A SOKASÁG RITMUSA
– meglepő szinkronizációs folyamatok

Néda Zoltán, Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár, Románia
Káptalan Erna, Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár, Románia

Rég ismert bölcsesség, hogy a SOK az más, mint egyszerűen az egyedek összege. Sok hasonló egyed kölcsönhatása során megjelenő kollektív viselkedés minőségileg új jelenségeket eredményezhet. Talán a legismertebb példa erre a különböző módon kapcsolt oszcillátorok szinkronizációja, ahol a kölcsönhatás következményeként egy kollektív ritmus alakul ki a rendszerben. A természetben, emberi közösségünkben és a fizikai rendszerekben számos példát ismerünk ilyen típusú kollektív jelenségre. Ezen jelenségek sok esetben megérthetők egyszerű fizikai modellek és módszerek alkalmazásával. A következőkben meglepő szinkronizációs jelenségeket és modelleket fogunk röviden bemutatni. A hangsúly a nemtriviális szinkronizációs folyamatokon lesz, ahol a közös ritmus csak a rendszert jellemző paraméterek bizonyos értékeire alakul ki. Még érdekesebbek azok a rendszerek, amelyekben a ritmikus kollektív viselkedés a rendszerben levő optimalizáció melléktermékeként jelenik meg, és az oszcillátorok között nincs fáziskülönbséget direkt módon csökkentő kölcsönhatás.

Kollektív jelenségek

A nagycsaládos szülők jól tudják, hogy két gyerekkel a munka nem ugyanannyi, mint kétszer egy gyerekkel (általában sokkal több…), viszont négy gyerekkel nem ugyanannyi, mint kétszer két gyerekkel (általában kevesebb…). Számtalan természeti és társadalmi jelenség során meggyőződhetünk arról, hogy nagyszámú egyed közös (kollektív) viselkedése minőségileg új és érdekes jelenségeket eredményez. Ezen jelenségek általában nem nyilvánvaló következményei a rendszert alkotó egyedek tulajdonságainak: a sok az más, mint egyszerűen az egyedek összege. A rendszer egészét jellemző nemtriviális viselkedést kollektív jelenségnek nevezzük, utalva arra, hogy a furcsa viselkedés a rendszert alkotó egyedek közti kölcsönhatásból, illetve az egyedek nagy számából adódik. A fentiek alapján könnyű megsejteni, hogy a kollektív viselkedés egy nagyon tág jelenségcsoportot jelöl, és számos természet-, illetve társadalomkutató fáradozik ezek megértésén. Amint a tudományok fejlődése során már sokszor megtörtént, a fizika klasszikus modelljei és módszerei hasznosnak bizonyulnak ezen jelenségek leírására is. A kollektív jelenségek tanulmányozása így a modern fizika egyik érdekes feladata lett, amelyben sok izgalmas és váratlan eredmény született. Egymással kölcsönható ingaórák vagy oszcilláló áramkörök szinkronizációja talán a legismertebb kollektív viselkedés. Régóta ismert jelenség ez, és ha igaz a legenda, akkor *Christian Huygens* holland fizikus (1629–1695), aki ingaórákat is készített, volt az első, aki felfigyelt arra, hogy az egy falon levő órák ingái együtt lengenek (szinkronizálódnak). Mivel tudta, hogy lehetetlen két olyan ingaórát készíteni, amelyeknek pontosan azonos periódusa van, helyesen, a két inga közti kölcsönhatásnak tulajdonította a szinkronizációt. A két ingaórát egymástól eltávolítva a szinkronizáció megszűnt, sejtése ezáltal beigazolódott.

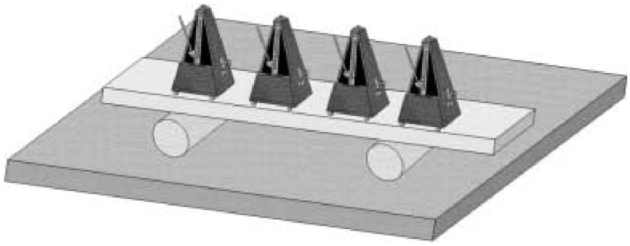
Ezen írás keretében nagyszámú oszcillátor szinkronizációját tárgyaljuk azon esetekben, amikor a szinkronizáció megjelenése nem nyilvánvaló.

