

seit mutatjuk, míg pirossal a Spitzer-teleszkóp infravörös felvétele látható. A még pontosabb részleteket segít megérteni a teljesebb spektrum, ezt mutatják fölül a különböző űrtávcsövek egyesített képei.

Epilógus

E látványos kitérő után egy kis összefoglalással térjünk vissza a csillagászatra. A Kaliforniai Egyetem asztronómia, asztrofizika és kozmológia részlegének bevezető csillagászati előadásában áttekintik az elmúlt évszázadok legfontosabb eredményeit, megemlítve azt is, hogy milyen felfedezés tette lehetővé ezek elérését. Röviden ismételjük meg:

- 1609 körül: nem a Föld a centrum (csillagászati távcső és *Galilei* megfigyelései),
- 1814 után: a Napot és a csillagokat hidrogéngáz alkotja, és ma már tudjuk, a fúzió fűti (spektrográf felfedezése, *Fraunhofer*),
- 1929: galaxisunk nem központja a Világegyetemnek (*Hubble* és a Mt. Wilson 2,5 méteres óriástávcsöve + nagy formátumú fotólemez),
- 1965: Big Bang (*Penzias* és *Wilson*, rádióteleszkóp – űrtávcsövek igazolják!),
- 1995-től: a bolygók gyakoriak az Univerzumban (modern CCD-detektorok, jódcella a pontos sebességmérésre),
- 1998: döntően a „sötét energia” (Dark Energy) tölti ki az Univerzumot (nagy formátumú CCD-detektorok, 10 méteres Keck-teleszkóp)...

És most már tudjuk, hogy ez csak a kezdet – ha valaki kíváncsi, mi készül az égen, olvassa el *Szatmáry Károly* és *Szabados László Űrtávcsövek* című cikkét a *Meteor csillagászati évkönyv* 2009-es kötetében, ha meg arra, hogy mi várható a földi csillagászat-

ban, olvassa el *Fűrész Gábor* cikkét a közeljövő legnagyobb tervezett távcsöveiről a *Természet Világa* 2009/1-es különszámában (*Feltáru a Világegyetemet*).

Befejezésül ma azt hisszük, hogy nagy valószínűséggel tudjuk, hogy mi a Világegyetem „összetétele”:

- 4% közönséges (barionos) anyag – ez az, amit régóta és egyre inkább látunk, hála a CCD-nek is!
- 21% sötét anyag – ez az, amit indirekt módon a gravitáció segítségével „mérhetünk”, hogy mi ez az anyag, azt keressük az új CERN gyorsítóval és az elemi-rész-fizika szokásos elméleti és kísérleti eszközeivel.

- 75% sötét energia – a Világegyetem gyorsulva távolul, ezt mérte meg két csoport 1998-ban, és azóta sokan, és erre jők a nagyon régi, tízmilliárd éves szupernóvák, no meg a CCD-k! Hogy ez az „energia” mi lehet, arról sejtelmünk sincsen, alig merem leírni, de azt is gondolták, hogy a gravitációs tér vákuumenergiája talán – de a becsült energiasűrűség 120 nagyságrenddel nagyobb, mint az Einstein-egyenletekből következik!

Ha egy becsült 120 nagyságrenddel tér el attól, amit várnánk, azt nemigen lehet komolyan venni! Ezért is hiszem azt, hogy valami nagyon új úton kell elindulnunk, és ez kicsit több lehet, mint a már említett kvantumhipotézis! Arra gondolhatunk, amit a nagy perzsa filozófus, matematikus, fizikus, csillagász (szóval polihisztor és még költő is), a perzsa naptárreform bevezetője, *Omar Khajjám* több mint 900 éve mondott:

„Gondold meg: ami a világon van, az nincs.

Fontold meg: ami a világon nincs, az van.”

(*Képes Géza* fordítása)

Bízzunk a jövő évek Nobel-díjasaiban és a sok ifjú kutatóban, hogy a költő másik, közel ezer éves jóslata nem válik valóra:

„A Titkok Fátyola mögé embernek nincsen útja.

A Létnék ezt a rendszerét nincs lélek, aki tudja.”

(*Csillik Bertalan* fordítása)

HELYFÜGGŐ AMPLITÚDÓVAL GERJESZTETT HARMONIKUS OSZCILLÁTOR KAOTIKUS VISELKEDÉSE

Slíz Judit

ELTE Elméleti Fizika Tanszék

A *Fizikai Szemle* több korábbi cikke [1–5], valamint más folyóiratok [6] is foglalkoztak egy olyan mechanikai mozgásformával, amely noha gyökeresen eltér a megszokottól, előfordulása meglepő módon mégis nagyon gyakori. Ezek a szokatlan mozgások a *kaotikus jelenségek*, amelyek egészen napjainkig, a számítógépek megjelenéséig, rejtve maradtak. Az egyetemi tananyagból jól ismert, *analitikusan* megoldható, lineáris differenciálegyenletekkel leírt mozgások csak közelítései a valóságnak. A valóságos mozgásokban mindig fellép valamilyen mértékű nemlinearitás, és az ezt leíró differenciálegyenleteknek már nem léte-

zik zárt alakú megoldása. A mozgás pályáját csak *numerikusan*¹ lehet kiszámolni, ehhez pedig számítógép kell.

