

ez csak egyike az elmélet hasonló jellegű pontos, megfigyelhető következményeinek. Mi felel meg ennek a valóban tudományos következtetésnek az erős antropikus elvben? Az, hogy ha a világ intelligens tervezettség eredménye (ez a **H**), akkor a kozmosz megfigyelt alapvető paramétereinek lényegében pontosan olyanoknak kell lenniük, mint amilyenek (ez a **B**). A két kijelentés formai azonossága ellenére nehéz megfelelő szavakat találni a minőségük közötti csillagászati távolság kifejezésére – az antropikus elv rovására.

Végül visszatérek Bánó Miklós szemrehányására, amiért „eltitkoltam”, hogy nemcsak az intelligens tervezettségben, hanem a természettudományos hipotézisekben is már bizonyos mértékig hinnünk kell ahhoz, hogy a bizonyítékaikat az igazolásuknak tekinthessük. Az „elhallgatásra” két okom is volt. Az első az, hogy csak az antropikus elv képviselői próbálják elhitetni,

hogy a Világegyetem megfigyelhető paramétereiből teljes bizonyossággal következik dédelgetett hipotézisünk, a világ tervezettsége. A természettudományok művelői ilyesmit felelősen sohasem állíthatnak a saját hipotéziseikről, mert különben nyilvánvaló ellentmondásba kerülnének a tudomány fejlődésének közismert tényeivel (a tudományos kutatással együttjáró pszichológiai nyomás azonban a praktizáló kutatót hajlamosíthatja arra, hogy abszolutizálja azokat a fontosabb hipotéziseket, amelyek a tudományterületén megszabják a kutatások fő irányát). A másik ok az volt, hogy féltem, ha nem korlátoznám magam a lényegre, ezzel szükségtelenül tompítanám a mondanivalóm élet. Reméltem, hogy ha a cikkem érdeklődést kelt, lesz még alkalmam írni a probléma többi aspektusáról is. Bánó Miklós lényegbevágó észrevétele erre adott most lehetőséget.

Hraskó Péter

A FIZIKA TANÍTÁSA

HOGYAN ÉLHETETT ERDŐS PÁL 2,5 MILLIÁRD ÉVET?

Simon Péter

Leőwey Klára Gimnázium, Pécs

Erdős Pál (1913–1996), a világhírű magyar matematikus a nyolcvanadik születésnapján adott tévéinterjúban közölte, hogy ő maga 2,5 milliárd éves. E meglepő kijelentés bizonyítása igen röviden a következő: „Amikor kicsi voltam, akkor a Föld 2 milliárd éves volt. Most [1993-ban] 4,5 milliárd éves.” Ez a szokatlan érvelés adta az ötletet, hogy áttekintsem, az egyes korokban mit is gondoltak a Föld koráról.

A Biblia szerint

A zsidó-keresztény kultúrkörben a világ teremtett, amelyből óhatatlanul következik, hogy bolygónknak története és életkora is van. Az európai gondolkodásban sok mindenhez a Biblia adja a sorvezetőt. Leginkább olyan kérdésekben, amelyekre a tudomány sokáig nem tudott egzakt, minden gondolkodó által elfogadható választ adni. *Leonardo da Vinci* a tengerparttól több mint 200 km-re tengeri halak kövületeit találta. A 15. században korrekt válasznak tűnt, hogy a halak az özönvíz idején kerültek ilyen messzire a tengerparttól. Ezt a magyarázatot széles körben elfogadták, annak ellenére, hogy *Alhazan*, az arab orvos-tudós már a 11. században azt feltételezte, hogy a halak kövületei a tengerek alján a kőzetek kialakulá-

sakor keletkeztek, s a földmozgások juttatták őket a vizektől távol a szárazföld belsejébe. Hasonló feltételezést a nyugati tudományban csak *Nicolaus Steno* fogalmazott meg a 17. század második felében. Steno, egy dán orvos dolgozta ki a rétegtan alapjait.