Mi is a szinkronizáció?

Oszcillátornak fogunk nevezni minden olyan rendszert, amelynek periodikus dinamikája van. Nem csak fizikai, hanem biológiai rendszerek is lehetnek oszcillátorok. Az oszcillátorok szinkronizációja a legtöbb fizikusnak azt jelenti, hogy a rendszert alkotó egyedek fázisai azonosak és időben azonosak is maradnak. Ez a dinamikus állapot azonban a szinkronizációnak csak az egyik lehetséges formája, és nagyon sok más dinamikus állapotra lehet még a szinkronizáltság fogalmát használni. Például, ha adott esetben az oszcillátorok közti fáziskülönbség marad időben állandó, a rendszert jogosan szinkronizáltnak tekintjük. A feladat ennél még sokkal bonyolultabb, ugyanis nagyon sok oszcillátor esetén nincs egy jól értelmezett fázis, hiszen oszcillátornak lehet tekinteni bármely komplex periodikus (ciklikus) folyamatot. Másfelől, a fentebb értelmezett tökéletesen szinkronizált állapoton kívül létezhetnek részlegesen (parciálisan) szinkronizált állapotok is, ahol az oszcillátorok fázisai nagyrészt, vagy csak megközelítően azonosak. Egy oszcillátorsokaság szinkronizációjának a jellemzésére általában egy q rendparamétert vezetünk be, ami egy 0 és 1 közötti szám. A rendparaméter a szinkronizáció fokát jellemzi, $q = 1$ a tökéletesen szinkronizált állapotnak felel meg, $q = 0$ bármely fajta szinkronizáció hiányát jellemzi, és a $0 < q < 1$ esetben a szinkronizáció részleges. A rendparaméter megválasztása nem mindig egyértelmű, és nagymértékben függ az oszcillátorsokaság tulajdonságaitól.

Triviális, illetve nemtriviális szinkronizációs jelenségek

Tárgyaljuk először azt az esetet, amikor a sokaságot alkotó oszcillátorok egyformák, és a rendszerben nincs egy „karmester” aki egy közös ritmust diktálna.



1. ábra. Sörösbádogokra helyezett deszkalapon oszcilláló azonos metronómok szinkronizációja.

Ilyenkor spontán szinkronizációról beszélünk. Tökéletesen azonos, egymással globálisan kölcsönható (mindenki mindenkivel) oszcillátorok spontán szinkronizációja triviális, ha az oszcillátorok közti kölcsönhatás fáziskülönbség-csökkentő jellegű. Ilyen esetekben azt mondhatjuk, hogy a tökéletesen szinkronizált állapot a rendszernek egy stabil fixpontja. A rendszer a közös frekvenciára szinkronizálódhat úgy, hogy az oszcillátorok fázisai minden időpillanatban megegyeznek. Ilyen jellegű szinkronizációt hozhatunk létre, ha például tökéletesen azonos metronómokat egy deszkalapra rakunk, majd a deszkalapot két hengerként lefektetett sörösbádogra egy asztallapra helyezzük (*1. ábra*).

Azonnal belátható, hogy a fent leírt rendszer csak a „mesékben” létezik … ugyanis a valóságban tökéletesen egyforma egyedek nem léteznek. Bármennyire is akarnánk, nem tudunk két, teljesen azonos frekvenciájú metronómot vagy ingát készíteni, sőt még atomi szinten sem tudunk két teljesen azonos oszcillátort kapni, ugyanis egy elemi oszcillátor periódusát valamilyen mértékben a környezete is befolyásolja. Mivel teljesen egyforma oszcillátorokból álló sokaság nem létezik, jogos a kérdés, hogy különböző frekvenciájú oszcillátorok szinkronizálódhatnak-e? Ha igen, akkor mi ennek a feltétele, és mi lesz a közös frekvencia, amit minden egyed felvesz? Fáziskülönbség-csökkentő kölcsönhatások esetén tehát az azonos egyedekből álló rendszer spontán szinkronizációja triviális, de a valóságos eset, amikor az oszcillátorok sajátfrekvenciái különböznek, nem triviális.