Ha sikeresen túlestünk a mozgásegyenletek numerikus modellezésének nehézségein, (ami kis segítséggel felsőbb évfolyamos középiskolás diákok számára is elérhető [3, 5, 7]), már ott is vagyunk a kaotikus

¹ Jelen cikkben az elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerré alakított mozgásegyenletek numerikus megoldásához a negyedrendű Runge–Kutta-módszert [8] választottam $\Delta t = 0,01$ s (a finomabb részleteknél $\Delta t = 0,001$ s) időléptetéssel.

mozgások és a *fraktálok* csodálatos világában [9, 10], ahol lépésről lépésre haladva, újabb és újabb önálló felfedezéseket tehetünk. E cikk a mechanika egy szűk, de alapvető szeletét, a harmonikus és anharmonikus oszcillátorokat vizsgálja különféle nemlinearitások esetén. Először megnézzük, hogy mi történik, ha a *harmonikus oszcillátort* állandó, illetve helyfüggő amplitúdójú erővel gerjesztjük, majd megvizsgáljuk ugyanezt az *anharmonikus oszcillátor* esetében is. Vizsgálódásunkat kezdjük az időben periodikus erővel gerjesztett harmonikus oszcillátorral, amely mozgásegyenletének newtoni alakja [11, 12] a jól ismert

$$\begin{aligned} ma &= F_{\text{rugó}} + F_{\text{sírl}} + F_{\text{gerj}} \\ F_{\text{rugó}} &= -Dx, \\ F_{\text{sírl}} &= -c\dot{x} \end{aligned} \quad (1)$$

alakú. Itt x az oszcillátor kitérése, \dot{x} a sebessége, D és c pedig állandók. A gerjesztő erőt az

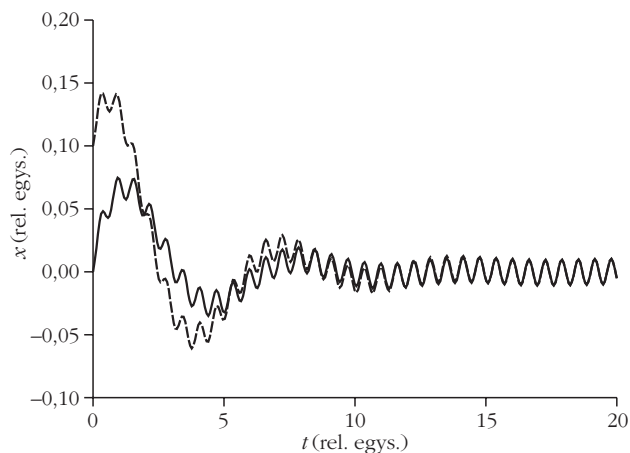
$$F_{\text{gerj}} = F(x, t) = A m f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \quad (2)$$

alakban írjuk, ahol az A egy gyorsulás dimenziójú állandó, m a tömeg, $f(x)$ pedig a gerjesztési amplitúdó helyfüggését megadó általános, a függvényértékben dimenziótlan függvény. A szokásos $\omega_0^2 = D/m$, $2\alpha = c/m$ jelöléseket alkalmazva mozgásegyenletünk a következő alakot ölti:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\alpha\dot{x} + A f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right). \quad (3)$$

Az egyszerűbb ábrázolhatóság kedvéért, valamint tekintettel a későbbiekben fellépő bonyolultabb mozgásegyenletekre, dimenziótlanítsuk a (3) egyenletet a $t' = t/S$ és $x' = x/L$ dimenziótlan idő, illetve hosszúság bevezetésével. Az S , illetve L tetszőlegesen megválasztható idő-, illetve hosszúságdimenziójú meny-

1. ábra. Az $\ddot{x} = -x - 0,6\dot{x} + \cos(10t)$ mozgásegyenletű, két különböző, $x_{01} = 0,1$ (szaggatott vonal) és $x_{02} = 0$ (folytonos vonal) kezdeti dimenziótlan kimozdulással, azonos $v_0 = 0,1$ dimenziótlan kezdősebességgel indított harmonikus oszcillátor kitérés-idő diagramja.



nyiség, amelyek legyenek a következők: $S = 1/\omega_0$, $L = A/\omega_0^2$. A $t = t'/\omega_0$ és $x = (A\omega_0^2)x'$ értékeket behelyettesítve (3)-ba, valamint bevezetve a

$$\beta = \frac{\alpha}{\omega_0}, \quad \delta = \frac{2\pi}{T\omega_0} \quad (4)$$

jelöléseket, majd visszaállítva a független és függő változó elnevezését $t' = t$ -re és $x' = x$ -re, megkapjuk a (3) egyenlet dimenziótlanított alakját:

$$\ddot{x} = -x - 2\beta\dot{x} + f\left(\frac{x}{\omega_0^2}\right) \cos(\delta t). \quad (5)$$

A β és a δ fizikai jelentéssel is bír, β a dimenziótlan csillapítási együttható, δ pedig a dimenziótlan gerjesztési frekvencia (a valódi gerjesztési frekvencia és a sajátfrekvencia hányadosa).