A Biblia megkérdőjelezhetetlen tekintélyének köszönhetően a Föld korát először a Biblia alapján próbálták megállapítani. *James Ussher* ír érsek az Írásban előforduló generációkat vette sorra, s az első emberpár megjelenésének idejét i. e. 4000-re teszi. Volt nála merészebb ember is. *John Lightfoot*, a cambridge-i egyetem teológia-professzora 1654-ben kijelentette, hogy a teremtés i. e. 4004. október 26-án délelőtt 9 órakor történt. A pontos időponthoz hibahatárt sem adott meg. A földtudomány ezen az adaton természetesen már rég túllépett. Ennek a becslésnek viszont kultúrtörténeti jelentősége van, a Biblia által leírt történet hosszát adja meg.

A földtudomány születése

Végzettségük szerint jogászok, orvosok foglalkoztak először földtudománnyal. Az ő hobbitevékenységük alapozta meg a geológiát. Egyikük, *James Hutton* (orvos, 1726–1797) a saját birtokán fedezte fel, hogy a felszíntől lefelé haladva a kőzet réteges szerkezetű. Feltételezte, hogy ezeket a rétegeket a különböző korokban keletkező üledékes kőzetek alkotják, és

A pécsi Leőwey Klára Gimnáziumban 2008. november 6-án, a Magyar Tudomány Napján tartott előadás írott változata.

nyilván a mélyebben lévő réteg keletkezett régebben. Az is feltűnt neki, hogy a rómaiak által Britanniában épített utak mennyire masszívak, a köveken a mállás nyomai sem látszanak. Ő nem akart becslést adni a Föld korára, de azt kijelentette, hogy az minden bizonytalansággal jóval több, mint néhány ezer év.

Sir Charles Lyell (jogász, 1797–1875) a kontinensen tett utazásai során figyelte meg a földtani formák változatosságát. 1830 és 1833 között írt egy háromkötetes munkát *A geológia elvei* címmel, ami alapkötetnek tekinthető a geológiában. Ebben a műben kijelenti, hogy az ismertté vált kőületek alapján nem kizárt, hogy a Föld kora meghaladja a százmillió évet is. Ezen a kijelentésen az egyház természetesen megbotránkozott.

Charles Darwin ismerte Lyell elképzelését a Föld korára vonatkozóan. A Beagle fedélzetén gyakran olvasgatta ezt a művet is. Örült ennek a jóslatnak, hisz a *Fajok eredete* (1859) című híres könyvében felvázolt evolúciós elmélet azt feltételezi, hogy az élővilág fejlődéséhez igen hosszú időre volt szükség. Két tudományág – a geológia és a biológia – egyetértett a Föld korát illetően. Korrekt bizonyítás nélkül azt mondták, hogy a Föld több mint 100 millió éves. És beleszóltak a vitákba a fizikusok.

Termodinamikai megfontolások

Először a termodinamika felől közelítettek a kérdéshez a fizikusok. Isaac Newton az 1687-ben megjelent *Principiában* adott egy becslést, amely szerint a Föld izzó állapotából körülbelül 50 ezer év alatt hűlhetett le. Newton főműve a mechanika alaptörvényeiről, a mozgást leíró törvényekről vált ismertté. A Földre alkalmazott termodinamikai modell kevés figyelmet kapott.

Buffon gróf (George-Louis Leclerc, 1707–1788) a problémán való gondolkodáson túl már kísérletet is végzett. Párizs mellett nagy átmérőjű agyag-, illetve vasgömböket hevített, s azok hűlését tanulmányozta. Ezen vizsgálatok után jelentette ki, hogy a Föld kora 75 ezer év.

A Föld kora nyilván kapcsolódik a Naphoz. A Napot a 19. század elején égő szénegmbnek vélték, amely sugárzása révén veszíti el energiáját. A napsugárzás teljesítménysűrűsége a Földön 1400 W/m^2 (napállandó). Tétélezzük fel, hogy ez az intenzitás a jövőben sem csökken. A Nap tömege $2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, távolsága a Földtől $1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$, a szén fűtőértéke 30 MJ/kg . Mennyi ideig sütné még a Nap, ha valóban égő szénből állna? Ezzel a kérdéssel 200 éve még komoly tudósok foglalkoztak, ma már egy ügyes középiskolásnak is megoldható feladat. (*KöMaL* 2002/03, P. 3518.)

