, CPM) történt a csoportosulások azonosítása [5]. Ez a módszer k darab csúcsból álló, teljesen összekötött részgráfokat (k -klikkeket) használ a csoportosulások felépítéséhez. Két k -klikket akkor mondunk szomszédosnak, ha csak egyetlen csúcsban különböznek egymástól, azaz $k-1$ csúcsuk közös. Egy CPM segítségével kapott csoportosulás olyan k -klikkekből épül fel, amelyek közül bármelyikből eljuthatunk bármely másikba szomszédos k -klikkeken keresztül.

A CPM segítségével feltárt csoportosulásokon belül az átlagos élsúly szignifikánsan magasabb értéket vesz fel, mint a csoportok között húzódo éleken. Emellett a felhasználókról rendelkezésre álló (igen limitált) egyéb információk is alátámasztják a csoportosulások hitelességét: a felhasználók kora, illetve lakóhelyük irányítószáma egy-egy csoportosuláson belül sokkal jobban hasonlít egymásra, mint egy ugyanakkora, a teljes hálózatból véletlenszerűen kiválasztott felhasználókból álló csoport esetén.

Mint említettük, a hívási adatok kéthetes időszakokra összegezve álltak rendelkezésre, ezért lehetőség nyílt a *csoportosulások időfejlődésének* tanulmányozására [5]. Az idő előrehaladtával egy adott csoport összetétele új tagok csatlakozásával, illetve régi tagok kiválásával változhat, a csoport mérete nőhet vagy csökkenhet, csoportosulások összeolvadhatnak vagy szétszakadhatnak, teljesen új csoportok jöhetnek létre, és régi-ek tűnhetnek el. Ezeket az alapvető folyamatokat szemlélteti a 2. *ábra*. Egy csoportosulás „életútját” a kéthetes időközökkel rögzített pillanatképekből kell fel-fűzni, azaz a szomszédos időlépéseknél talált csoporto-



2. ábra. Csoporthozzácsatlakozásdinamika. a) Alapvető folyamatok a csoporthozzácsatlakozások időfejlődésében. b) A csoporthozzácsatlakozások átlagos autokorrelációs függvénye. c) A csoporthozzácsatlakozások $\langle \tau^* \rangle$ várható élettartama (színkódolva), a ζ stacionaritás és az n csoportméret függvényében. d) A csoportelhagyás p_r valószínűsége a \tilde{w} függvényében, valamint a csoportszétválás p_{cs} valószínűsége a \tilde{W} függvényében.

sulásokat egymáshoz kell illeszteni, hogy lássuk melyik csoport mivé alakul az adott időlépés alatt.

A csoportösszetétel időbeli változását a $C(t)$ autokorrelációs függvény segítségével lehet egyszerűen nyomon követni, amely a csoporthozzácsatlakozás kezdeti és a t időpontban tapasztalt tagösszetételeinek relatív átfedésével egyenlő. (A relatív átfedés – a korábban tárgyalt relatív élettartamhoz hasonlóan – a közös tagok számának és az összes előforduló tagok számának hányadosa.) Amennyiben a csoporthozzácsatlakozás időben állandó, vagy csak egy-két tagja változik, akkor $C(t)$ egyhez közeli értéket vesz fel, míg egy gyorsan változó csoport esetén hamar a nullához közelít. A 2.b ábra az autokorrelációs függvény átlagos viselkedését mutatja különböző csoporthozzácsatlakozás méretek esetén. Amint látható, minél nagyobb egy csoporthozzácsatlakozás mérete, $\langle C(t) \rangle$ annál gyorsabban cseng le. Ez azt jelenti, hogy a nagyobb csoporthozzácsatlakozások relatíve gyorsabban változnak, mint a kicsik [5].

A csoporthozzácsatlakozások változékonyságának (vagy időálló voltának) jellemzésére be lehet vezetni a stacionaritás ζ mennyiségét, amely egyszerűen a csoporthozzácsatlakozás szomszédos időlépésekben tapasztalt tagösszetételeinek relatív átfedése, átlagolva a csoporthozzácsatlakozás életútján. Az időben nagyon stabil, keveset változó csoporthozzácsatlakozások egyhez közeli ζ értékkel rendelkeznek, míg a gyakran változók alacsonyabbal, hiszen a definícióból következően egy időlépés alatt a tagok $1 - \zeta$ hányada cserélődik ki átlagosan. A stacionaritás, valamint az n csoporthozzácsatlakozás méret nemtriviális összefüggésben van a csoporthozzácsatlakozás várható $\langle \tau \rangle$ élettartamával (azon időlépések száma, amelyek alatt a csoporthozzácsatlakozás jelen van a hálózatban). Az élettartam tekinthető a körülményeknek való megfelelés mértékének: a jól megfelelő csoporthozzácsatlakozások sokáig élnek,