Helytől független erővel gerjesztett harmonikus oszcillátor

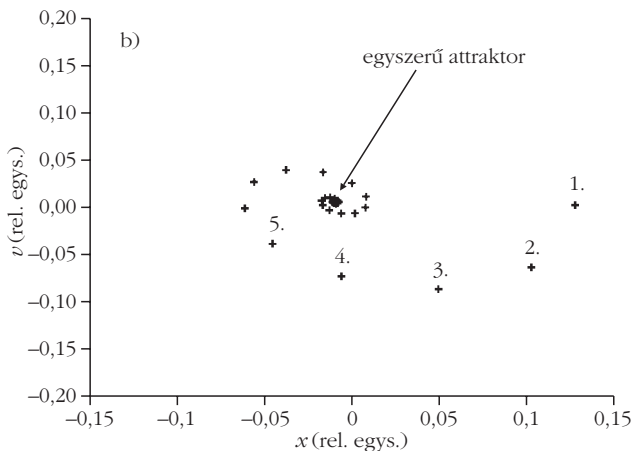
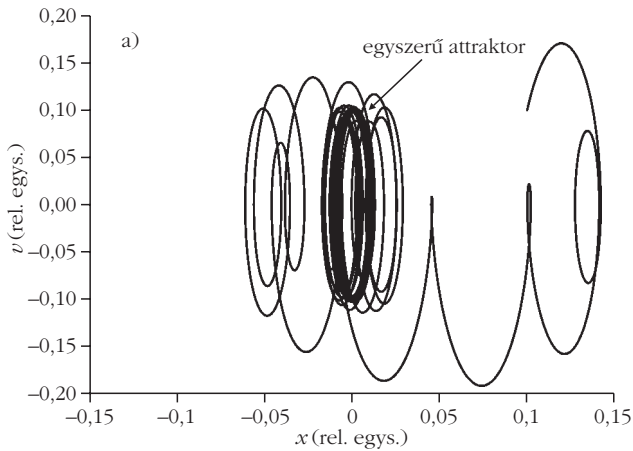
Először emlékeztetünk a jól ismert állandó amplitúdójú gerjesztés esetére, amikor is $f(x) = 1$. Ekkor az

$$\ddot{x} = -x - 2\beta\dot{x} + \cos(\delta t). \quad (6)$$

alakú dimenziótlan mozgásegyenlet analitikusan megoldható, és a kitérés-idő megoldásfüggvény hosszú idő után a szinuszfüggvényhez tart [11, 12]. Indítsunk el különböző kezdeti feltétellel két mozgást, és hasonlítsuk össze a kitérés-idő függvényüket. Mivel tudjuk, hogy esetünkben hosszú idő után ezek mindig a szinuszfüggvényhez tartanak, elegendő csak a függvény kezdeti szakaszát vizsgálni (1. ábra).

Ugyanezt a mozgást a *fázistérben* (a pillanatnyi sebesség a kitérés függvényében) ábrázolva megkapjuk a 2.a ábrán látható *trajektória* (a mozgás fázistérbeli pályája) képét. Hosszú idő után ez egy *ellipszishez* tart. Az olyan alakzatot, amelyhez hosszú idő után a mozgás trajektóriája tart, bárhonnét is indítjuk a mozgást egy bizonyos tartományon belül, *attraktor-nak* nevezzük [7]. A mi esetünkben ez egy ellipszis, ami itt *batárciklus* attraktor, az egyszerű attraktorok egyik fajtája.

A gerjesztés miatt a mozgás fázistérbeli ábrázolása már ebben az egyszerű esetben is bonyolulttá válik. Mivel a gerjesztő erő időben periodikus, célszerűnek látszik, hogy a kitérés-sebesség függvényt T periódus-időnként ábrázoljuk, amit *stroboszkopikus leképezésnek* hívunk. Ez látható a 2.b ábrán, ahol a pontok spirálisan tartanak az állandósult állapothoz, amelynek ebben az ábrázolásban egyetlen pont felel meg, ami a leképezés attraktora (*fixpont attraktor*). E pont a 2.a ábra ellipszisének stroboszkopikus leképezése. A stroboszkopikus leképezés előnye, hogy a térben kigyózó trajektóriából periódusidőnként mintát véve a megszokott $x-v$ síkban ábrázolhatjuk a mozgást, ami azonban már nem folytonos, hanem egy pontos-



2. ábra. Az $\ddot{x} = -x - 0,6 \dot{x} + \cos(10t)$ mozgásegyenletű ($x_{01} = 0,1, v_{01} = 0,1$) harmonikus oszcillátor egyszerű attraktora. a) az $x-v$ síkon (ellipszis), és b) stroboszkopikus leképezéssel (pont). A b) ábrán a sor-számozott kis nyilak a leképezés első néhány pontjának az attraktorhoz való közeledését jelzik, az 1. pont a kezdőpont.

rozat. (Ezért kapta a nevét a stroboszkópról, amely szaggatott megvilágítást ad.) Stroboszkopikus leképezéskor² az alakzatok dimenziója eggyel kisebb, mint a teljes fázistérben (például pont lesz ellipsziszből) [7].