Az égő szénegmb hipotézise szerint a Nap rendelkezésre álló teljes energiája:

$$E = L_{\text{szén}} \cdot m = 3 \cdot 10^7 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \cdot 2 \cdot 10^{30} \text{ kg} = 6 \cdot 10^{37} \text{ J}$$

lenne. A napsugárzás intenzitását a Nap–Föld távolsággal egyenlő sugarú gömb felszínével megszorozva

megkapjuk a jelenlegi ($T_0 = 6000 \text{ K}$ hőmérsékletű) Nap teljes sugárzási teljesítményvesztését:

$$P_0 = I \cdot A = 1400 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 4 \cdot (1,5 \cdot 10^{11} \text{ m})^2 \cdot \pi = 4 \cdot 10^{26} \text{ W}.$$

A teljes energia kisugárzásához szükséges idő:

$$t = \frac{E}{P_0} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ s} \approx 4800 \text{ év}.$$

Ha elhanyagoljuk a már kiégett, de még forró (izzásban lévő) parázs kihűléséhez szükséges időt, akkor csupán ilyen rövid ideig, nem egészen ötezer évig „sütné” a Nap.

Ehhez közeli szám szerepel *Madách* drámájában, *Az ember tragédiája* (1860) 13. színében (Lucifer):

„S feledted-é már a tudós szavát,
Ki felszámolta, hogy négy ezredévre
Világod megfagy – a küzdés eláll?”

A Napot egy 6000 K hőmérsékletű, homogén izzó gázgömbnek is tekinthetjük, amely H_2 molekulákból áll és a hősugárzás során lassan hűl. Most ismét felhasználjuk, hogy a napsugárzás intenzitása a Földünk távolságában jelenleg 1400 W/m^2 . Becsüljük meg, mennyi idő múlva sötétülne el a Nap, vagyis csökkenne a hőmérséklete körülbelül 1000 K -re? (*KöMaL* 2002/04, P. 3529.)

A Nap sugárzásának jelenlegi teljesítménye ismét:

$$P_0 = I \cdot A = 1400 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 4 \cdot (1,5 \cdot 10^{11} \text{ m})^2 \cdot \pi = 4 \cdot 10^{26} \text{ W}.$$

Ha az m tömegű Napot T hőmérsékletű hidrogéngáznak tekintjük, és belső energiáját az ideális gázokra érvényes $E = c_v \cdot m \cdot T$ képletből számítjuk, valamint a fajhőt a földi hőmérsékleten érvényes $c_v = 10^4 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ értékkel közelítjük:

$$E_{(T)} \approx 10^4 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 2 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot T = 2 \cdot 10^{34} \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot T = K \cdot T.$$

Ha a sugárzás erőssége nem csökkenne, akkor a $\Delta T = 5000 \text{ K}$ hőmérséklet-változáshoz szükséges idő a $P \cdot \Delta t = K \cdot \Delta T$ alapján:

$$\Delta t = \frac{K \cdot \Delta T}{P} = \frac{2 \cdot 10^{34} \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 5000 \text{ K}}{4 \cdot 10^{26} \text{ W}} = 2,5 \cdot 10^{11} \text{ s} \approx 8000 \text{ év}.$$

Ez a meglepően kicsiny érték a meglehetősen durva közelítésnek köszönhető. Vegyük figyelembe a teljesítmény hőmérsékletfüggését!

Amennyiben a Nap hőmérséklete csökken, akkor a Stefan–Boltzmann sugárzási törvénynek megfelelően csökken a teljesítménye is:

$$P_{(T)} = P_0 \cdot \left(\frac{T}{T_0} \right)^4.$$

A hűlés időtartamának meghatározásához integrálszámítást kell használnunk:

$$\begin{aligned} t &= \int dt = - \int_{T_0}^{T_1} \frac{K}{P} dT = - \frac{K \cdot T_0^4}{P_0} \cdot \int_{T_0}^{T_1} \frac{1}{T^4} dT = \\ &= \frac{K \cdot T_0}{3 \cdot P_0} \cdot \left(\frac{T_0^3}{T_1^3} - 1 \right). \end{aligned}$$

A t értéke $T_1 = 1000$ K-nél körülbelül 700 000 év.

Ez azt jelenti, hogy ha a Nap az izzó gázgömb energiáját sugározná ki, akkor még 700 ezer évig sütné.