Ha a különböző sajátfrekvenciájú oszcillátorokat egy elég erős külső periodikus kényszer (karmester) vezérli, a rendszer szinkronizációja újból könnyen megérthető. Ha a periodikus vezérlésnek az a hatása, hogy az oszcillátorok és a karmester fáziskülönbsége csökken, az oszcillátorok a vezérlő frekvenciára szinkronizálódnak. Ilyenfajta triviális szinkronizáció rendkívül elterjedt a természetben és társadalmunkban: katonák masírozása, tánc, a Föld és Hold forgása, vagy az évszakok váltakozása által generált bioritmusok, a szívritmust szabályozó sejtek szinkronizációja a szívbe beépített szívritmusszabályzó által stb.…

A spontán szinkronizációnak egy erősen nemtriviális és érdekes megjelenési lehetősége az, amikor különböző sajátfrekvenciájú oszcillátorok szinkronizálódnak anélkül, hogy egy direkt fáziskülönbség-csökkentő kölcsönhatás lenne az egyedek között. Ezen rendszerekben a szinkronizáció egy optimalizáció melléktermékeként jelenik meg.

A spontán szinkronizáció nagyon gyakori jelenség. Számos természeti és szociális rendszerben megfigyelhető: mechanikailag kapcsolt ingák és metronómok, kapcsolt elektronikus rezgőkörök, dél-kelet-ázsiai tűzlegyek periodikus felvillanásai, tücskök ciripelése, békák brekegése, együttélő nők menstruációs ciklusainak egybeesése, vastaps, kémiai reakciókban levő oszcillációk és egymástól távoli vihar-magokban a villámlási aktivitás stb. esetén [1]. A spontán szinkronizációs jelenségek megértése és leírása ezért érdekes és fontos feladat. A következőkben a spontán szinkronizációk néhány fontosabb modelljét és törvényszerűségeit egy kicsit részletesebben fogjuk tárgyalni.

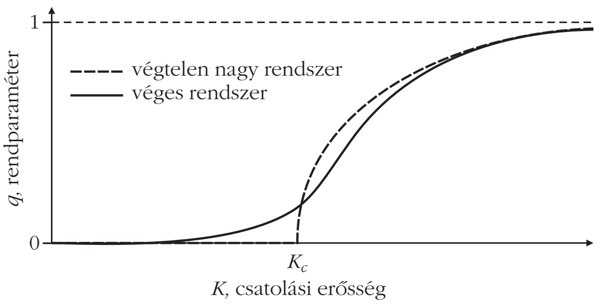
Fáziskapcsolt oszcillátorok spontán szinkronizációja, a Kuramoto-modell

Kísérletileg megállapított tény, hogy nagyon sok ingaóra vagy metronóm szinkronizálódhat, annak ellenére, hogy sajátfrekvenciájuk különböző. Ennek azonban az a feltétele, hogy a köztük levő kölcsönhatás elég erős legyen. Egy sok oszcillátort tartalmazó rendszerre létezik egy kritikus kölcsönhatás-erősség, ami alatt a rendszer nem szinkronizálódik, azonban ha az egyedek közti kölcsönhatás erőssége meghaladja ezt a kritikus értéket, akkor megjelenik a szinkronizáció. Minél eltérőbbek az oszcillátorok, annál magasabb a kritikus kapcsolás értéke. Ezt az érdekes fázisátalakulás-szerű jelenséget írja le a Kuramoto-modell [2].

A Kuramoto-modell fáziskapcsolt rotátorok sokaságát tekinti. Tekintsünk N darab globálisan csatolt rotátort. A rotátorok ω_k körfrekvenciával rendelkeznek és állapotukat a ϕ_k fázisuk jellemzi. *Kuramoto* és *Nishikava, Winfree* [3] ötletét követve, a rendszer időbeli evolúcióját egy kapcsolt elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerrel közelítette meg. Modellükben az k-adik oszcillátor mozgásegyenlete:

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \omega_k + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N} \sin(\phi_j - \phi_k), \qquad (1)$$

ahol K az oszcillátorok közti csatolás erősségét jellemző állandó. Az (1) differenciálegyenlet jobb oldalának az első tagja egy szabad (a többi oszcillátorral nem kapcsolt) oszcillátor fázisának a sajátfrekvencia szerinti, konstans sebességű változását írja le, a második tag pedig a rendszerben levő többi oszcillátorral való kölcsönhatást modellezi. Az (1) szerint minden oszcillátor hat minden más oszcillátorra és ez a hatás fáziskülönbség-csökkentő: ha $\phi_j > \phi_k$ a k-adik oszcillátor fázisa gyorsabban nő, ha meg $\phi_j < \phi_k$, akkor lassabban. Mindez a kölcsönhatást meghatározó harmonikus függvény nulla körüli viselkedésének tulajdonítható és a szinkronizációt segíti. Kuramoto és Nishikava nagy érdeme, hogy rájöttek arra, hogy ha az egye-



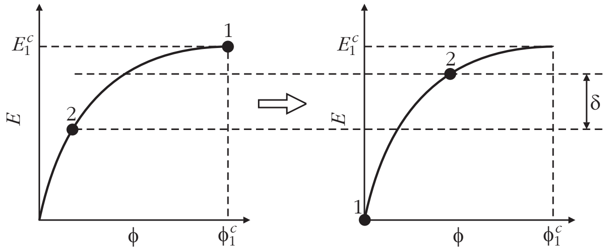
2. ábra. Fázisátalakulás-szerű szinkronizáció a Kuramoto-modellben.

dek közti kölcsönhatást harmonikus formában választják meg, a kapcsolt differenciálegyenlet-rendszer szétválasztható egymástól független egyenletekké, és a szinkronizáltság fokát jellemző q rendparaméter átlagos értékére analitikus eredmények kaphatók. Rendparaméternek a:

$$q = \left\langle \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} e^{i\phi_j} \right| \right\rangle \tag{2}$$

0 és 1 közti mennyiséget tekinthetjük. A (2) képletben a csúcsos zárójel idő szerinti átlagolást jelent. Nyilvánvalóan, ha a fázisok véletlenszerűen mutatnak minden lehetséges irányba, a rendszer nem szinkronizált és $q = 0$. Ha azonban a rendszer tökéletesen szinkronizált, a fáziskörön minden fazor egyirányba mutat és ezáltal $q = 1$. A Kuramoto-modell egzakt megoldása a termodinamikai határesetre vonatkozik ($N \to \infty$) és azt az érdekes eredményt adja, hogy egy adott oszcillátorsokaság esetén létezik egy kritikus K_c csatoláserősség: ha $K \leq K_c$, a rendszer nem szinkronizálódik és a stabil megoldás $q = 0$; ha $K > K_c$, a rendszerben részleges szinkronizáció jelenik meg, és a stabil megoldás: $0 < q < 1$. A $q = 1$ tökéletes szinkronizáció a $K \to \infty$ határesetben jelenik meg. A q rendparaméter K szerinti változását végtelen nagyságú és véges nagyságú rendszerekre a *2. ábra* szemlélteti. A K_c kritikus csatolás erőssége az oszcillátorok sajátfrekvenciáinak szórásától függ: minél inkább különböznek ezek a sajátfrekvenciák (minél nagyobb a szórás értéke), annál nagyobb lesz K_c értéke. A rendszerben egy érdekes fázisátalakulás-szerű jelenség tapasztalható, ezen fázisátalakulás sok szempontból hasonló a ferromágneses rendszerekben levő ferroparamágneses fázisátalakuláshoz. A rendparaméter szerepét itt a rendszer mágnesezettsége, a K paraméter szerepét meg a rendszer hőmérsékletének inverze, az $1/T$ veszi át.

3. ábra. Tüzelő oszcillátorok szinkronizációs mechanizmusa.



A Kuramoto-modell magyarázatot ad tehát arra, hogy egy valós oszcillátorsokaságban, ahol az oszcillátorok sajátfrekvenciái különbözőek, miért és mikor jelenhet meg bizonyos fokú szinkronizáció.