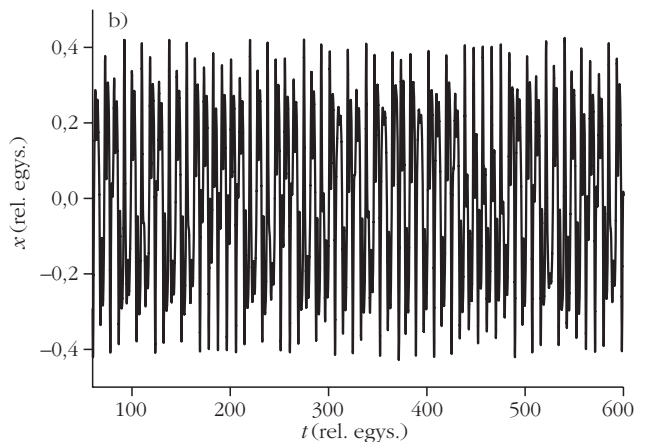
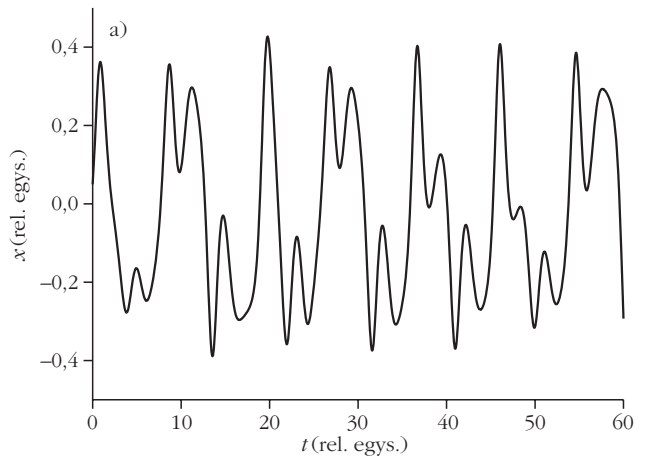
Parabolikus helyfüggő erővel gerjesztett harmonikus oszcillátor

Most pedig nézzük meg, hogyan módosulnak ezek a képlettel leírható, szabályos, periodikus görbék, valamint határciklus attraktoruk különböző nemlineáris hatásokra. Első lépésben tegyünk az állandó amplitúdó helyébe parabolikus alakot: $f(x) = (1 - vx^2)$, ahol v egy nemlinearitási paraméter. Ekkor a dimenziótlan mozgásegyenlet a következő alakú lesz:

$$\ddot{x} = -x - 2\beta \dot{x} + (1 - vx^2) \cos(\delta t). \quad (7)$$

Nézzük meg e mozgás kitérés-idő függvényét is. Arra már az első próbálkozások után rájöhettünk, hogy

² A gyakorlatban nagyon egyszerűen megkaphatjuk a stroboszkopikus leképezést, ha az időlépést a periódusidő századrésének vesszük, és csak minden századik lépést jelenítünk meg.



3. ábra. Az $\ddot{x} = -x - 0,4 \dot{x} + (1 - 16,636x^2) \cos(0,688t)$ mozgásegyenletű ($x_0 = 0,05, v_0 = 0,35$) harmonikus oszcillátor kitérés-idő ($x-t$) diagramja a) a $t = 0-60$, és b) a $t = 60-600$ időegység intervallumban.

míg az állandó amplitúdójú gerjesztésnél teljesen mindegy volt, melyek a rendszer paraméterei, hosszú idő után mindig szinuszfüggvényhez tartott a kitérés-idő függvény, itt a megoldás erősen függ a rendszer paramétereitől. Vizsgáljuk meg alaposabban a következő, konkrét paraméterértékekkel rendelkező oszcillátort:

$$\ddot{x} = -x - 0,4 \dot{x} + (1 - 16,636x^2) \cos(0,688t). \quad (8)$$

Ha ránéznünk a 3. ábrán látható kitérés-idő függvényre,³ semmilyen szabályosságot sem találunk, a mozgás tehát kaotikus.