A $T_1 \rightarrow \infty$ határérték képzésével azt az időtartamot is megkaphatjuk, ami alatt a tetszőleges nagy hőmérsékletű Nap a jelenlegi $T_0 = 6000$ K hőmérsékletűre hűl. A megdöbbenő

$$t = - \frac{K \cdot T_0}{3 \cdot P_0}$$

érték kevesebb, mint 4 ezer év. Tehát ezen modell szerint a Nap kora kevesebb mint 4 ezer év. Ez alapján az ószövetségi történet közben keletkezett volna a Napunk. Ez nyilván ellentmond a tapasztalatnak

Lord Kelvin (William Thomson, 1824–1907) a 19. század nagy brit fizikusa más oldalról közelítette meg ezt a kérdést. Szerinte a Nap által kibocsátott energia a gravitációs összehúzódásból ered. A csillag teljes energiája megegyezik az öt alkotó részecskék $E_{\text{belső}}$ kinetikus energiájának összegével, valamint a részecskék E_{pot} gravitációs potenciális energiáinak összegével: $E = E_{\text{belső}} + E_{\text{pot}}$. A viriál-tétel értelmében egy zárt rendszer kinetikus energiája a gravitációs potenciális energia nagyságának felével egyenlő. Vegyük figyelembe még azt is, hogy a Napot alkotó gáz adiabatikus állapotváltozást szenved. Így a teljes energiájára a következő adódik:

$$E = - \frac{3}{4} \cdot \gamma \cdot \frac{M^2}{R}.$$

Amennyiben a gázgömb összehúzódik, a teljes energiája csökken. A Nap teljes energiájának a megváltozása biztosítja a Nap energiatermelését:

$$P = - \frac{dE}{dt} = - \frac{3}{4} \cdot \gamma \cdot \frac{M^2}{R^2} \cdot \frac{dR}{dt},$$

ahonnan

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dt} = - \frac{4}{3} \cdot \frac{P \cdot R}{\gamma \cdot M^2}$$

következik. A Nap adatait behelyettesítve:

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dt} = 4 \cdot 10^{-8} \frac{1}{\text{év}}.$$

A fenti egyenletet átrendezve, valamint a Nap teljes sugarára integrálva megkapjuk azt az időtartamot, amennyi alatt a Nap elsötétül:

$$t = \int dt = \frac{1}{4 \cdot 10^{-8} \frac{1}{\text{év}}} \cdot \frac{1}{R} \cdot \int dR = 2,5 \cdot 10^7 \text{ év}.$$

Tehát, ha a Nap a gravitációs összehúzódásból nyerné energiáját, akkor a jelenlegi sugárzás mellett 25 millió év alatt sötétülne el. Lord Kelvinnek és a fizika egzaktságának olyan nagy tekintélye volt, hogy 1860-ban Darwin visszavonta a *Fajok eredetében* írt feltételezést, hisz szerinte a földi élet evolúciójához több mint 100 millió évre volt szükség.

Thomas C. Chamberlin (amerikai geológus, 1843–1928) 1899-ben fogalmazta meg: „Ha a fizika a Föld korára ilyen rövid időt ad meg, akkor a fizikának nincs igazsága.”