a körülményekhez nem illeszkedő csoportok hamar eltűnnek. A 2.c ábra $\langle \tau \rangle$ -t mutatja színkódolás segítségével ζ és n függvényében. Érdekes módon az optimális stacionaritásérték – ami mellett a legnagyobb az átlagos élettartam – alacsonyabb értékek felé tolódik el a csoporthozzácsatlakozás növekvő méretével. (Ugyanezt a viselkedést mutatták egy másik, tudományos társszerzőségi kapcsolatból álló hálózat csoporthozzácsatlakozásai is [5].) Ez azt jelenti, hogy a kis csoporthozzácsatlakozások várhatóan akkor maradnak fenn sokáig, ha nem változik az összetételük, tagjaik nagyon szorosan ragaszkodnak egymáshoz és nem engednek be új tagokat. Ezzel szemben a nagyméretű csoporthozzácsatlakozásoknak állandóan meg kell újulniuk a fennmaradás-

hoz, ezért optimális esetben összetételük gyorsan változik új tagok felvételével és régiak távozásával. Ez a fajta viselkedés például nagyobb munkahelyi közösségekre, sportklubokra jellemző, ahol rövid idő alatt akár a teljes tagösszetétel lecserélődhet, ennek ellenére az adott cég vagy sportklub tovább él.

Korábban bemutattuk, hogy az élsúlyok alapján miként lehet egy-egy él hálózatban betöltött szerepére következtetni. Az élsúlyok a csoporthozzácsatlakozások tekintetében is hordoznak fontos információkat, amelyek alapján megjósolható, hogy egy adott tag milyen valószínűséggel hagyja ott a csoporthozzácsatlakozást, illetve, hogy maga a csoporthozzácsatlakozás milyen valószínűséggel szűnik meg a következő időlépésben [5]. Ehhez célszerű definiálni a $\tilde{w} = w_{ki} / (w_{ki} + w_{csop})$ mennyiséget az egyes csoporttagokra vonatkozóan, ahol w_{ki} az adott tag csoporton kívüli kapcsolatainak összsúlya, míg w_{csop} a csoport többi tagjához kötődő élek összsúlya. Hasonló módon lehet a teljes csoportra vonatkozóan megadni a $\tilde{W} = W_{ki} / (W_{ki} + W_{csop})$ mennyiséget, ahol W_{ki} a csoportból a csoporton kívülre menő élek összsúlya, valamint W_{csop} a csoporton belüli élek összsúlya. A 2.d ábrán a \tilde{w} , illetve a \tilde{W} függvényében mutatjuk annak a p_r és p_{cs} átlagos valószínűségét, hogy a következő időlépésben az adott tag kilép a csoportból, illetve az adott csoport felbomlik. Mindkét esetben, a természetes várakozásnak megfelelően (miszerint minél nagyobb a külső élek relatív súlya, annál valószínűbb a kilépés vagy a felbomlás), a görbék emelkedő tendenciát mutatnak.

Összefoglalva a legfontosabb eredményeket elmondhatjuk, hogy a modern információs technológiának köszönhetően megnyílt az út a nagy skálájú társas kapcsolati hálózatok statisztikus vizsgálata előtt. A tárgyalt több millió felhasználót tartalmazó mobilhívási

hálózat analízise igazolta a szociális hálózatok élsúlyai-
ra, illetve a gyenge élek szerepére vonatkozó hipotéziseket,
feltárta az élsúlyok, valamint a hálózat lokális és globális
szerkezete közötti összefüggést. A hálózatban található
sűrű csoportosulások időfejlődésénél érdekes eltérés volt
tapasztalható a kis és nagy méretű csoportosulások
hosszútávú túlélési stratégiájában. Ezek az eredmények
fontos kiindulópontot szolgáltatnak egyfelől a nagy
méretű társas kapcsolati hálózatok további vizsgálataihoz,
másfelől az ilyen típusú hálózatok modellezéséhez,
elméleti leírásához.