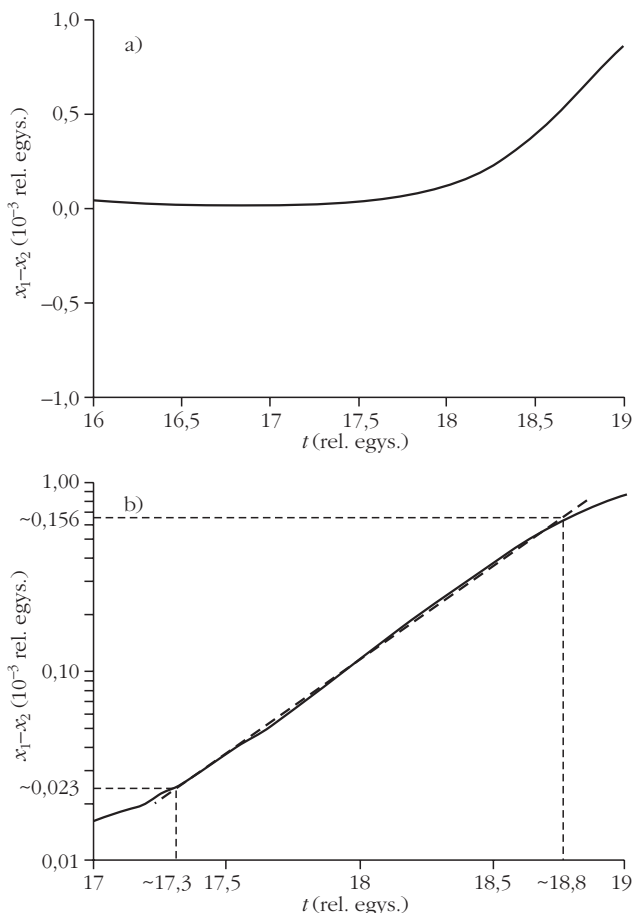
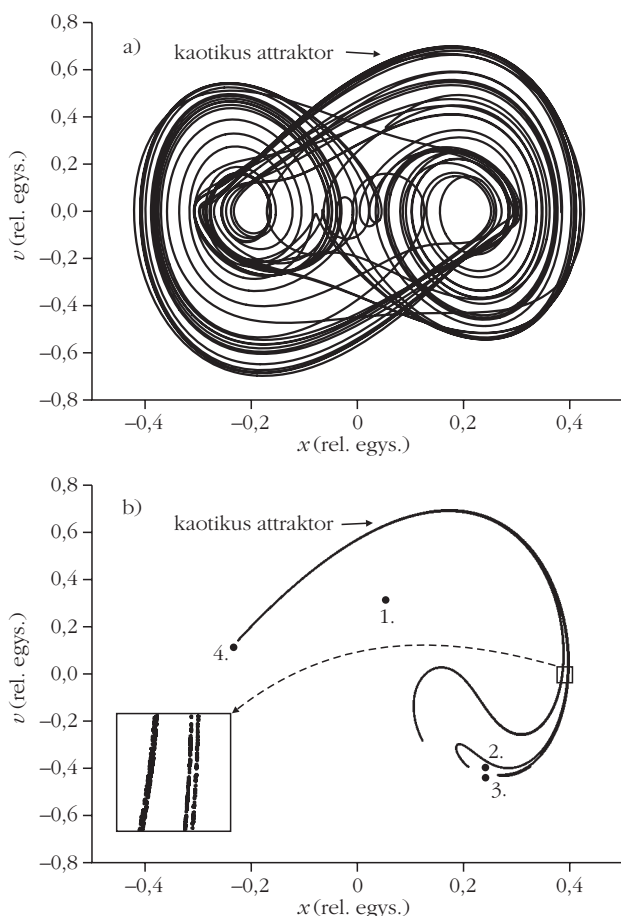
Azonban a fázistérre megnézve érdekes látvány tárul elénk: a teljesen szabálytalan kitérés-idő diagramú mozgásban nagyon is szigorú rend, szabályosság figyelhető meg. Ez már a 4.a ábrán, a trajektóriák kavargásában is jól látható, de ha a 4.b ábra stroboszkopikus leképezését nézzük, akkor végtelenül egyszerűnek tűnő görbét látunk. A kaotikusan össze-vissza kavargó, hosszú idő után a síkot teljesen besatírozó

³ Itt is, és a későbbiekben is mindenkor megadjuk a kezdőfeltételeket, de megjegyezzük, hogy kaotikus esetben ennek nincs jelentősége, mert a kaotikus attraktort elérő, de különböző helyekről induló mozgások idővel egyformán rajzolják ki az attraktor struktúráját.

trajektóriák stroboszkopikus leképezése sohasem hagyja el ezt a görbét! A trajektóriák tetszőleges pontból indítva, stroboszkopikus leképezésben e görbéhez tartanak, hasonlóan ahhoz, ahogyan az állandó amplitúdóval gerjesztett oszcillátornál egy ellipszishez. Ezért ezt is attraktornak hívjuk, de különleges tulajdonságai miatt *kaotikus* vagy *különös attraktor* a neve. A kaotikus attraktor egyik különleges tulajdonsága a 4.b ábrán látható. Ha kinagyítjuk a „vonal” egy részletét, meglepődve tapasztaljuk, hogy további vonalakból áll. Ha ismét tovább nagyítanánk, megint csak ugyanazt az *önhasonlító*, szálas, fonalas szerkezetet kapnánk. A kaotikus attraktornak tehát *szálas fraktálszerkezete* van.

A kaotikus mozgás egy másik jellegzetessége, az *előre-jelvezhetetlenség* okát az 5. ábra szemlélteti, ahol a könnyebb érthetőség kedvéért két nagyon közeli (1 ezrelék különbségű) pontból indított mozgás kitérésének *különbségét* ábrázoltuk. Az 5.a ábrán jól látható, hogy közel 17 időegységig nagyjából együtt halad, majd gyorsan eltávolodik egymástól a két pálya. Ha az eltávolodásnak e kis szakaszt logaritmikus skálán ábrázoljuk (5.b ábra), akkor nagyjából egyenest kapunk, azaz a két kitérés logaritmikus léptékben távolodik egymástól. Az egyenes

4. ábra. Az $\ddot{x} = -x - 0,4\dot{x} + (1 - 16,636x^2)\cos(0,688t)$ mozgásegyenletű ($x_0 = 0,05$, $v_0 = 0,35$) harmonikus oszcillátor a) fázistere, és b) stroboszkopikus leképezése. A kis nyílak azokra a pontokra hívják fel a figyelmet, melyeket a trajektória átfut, mielőtt rákerül az attraktorra. A számok az időbeli haladást jelzik, az 1. kezdőponttal.