Megoldás: radioaktív kormeghatározás

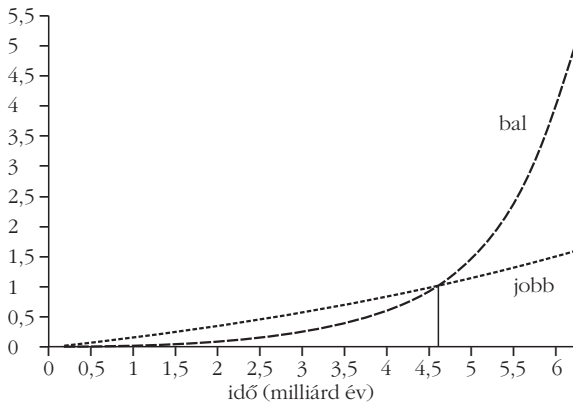
A geológusok és a fizikusok időskálája közötti nagy különbségnek a radioaktivitás felfedezése vetett véget. *Henri Becquerel* (1852–1908) francia fizikus uránnal végzett kísérletei során 1896-ban felfedezte a radioaktivitást. *Marie és Pierre Curie* 1903-ban kimutatta, hogy a radioaktivitás exoterm, azaz hőfelszabadulással járó folyamat. Az α -bomlás során keletkező He a kőzet megszilárdulásakor fogságba kerül. *Ernest Rutherford* ezt felismerte, és a kőzetbe zárt hélium mennyisége alapján ásványok és kőzetek korát határozta meg (500 millió év). Ugyanebben az évben *Berttram Boltwood* megállapította, hogy az urán radioaktív bomlásának stabil végterméke az ólom. Ez alapján a kőzetek korára 410–535 millió évet kapott. Az első geológiai korszaklát *Arthur Holmes* 1913-ban állította össze (ebben az évben született Erdős Pál), amelyben a legidősebb kőzet 1600 millió éves. Mai tudásunk szerint a legpontosabb radioaktív kormeghatározás izotóparányok vizsgálatával történik.

A Föld korának meghatározása izotóparányokból

Tételezzük fel, hogy a Föld keletkezésekor a ^{238}U és a ^{235}U izotópok jelen voltak, bomlástermékeik viszont hiányoztak. A ^{238}U és a ^{235}U bomlását használjuk fel a Föld T életkorának meghatározásához.

A ^{238}U izotóp felezési ideje $4,5 \cdot 10^9$ év. A bomlástermékek felezési ideje ehhez képest olyan rövidnek tekinthető, hogy létezésüket első közelítésben elhanyagolhatjuk. A bomlási sorozat a stabil ^{206}Pb izotópban végződik. A ^{235}U izotóp $0,71 \cdot 10^9$ év felezési idővel rövid felezési idejű bomlástermékeken keresztül stabil ^{207}Pb izotópot eredményez.

A Föld korának jelenlegi legjobb közelítését a *Patterson-féle* (1956) meteoritmódszer szolgáltatja. *Patterson* azt feltételezi, hogy a meteoritok a Földdel azonos őssanyagból egyidejűleg képződtek, majd a képződés után elszakadtak. Ezen meteoritok jelenlegi ólomizotóp összetétele nyilvánvalóan két tényezőtől függ: egyrészt a keletkezésük pillanatában már meglévő őslóms-összetételüktől, másrészt a keletkezésük pillanatában meglévő



1. ábra. A vizsgált exponenciális egyenlet bal és jobb oldalát, mint függvényeket közös koordináta-rendszerben ábrázoljuk. A két grafikon metszéspontjának helye az egyenlet megoldását adja.

U és Th mennyiségétől, hisz ezek is ólomizotópokat termelnek. Válasszunk ki olyan meteoritot, amelyben nincs, vagy elhanyagolhatóan kevés az U és a Th. Ez a meteorit az őszülő-izotóp összetételét őrzi.

Uránércet tömegspektrométerrel vizsgáltak. A ^{204}Pb , ^{206}Pb és ^{207}Pb izotóp relatív koncentrációjának mérése az adott atomok számának következő arányát eredményezte: $1,00 : 29,6 : 22,6$. A ^{204}Pb izotópot használtuk referenciaként, mivel ez az izotóp nem radioaktív eredetű. Az uránmentes meteorit (tiszta ólomérc) vizsgálata a következő arányokat eredményezte: $1,00 : 17,9 : 15,5$.

A bomlási törvény szerint a kezdetben N_0 darab U izotópból t idő múlva keletkező ^{206}Pb száma:

$$^{206}\text{N} = N_0 - N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = ^{238}\text{N} \cdot \left(2^{\frac{t}{4,50}} - 1\right), \quad (1)$$

ahol ^{238}N a jelenlegi U izotópok számát jelöli. Az előzőkhez hasonlóan ^{235}U izotópból t idő múlva keletkező ^{207}Pb száma:

$$^{207}\text{N} = ^{235}\text{N} \cdot \left(2^{\frac{t}{0,71}} - 1\right). \quad (2)$$