Pulzuscsatolt oszcillátorok

Nagyon sok természetbeli oszcillátor esetén a fázis nem jól értelmezett mennyiség, és így az oszcillátorok kölcsönhatását nem a fázisok különbsége vezérli. Tekintsük például az ázsiai tűzlegyek esetét: egy tűzlégy fázisa nem értelmezhető, és a tűzlegyek egymásról csak a felvillanás (pulzuskibocsátás) pillanatában szereznek információt. Tehát feltehető, hogy az egyedek közti kölcsönhatás is csak a felvillanás időpontjában lép fel. A természetbeli oszcillátorok nagy többsége tüzelő jellegű (pl. a neuronok), és kölcsönhatásuk ezen tüzelések révén valósul meg. Erre a pulzuscsatolt oszcillátorrendszerre is létezik egy egyszerű modell, amely elegánsan magyarázza a különböző sajátfrekvenciájú oszcillátorok szinkronizálásának lehetőségét [4]. A modellnek itt egy nagyon egyszerű változatát fogjuk ismertetni. Tekintsünk egy idealizált pulzáló oszcillátort, amelynek pillanatnyi állapotát egy képzeletbeli ϕ_i fázis és egy másik, E_i állapotváltozó határozza meg. Ezen két változó egymástól nem független, és kapcsolatukat egy

$$E_i = f(\phi_i) \tag{3}$$

konkáv jellegű függvény adja meg (*3. ábra*). Az oszcillátor fázisa időben a $\phi_i(t) = t \bmod(\phi_i^c)$ törvény szerint változik. Itt az $x \bmod(y)$ jelölés az x-nek az y-nal való osztási maradékát jelenti. Az oszcillátorok fázisa tehát időben egyenletesen nő, amíg el nem éri a ϕ_i^c értéket, amikor lenullázódik és az oszcillátor tüzel (egy pulzust bocsát ki). A ϕ_i változóval egyidőben az E_i is állandóan változik a (3) egyenlet szerint. A csatolatlan oszcillátorok dinamikája tehát egyszerű periodikus tüzelésekből áll. A globális csatolás a kibocsátott pulzusokon keresztül valósul meg: egy oszcillátor tüzelése a többi oszcillátor E_i állapotváltozóját egy δ értékkel megnöveli. Ezáltal a többi oszcillátor fázisa is a (3) egyenletnek megfelelően nő (*3. ábra*). Azonnal belátható, hogy egyetlen egy tüzelés lavinaszerű folyamatot eredményezhet, amelyben nagyon sok más oszcillátor tüzelni fog. Egy lényeges törvény, amit a dinamikában még bevezetnek, az úgynevezett refrakter állapot jelenléte: amikor egy oszcillátor tüzelt, fázisa lenullázódik, és az oszcillátor refrakter állapotba kerül (fázisa nulla marad amíg a tüzelési lavina megszűnik). Ezáltal egy oszcillátor csak egyszer tüzelhet egy lavinán belül. Belátható és matematikailag bizonyítható, hogy a rendszerben bizonyos fokú szinkronizáció léphet fel, amelyben az oszcillátorok együtt tüzelnek. A szinkronizáció fokára egy jól értelmezett rendparaméter a legnagyobb tüzelési lavina relatív mérete (a legnagyobb lavinában tüzelő oszcillátorok száma elosztva a rendszerben levő oszcillátorok számával). A kölcsönhatás erősségét a δ paraméter jellemzi. A fent leírt pulzuscsatolt rendszer viselkedése hasonlít a Kuramoto-modell által leírtra. Létezik egy δ_c kritikus csatolás, amely alatt a rendszer nem szinkronizálódik, és amely felett részleges szinkronizáció alakul ki. A kritikus csatolás értéke az oszcillátorok ϕ_i^c periódusainak szórásától függ. Minél inkább különbözik az oszcillátorok frekvenciája, annál nagyobb δ_c értéke. A q rendparaméter a δ csatolási paraméter függvényében a *2. ábrá*n rajzolt görbéhez hasonlóan viselkedik.

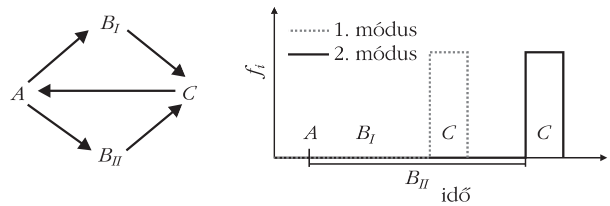
Többmódusú pulzuscsatolt oszcillátorok meglepő szinkronizációja

Tekintsünk most olyan tüzelő jellegű oszcillátorokat, amelyek több módusban is működhetnek [5, 6]. Vizsgáljuk először azt az egyszerű esetet, mikor ezen módusok a pulzuskibocsátás periódusában különböznek egymástól. Legyenek ugyanakkor az oszcillátorok valószerűbbek azáltal, hogy az oszcilláció periódusa ingadozhat (fluktuálhat).