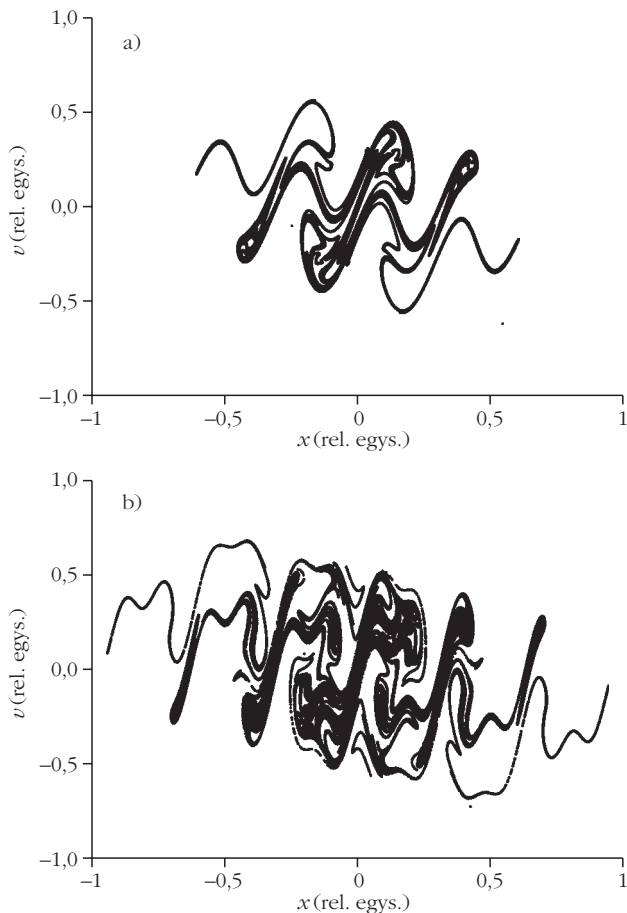


5. ábra. Az $\ddot{x} = -x - 0,4\dot{x} + (1 - 16,636x^2)\cos(0,688t)$ mozgásegyenletű harmonikus oszcillátor $x_0 = 0,05$, $v_0 = 0,35$ és $x_0 = 0,0505$, $v_0 = 0,35$ kezdőfeltételek melletti két pályája kitérésének különbsége az idő függvényében, a pályák eltávolodásának kezdetekor a) lineáris skálán, és b) logaritmikus skálán.

meredeksége, ami a trajektóriák széttartásának mértékével egyenlő, nem más, mint az

$$x(t) = x(t_0) e^{\lambda(t-t_0)}. \quad (9)$$

kifejezésben előforduló λ a *Ljapunov-exponens*, az előre-jelvezhetlenség mérőszáma. Az 5.b ábra alapján elemi algebrai műveletekkel kiszámítható λ közelítő értéke. Illesszünk egyenest a középső görbeszakaszra, olvassuk le a végpontjai koordinátáit, és számoljuk ki az egyenes meredekségét. Az ábráról így módon leolvasható érték: $\lambda = 1,28$. Mivel a valóságban két mozgás sohasem indulhat pontosan azonos kezdőpontból (valahányadik tizedesjegyben mindig lesz különbség), ezt a kezdeti különbséget tekinthetjük a fázistérbeli állapot $\Delta x(t_0)$ meghatározási pontatlanságának is. Ha ezt a $\Delta x(t_0)$ -t összehasonlítjuk valamilyen jellegzetes távolsággal, például a mozgás fázistérbeli méretével vagy az átlagos gerjesztési amplitúdóval, akkor megkapjuk az állapot meghatározásának relatív hibáját. Egy mozgás akkor jelezhető előre, ha e relatív hiba hosszú idő után is viszonylag kicsi marad. Kaotikus mozgások esetén a $\Delta x(t)$ időben exponenciálisan nő, és ezért a relatív hiba rövid idő alatt 100%-os lesz, vagyis a mozgás *előre-jelvezhetetlenné*



6. ábra. a) Az $\ddot{x} = -x - 0,6\dot{x} + \sin(20x)\cos(4,1t)$ mozgásegyenletű ($x_0 = 1, v_0 = 0$) harmonikus oszcillátor stroboszkopikus leképezéssel kirajzolt kaotikus attraktora. b) A térbeli és időbeli kétszeres „frekvenciával” is gerjesztett, $x_0 = 1$ és $v_0 = 0$ kezdő feltételű, az $\ddot{x} = -x - 0,6\dot{x} + \sin(20x)\cos(4,1t) + \sin(40x)\cos(8,2t)$ mozgásegyenletű harmonikus oszcillátor stroboszkopikus leképezéssel kirajzolt kaotikus attraktora.

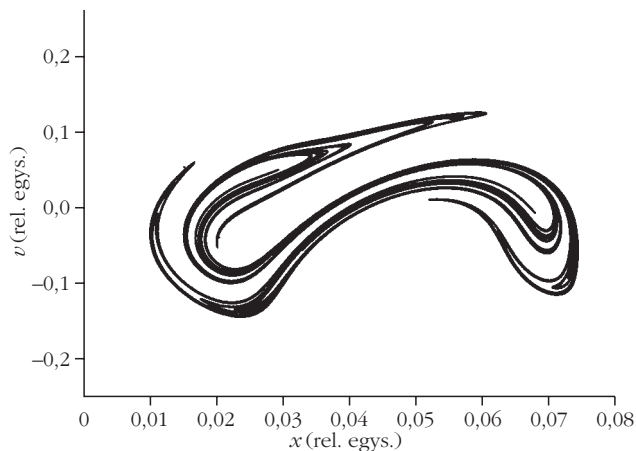
válí. Az az idő, ami alatt a relatív hiba kicsinek tekinthető és a mozgás még előre-jelvezhető, az *előrejelzési idő*, ez a Ljapunov-exponens reciprokéval arányos. Esetünkben ez $1/\lambda = 0,78$, még az 1 dimenziótlan időegységénél is kisebb. Minél nagyobb a λ értéke, annál rövidebb ideig jósolható meg előre a rendszer viselkedése [7].