Az urán-ólm keverékekben (ahol a radioaktív bomlások során folyamatosan keletkeznek ólomatomok), a különböző tömegszámú ólomizotópok számának aránya:

$$204 : 206 : 207 \Rightarrow 1,00 : 29,6 : 22,6.$$

A tiszta ólomban a megfelelő arányok:

$$204 : 206 : 207 \Rightarrow 1,00 : 17,9 : 15,5.$$

A fenti arányszámok különbségét képezve látható, hogy a radioaktív bomlásokból származó ólomizotópok aránya:

$$206 : 207 \Rightarrow 11,7 : 7,1.$$

Az (1) és (2) egyenlőségek hányadosát képezve:

$$\frac{^{206}\text{N}}{^{207}\text{N}} = \frac{^{238}\text{N}}{^{235}\text{N}} \cdot \frac{2^{\frac{T}{4,5}} - 1}{2^{\frac{T}{0,71}} - 1}.$$

Helyettesítsük be a radioaktív bomlásokból származó ólomizotópok arányát, valamint a $^{238}\text{N} : ^{235}\text{N}$ jelenlegi $137 : 1$ értékét!

A Föld T életkorára a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{11,7}{7,1} = 137 \cdot \frac{2^{\frac{T}{4,5}} - 1}{2^{\frac{T}{0,71}} - 1},$$

Vagyis

$$0,012 \cdot \left(2^{\frac{T}{0,71}} - 1\right) = 2^{\frac{T}{4,5}} - 1.$$

Feltételezve, hogy $T \gg 4,5 \cdot 10^9$ év, a fenti formulában a zárójelekben az 1-eseket elhanyagolhatjuk, s T -t milliárd években könnyen kifejezhetjük:

$$T^* = \frac{\ln 0,012}{-0,822} = 5,38.$$

Láthatjuk, hogy ez a közelítő érték nem sokkal nagyobb, mint a hosszabb felezési idő. Tehát a kiszámítása során alkalmazott elhanyagolás nem volt jogos! Viszont felhasználható egy pontosabb T érték meghatározására. Jelöljük a Föld életkorára durva közelítésben kapott 5,38 milliárd évet T^* -gal, s az eredeti egyenlet helyett tekintsük a

$$0,012 \cdot \left(2^{\frac{T}{0,71}} - 1\right) = 2^{\frac{T^*}{4,5}} - 1$$

egyenletet. Ez zárt alakban megoldható, így T -re $4,80 \cdot 10^9$ év adódik. Ha ezen értéket írjuk T^* helyébe, T -re még jobb közelítést, $4,62 \cdot 10^9$ évet kapunk. Ezt a (fokozatosan közelítő) eljárást tovább folytatva az eredmények $4,52 \cdot 10^9$ évhez konvergálnak.

Ezt a sok, kényelmetlen számolást szívesen elvégzi helyettünk a számítógép. A Mathematica program segítségével pillanatok alatt megkapjuk a fenti exponenciális egyenlet megoldását például 5 tizedesjegy pontossággal.

Megadjuk az egyenlet megoldására vonatkozó utasítást...

```
FindRoot[0.012 (-1+2^(T/0.71))=-1+2^(T/4.5),{T,5}]
... és pillanatok alatt megkapjuk az eredményt:
{T=4.56178}.
```

A grafikus megoldással (Excel) is kaphatunk egy közelítő megoldást (1. ábra).

(Az imént tárgyalt probléma a XXXI. Fizikai Diákolimpia [Leicester, 2000] egyik feladatáént szerepelt.)



A Föld koráról vallott elképzelések igen érdekesen változtak az elmúlt száz 400 évben. A naivitás és a feltétlen tekintélytiszteltet szülte a bibliai alig 6000 éves kort. A geológia és a biológia igényelt volna 100 millió évet, csak igazolni nem tudta. A radioaktivitás ismerete adott lehetőséget a ma helyesnek gondolt 4,5 milliárd éves életkor meghatározására.

Irodalom

1. Marx Gy.: *Atommag-közelben*. Mozaik Kiadó, Szeged, 1996.
2. Marik M.: *Csillagászat*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1989.
3. Mészáros E.: A Geológiai idő és a Földtudományok fejlődése. *Ezredforduló* 2003/3.
4. *KöMaL* 2000/08.
5. *KöMaL* 2002/03.
6. *KöMaL* 2002/04.