Egy egyszerű absztrakt modell ezen oszcillátorokra a következő lehet. Egy oszcillátor periódusa három, egymást követő ciklusból áll: $A \to B \to C \to A \to \ldots$. A periódus első ciklusát (részét) jelöljük A-val, és legyen ez a dinamikának a véletlenszerű (stochasztikus) része, amelyből a periódusingadozás származik. Ez az A rész tekinthető úgy is, mint egy stochasztikus reakcióidő. Jelöljük az A ciklus időtartamát τ_A-val, ami egy stochasztikus (véletlenszerű) változó lesz. A dinamika B ciklusa legyen a periódus leghosszabb időtartama: τ_B, és legyen ez az az időhossz, amit az oszcillátor periódusként követni szeretne. Az oszcillátor módusai abból származnak, hogy τ_B hossza különböző lehet. A legegyszerűbb esetben a B ciklus hossza csak kétféle lehet: τ_{BI} vagy τ_{BII}. Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy $\tau_{BII} = 2 \cdot \tau_{BI}$, vagyis létezik egy lassúbb módus, ($B = B_{II}$), és egy gyorsabb módus, ($B = B_I$). Amikor az oszcillátor dinamikája a B részéhez ér, az oszcillátor dönthet, hogy melyik módust választja. A periódus utolsó, C ciklusában történik a tüzelés. A tüzelés hossza legyen τ_C, erőssége pedig $1/N$, ahol N a rendszerben levő oszcillátorok száma. Az i-edik oszcillátor pulzuskibocsátása tehát $f_i = 1/N$, ha az oszcillátor a C ciklusban van, és $f_i = 0$, ha az oszcillátor az A vagy B ciklusban van. A rendszerben levő össz-pulzuserősség

$$f = \sum_{i=1}^{N} f_i .$$

A fentebb értelmezett absztrakt oszcillátorok nagyon általánosak, és a természetben nagyon sok olyan rendszer van, amelynek dinamikája hasonló. Egy azonnali példa erre az emberi tapsolás [7]. A tapsolás egy ciklikus művelet, amelynek periódusa időben fluktuál, létezik egy gyors és egy lassú tapsolási mód, és egy teljes ciklus hangkibocsátással végződik.



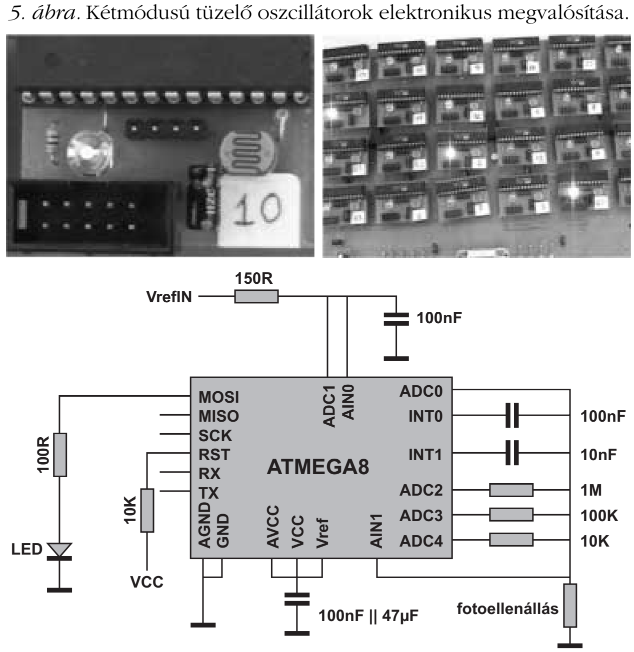
4. ábra. Kétmódusú tüzelő oszcillátorok dinamikája.