Színuszos helyfüggő erővel gerjesztett harmonikus oszcillátor

Most nézzük meg, hogy mi történik, ha a parabolikus helyfüggésű amplitúdót színuszosra cseréljük. Ekkor $f(x) = \sin(\kappa x)$, ahol κ a dimenziótlan hullámszám, ami egy másik nemlinearitási paraméter. Az így kapott dimenziótlan mozgásegyenlet:

$$\ddot{x} = -x - 2\beta\dot{x} + \sin(\kappa x)\cos(\delta t). \quad (10)$$

Ha ügyesen választjuk meg az állandók értékét, akkor a 6.a ábrán látható bonyolult geometriájú, színusz-hullámra emlékeztető kaotikus attraktort kapjuk.



7. ábra. Az $\ddot{x} = -x - 2500x^3 - 0,1\dot{x} + \cos(1,04t)$ mozgásegyenletű ($x_0 = 0,1, v_0 = 0$) nemlineáris, állandó amplitúdóval gerjesztett oszcillátor stroboszkopikus leképezéssel kirajzolt kaotikus attraktora.

Végül nézzük meg, miként módosul az attraktor szerkezete, ha két különböző frekvenciájú és helyfüggésű erővel gerjesztjük a harmonikus oszcillátort. A térbeli és időbeli „frekvencia” legyen például a duplája az első gerjesztésének. A kaotikus attraktort a 6.b ábra mutatja. A 6.a és 6.b ábrát összehasonlítva megállapíthatjuk, hogy a kaotikus attraktor alakja erősen torzult a második gerjesztés hatására, vonalai kuszábbak, „reszketősebbek” lettek, és mintha megjelentek volna rajta a kétszeres frekvenciájú „felharmonikusok” is.

Anharmonikus oszcillátor: nemlinearitás a rugóerőben

Lépünk még egyet tovább, és vizsgáljunk meg egy olyan anharmonikus oszcillátort, amelynél a nemlinearitás a rugóerőben van.⁴ Tegyük fel, hogy a visszahúzó erőben megjelenik egy, a kitéréstől köbösen függő tag is. Az eredeti megoldandó dimenziós mozgásegyenlet (keményedő rugó esetén):

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \varepsilon_0 x^3 - 2\alpha\dot{x} + Af(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right). \quad (11)$$

A dimenziótlanítást az előzőekhez hasonlóan elvégezve, kapunk egy újabb, a rugó nemlinearitására jellemző dimenziótlan paramétert:

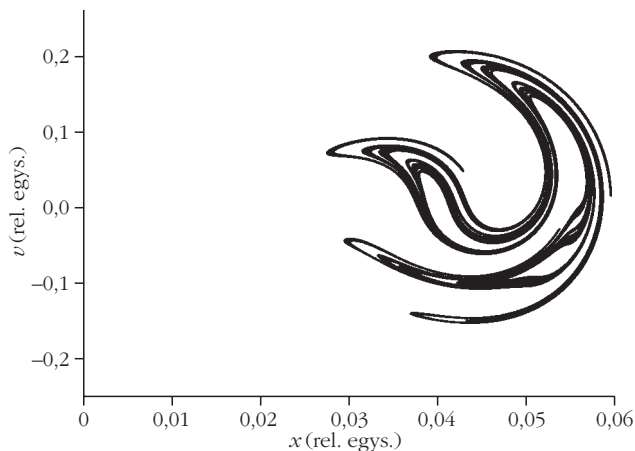
$$\mu = \frac{\varepsilon_0 A^2}{\omega_0^6}, \quad (12)$$

amivel a dimenziótlan mozgásegyenlet:

$$\ddot{x} = -x - \mu x^3 - 2\beta\dot{x} + f\left(x\frac{A}{\omega_0^2}\right)\cos(\delta t). \quad (13)$$

A 7. és 8. ábra állandó amplitúdójú gerjesztés esetén kapott kaotikus attraktorokat mutat. Ezeket és a 6.

⁴ A rugóerő ilyenkor a kitéréssel nem arányosan nő. Ez a helyzet például egy lágyló vagy keményedő rugónál.



8. ábra. Az $\ddot{x} = -x - 15625x^3 - 0,1\dot{x} + \cos t$ mozgásegyenletű ($x_0 = 0,1, v_0 = 0$), nemlineáris, állandó amplitúdóval gerjesztett oszcillátor stroboszkopikus leképezéssel kirajzolt kaotikus attraktora.

ábrán kinagyítás nélkül is jól látszik a kaotikus attraktorok szálas, fonalas fraktálszerkezete.

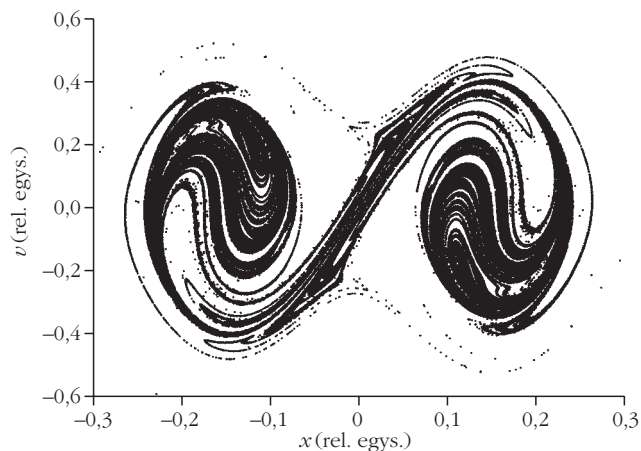
Végezetül nézzünk meg egy olyan esetet, amikor a nemlinearitás a mozgásegyenletben kétszeresen is fellép: tegyünk (13)-ba most szinuszos helyfüggésű gerjesztést, ekkor a mozgás szinuszhullámot mintázó kaotikus attraktora a 9. ábrán látható.