Irodalom

1. Barabási A.-L.: *Behálózva*. Magyar Könyvklub, 2003.
2. J.-P. Onnela, J. Saramäki, J. Hyvönen, G. Szabó, M. A. de Menezes, K. Kaski, A.-L. Barabási, J. Kertész: Analysis of a large-scale weighted network of one-to-one human communication. *New Journal of Physics* 9 (2007) 179.
3. J.-P. Onnela, J. Saramäki, J. Hyvönen, G. Szabó, D. Lazer, K. Kaski, J. Kertész, A.-L. Barabási: Structure and tie strengths in mobile communication networks. *PNAS* 104 (2007) 7332.
4. M. Granovetter: The strength of weak ties. *Am. J. Sociol.* 78 (1973) 1360.
5. G. Palla, A.-L. Barabási, T. Vicsek: Quantifying social group evolution. *Nature* 446 (2007) 664.

FRAGMENTÁCIÓS FOLYAMATOK UNIVERZALITÁSI OSZTÁLYAI

Kun Ferenc

Debreceni Egyetem, Elméleti Fizikai Tanszék

Meglepő univerzalitás

Hétköznapi tapasztalat, hogy ha elejtünk egy porcelántányért, az a konyha talajához csapódva darabokra törik. Általánosan igaz, hogy egy szilárd test széttörése, fragmentációja akkor következik be, ha a testtel rövid idő alatt nagy mennyiségű energiát közlünk. Ez elérhető például úgy, hogy a testre ütést mérünk egy kalapáccsal, lövedéket lövünk bele, robbanóanyaggal felrobbantjuk, vagy ha a testet ütköztetjük egy másikkal (például a talajjal). Az energiaközlés következtében egy lökéshullám jön létre, amely nagyszámú repedést hagy maga után, s e repedések mentén a test darabokra esik szét. Fragmentációs jelenségek a természetben igen széles méretskálán fordulnak elő: a Naprendszer aszteroidáinak ütközésétől a mikrovilág hosszú láncmolekuláinak töredezéséig mindenütt találkozhatunk velük. A közbenső méretskálán számos ipari alkalmazás (bányászat, nyersanyag-feldolgozás) és geológiai példa (vulkánkitörés) említhető.

Szilárd testek széttörése egy egyensúlytól távoli folyamat, amely rendkívül gyorsan játszódik le, így a fragmentációhoz vezető mikroszkopikus törési események kísérletileg nehezen hozzáférhetőek, a megfigyelések általában néhány mennyiségnek a folyamat végállapotában előálló eloszlásaira vonatkoznak. Már egy porcelántányér vagy egy üvegpohár elejtésekor is észrevehető, hogy a legtöbb darab kis méretű, s a méretük növekedésével a keletkezett fragmensek darabszáma csökken. Az elmúlt évtizedekben a laboratóriumi kísérletek arra a meglepő eredményre vezettek, hogy az egyes fragmensek méretének vagy tömegének gyakoriságát jellemző méreteloszlás, illetve tömegeloszlás hatványfüggvény szerint csökken, függetlenül az anyagi minőségtől, az energiabetáplálás módjától és a releváns mikroszkopikus kölcsönhatásoktól. Így például a nehéz atommagok ütközésekor keletkező kisebb atommagok töltéseloszlása ugyanúgy hatványfüggvény-viselkedést mutat, mint a

bányában robbantott széndarabok tömegének, vagy a Naprendszerben keringő, számos ütközést elszenvedett aszteroidák átmérőjének eloszlása [1].

Szilárd testek fragmentációjának beható vizsgálata további érdekes eredményekkel szolgált. Kimutatták, hogy a fragmensméret-eloszlás hatványfüggvényalakot vesz fel, ha a széttört test kellően rendezetlen mikroszkopikus tulajdonságokkal rendelkezik (például beton, üveg, kerámia, gránit, bazalt, ...) és rideg törést mutat, azaz lineárisan rugalmasan viselkedik az eltörésig. Ilyenkor az eloszlás csökkenésének gyorságát jellemző τ hatványkitevő értékét elsősorban a test d dimenziója határozza meg, amelynek alapján a fragmentációs folyamatokat három univerzalitási osztályba lehet sorolni: egy dimenzióban, például vékony, hosszú üvegrudak törésekor, az exponens értékét

1. ábra. Fragmentációs folyamat során keletkezett darabok méretének eloszlása három különböző anyagra, amelyeket különböző módon törtek össze: egy bazaltkockába laboratóriumban lövedéket lőttek, a szén bányában robbantották, míg a gránit egy föld alatti atomrobbantásban lett szétzúzva [1]. A kétszer logaritmikus skálán kapott egyenesek hatványfüggvény-viselkedést jeleznek, amelyek kitevője (az egyenesek meredeksége) is közel azonos.