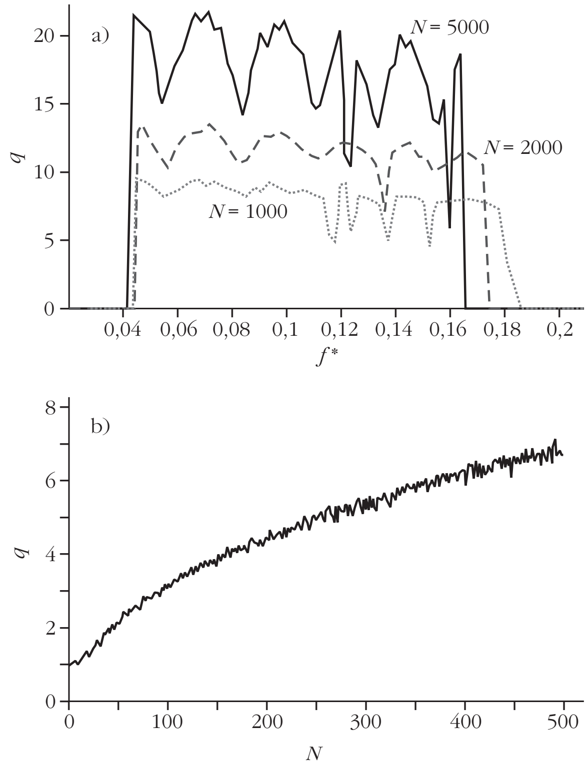
Többmódusú stochasztikus oszcillátorral modellezhető még egyes tücsökfajok ciripelése, ahol a ciripelési frekvenciák a környezet hőmérsékletével változnak; a neuronok dinamikája, ahol két jól elkülöníthető oszcillációs mód létezik; és a *Gonyaulax polyhedra* egysejtű alga többfajta biolumineszcenciája.

Az eddig értelmezett többmódusú stochasztikus és tüzelő oszcillátorok dinamikája egyszerű, de még nem értelmeztük a köztük levő kapcsolást. Tételezzük fel, hogy ezen többmódusú oszcillátorsokaság célja az, hogy az f pillanatnyi összpulzus erősségét a rendszerben egy megszabott f^* érték körül tartsa. A rendszer tehát egyszerűen arra törekszik, hogy a tüzeléseket úgy optimalizálja, hogy $f \approx f^*$. Az egyedek egyetlen szabadsági foka az, hogy a módusok között szabadon választhatnak. Egy egyed, miután befejezte az A ciklust, választhat, hogy a B_I vagy a B_{II} módust követi (*4. ábra*). Ha ebben a pillanatban $f < f^*$, az oszcillátor a rövidebb periódusú, B_I módust követi, növelve ezáltal az egységnyi idő alatti pulzusok számát, és ezáltal f értékét. Ha azonban $f > f^*$, az oszcillátor a hosszabb periódusú, B_{II} módust választja, csökkentve az egységnyi idő alatti pulzusok számát, és ezáltal f értékét. A fenti dinamikának tehát egy optimalizációs célja van: a rendszerben levő összpulzus erősségét f^* környezetében tartani.

Ami azonban ebben a rendszerben történik, az sokkal több, mint egy egyszerű optimalizáció! Ha f^*

5. ábra. Kétmódusú tüzelő oszcillátorok elektronikus megvalósítása.





6. ábra. (a) Fázisátalakulás-szerű szinkronizáció a kétmódusú oszcillátor sokaságban. (b) A szinkronizáció mértékének változása a rendszerben levő oszcillátorok számának függvényében.

értéke nagyon nagy, minden oszcillátor a B_I módust választja, az oszcillátorok össze-vissza villognak, és szinkronizáció nem jelenik meg. Ha f^* értéke nagyon kicsi, minden oszcillátor a B_{II} módust választja, az oszcillátorok megint össze-vissza villognak, és szinkronizáció újból nem jelenik meg. A meglepetés az, hogy egy aránylag tág f^* intervallumon az oszcillátorok elkezdenek a két módus között váltogatni, és ilyenkor az oszcillátorok tüzelése részlegesen szinkronizálódik, annak ellenére, hogy semmilyen fáziskülönbség-csökkentő kölcsönhatás nincs az egyedek között, és hogy az oszcillátorok sajátperiódusai különbözőek és időben fluktuálhatnak.

A rendszer viselkedése a legegyszerűbben számítógépes szimulációkkal tanulmányozható. Készíthetők azonban „elektronikus bogarak” (*5. ábra*), amelyek egy LED segítségével fényimpulzus kibocsátására képesek és egy fotoellenálláson keresztül a rendszerben levő fényerősséget detektálják. A „bogarak” döntéshozatalra (móduskiválasztásra) képes agya egy kis mikrokontroller. Egy ilyen elektronikus bogárrendszert egy közös lapról vezérelve és dobozba zárva, a nem várt kollektív viselkedés kísérletileg is tanulmányozható (a [8] honlapon egy ilyen kísérletről készült film is látható).