Záró gondolatok

E cikk kereteibe már nem fér bele annak megmutatása, hogy nem mindig kaotikus viselkedésű az anharmonikus oszcillátor (és a helyfüggő amplitúdóval gerjesztett harmonikus oszcillátor sem), amely tulajdonság erősen függ a rendszer paramétereitől. Sokkal könnyebb olyan rendszerparamétereket (dimenziótlan csillapítási együttható, nemlinearitási paraméter, frekvencia) találni, amelyek mellett vonzó fixpontok vagy úgynevezett *n-es ciklusok* lépnek fel. Két fontos megállapítást tehetünk a vizsgált rendszerekre vonatkozóan:

- A harmonikus oszcillátor is kaotikusan viselkedhet, ha a gerjesztő erő amplitúdója helyfüggő.
- Mind a harmonikus, mind az anharmonikus oszcillátor esetében szinuszos helyfüggésű gerjesztési amplitúdónál sokkal könnyebb kaotikus mozgást találni, mint parabolikus helyfüggésűnél, vagy mint az állandó amplitúdóval gerjesztett anharmonikus oszcillátornál.

A vizsgált esetekben megmutatkozott a káosz valamennyi jellemzője: a szabálytalanság, az előre-jelvezhetetlenség és a hely-sebesség ábrázolásban megjelenő bonyolult geometriájú, de szabályos alakzat [7]. Az összes vizsgált esetben megfigyelhető volt, hogy a kaotikus attraktorok alakja valamilyen



9. ábra. Az $\ddot{x} = -x - x^3 - 0,1\dot{x} + \sin(20x)\cos t$ mozgásegyenletű ($x_0 = 1, v_0 = 0$), szinuszos amplitúdóú gerjesztésből és nemlineáris rugóerőből származó, azaz kétszeres nemlinearitású oszcillátor stroboszkopikus leképezéssel kirajzolt kaotikus attraktora.

formában „emlékezik” az őket létrehozó nemlineáris $f(x)$ gerjesztő függvény alakjára.

Számomra nagy örömet és a felfedezés izgalmát jelentette ez a kis vizsgálódás a káosz világában, és kívánom, hogy sokan részesülhessenek még hasonló nemes élményben. Segítségképpen szívesen átadom az itt szereplő esetek vizsgálatához használt számítógépes program C++ forráskódját. Az eziránt érdeklődők írjanak nekem a jsliz@freemail.hu e-posta címemre.

Köszönetnyilvánítás

E cikk az ELTE TTK-n a 2009/2010 tanév őszi félévében hallgatott *Kaotikus mechanika I.* című speciális előadás 2010. januárjában megvédett vizsgadolgozatából fejlődött ki. Egyúttal köszönetemet fejezem ki a tárgy oktatóinak, Gruiz Mártonnak és Tél Tamásnak.

Irodalom

1. Gruiz M., Tél T.: Káoszról kicsit bővebben. *Fizikai Szemle* 55 (2005) 218–221.
2. Gruiz M., Tél T.: A káosz. *Fizikai Szemle* 55 (2005) 191–193.
3. Békéssy L. I., Bustya Á.: Fizikai kettősinga vizsgálata. *Fizikai Szemle* 55 (2005) 185–191.
4. Götz G.: A pillangó-effektus – a káosz felfedezése a meteorológiában. *Fizikai Szemle* 43 (1993) 487–492.
5. Biró I.: Mágneses ingák kísérleti tanulmányozása. *Fizikai Szemle* 46 (2006) 13–18.
6. Sótér A.: Lorenz modelljének kísérleti vizsgálata és a kaotikus vízikerek. *Természet Világa* 135 (2004) LXXIII–LXXIV.
7. Tél T., Gruiz M.: *Kaotikus dinamika*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
8. W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling: *Numerical Recipes in Pascal*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1992.
9. Kecskés L.: *Egy ölnyi végtelen*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
10. J. Gleick: *Káosz*. Göncöl Kiadó, Budapest, 1999.
11. Budó Á.: *Mechanika*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.
12. Nagy K.: *Elméleti mechanika*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.

Szerkesztőség: 1027 Budapest, II. Fő utca 68. Eötvös Loránd Fizikai Társulat. Telefon/fax: (1) 201-8682

A Társulat Internet honlapja <http://www.elft.hu>, e-postacíme: mail.elft@mtesz.hu

Kiadja az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, felelős: Szatmáry Zoltán főszerkesztő.

Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza. A szerzőknek tiszteletpéldányt küldünk.

Nyomdai előkészítés: Kármán Tamás, nyomdai munkálatok: OOK-PRESS Kft., felelős vezető: Szatmáry Attila ügyvezető igazgató.

Terjeszti az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, előfizethető a Társulatnál vagy postautalványon a 10200830-32310274-00000000 számú egyszámlán.

Megjelenik havonta, egyes szám ára: 780.- Ft + postaköltség.

HU ISSN 0015-3257 (nyomtatott) és **HU ISSN 1588-0540** (online)