A rendszer szinkronizációs fokát egy $q = p/p_1$ rendparaméterrel jellemezzük, ahol p egy olyan mennyiség, ami a rendszer $f(t)$ jelének a periodicitását jellemzi, p_1 meg egyetlenegy egyed jelének periodicitását jellemzi a hosszú periódusú B_{II} módusban. A rendszer periodicitása alatt itt azt értjük, hogy mennyire jól közelíthető az $f(t)$ függvény egy tetszőleges periodikus függvénnyel (p értékének egzakt értelmezéséhez lásd a [6] cikket). A választott rendparaméter annyiban különbözik az előző esetekben tekintett rendparaméterektől, hogy egynél nagyobb szám is lehet. Számítógép-szimulációs eredmények a q rendparaméter átlagos értékére a *6.a* és *6.b ábrá*n láthatók. A *6.a ábrá*n az átlagos rendparamétert ábrázoljuk az f^* függvényében, különböző N számú oszcillátorból álló rendszerekre. A *6.b ábrá*n rögzített f^* esetén q értékét ábrázoljuk a rendszerben levő oszcillátorok számának függvényében. A *6.a ábrá*n látható, hogy létezik egy olyan f^* intervallum, amelyen az oszcillátorrendszer egy erősen periodikus összjelet ad, vagyis az oszcillátorok pulzusai szinkronizálódnak. A szinkronizáció megjelenése és eltűnése hirtelen történik, a Kuramoto-rendszerben megismert fázisátalakulásra emlékeztet. Érdemes felfigyelni arra a tényre, hogy ezen szinkronizált állapotban $q > 1$, ami azt sejteti, hogy a rendszer sokkal inkább periodikus, mint az egyedek külön-külön! A *6.b ábrá*n az is jól látható, hogy az oszcillátorok számának a növelésével a rendszer periodicitása monotonon növekszik. A meglepetést okozó szinkronizáció mellett ez egy újabb érdekes eredmény, ami azt sugallja, hogy a periódusukban ingadozó oszcillátoroknak egy ilyenszerű kapcsolásával pontos és jó periodicitású oszcillátor készíthető.

A kétmódusú oszcillátorrendszerre itt bemutatott eredmények nagyon általános körülmények között megmaradnak: ha többmódusú oszcillátorokat tekintünk, ha az oszcillátorokat rácsra rakjuk és minden oszcillátor csak a szomszédjait látja, ha f^* értéke gyengén különböző oszcillátoronként stb.

Következtetések

A szinkronizáció nagyon általános kollektív jelenség, amely sok természeti és társadalmi rendszerben megjelenik. Itt „ízelítőként” bemutattunk néhány érdekes és meglepő eredményt valószerű oszcillátorsokaságok esetére. Azon jelenségekre és modellekre fókuszáltunk, ahol sok oszcillátor kölcsönhatása során nemtriviális szinkronizáció alakult ki. A tárgyalt modellek hasznosak lehetnek biológiai és társadalmi jelenségek megértéséhez és ezek modellezésére.

Irodalom

1. S. Strogatz: *SYNC. The Emerging Science of spontaneous order.* Hyperion, 2003.
2. Y. Kuramoto, I. Nishikava, *J. Stat. Phys. 49* (1987) 569.
3. A.T. Winfree, *J. Theor. Biol. 16* (1967) 15.
4. R. Mirollo, S. Strogatz: SIAM. *J. Appl. Math. 50* (1990) 1645.
5. A. Nikitin, Z. Néda, T. Vicsek, *Phys. Rev. Lett. 88* (2002) 590.
6. R. Sumi, Z. Néda, A. Tunyzagi, Cs. Szász, *Phys. Rev. E 79* (2009) 056205.
7. Z. Néda, E. Ravasz, Y. Brechet, T. Vicsek, A.L. Barabási, *Nature 403* (2000) 849.
8. Nemtriviális szinkronizáció http://www.phys.ubbcluj.ro/~zneda/sync