KOLMOGOROV ÉS A RELATÍV GYAKORISÁG

Szabó Gábor
Zsigmond Király Főiskola, Filozófia és Vallástudományi Tanszék
ELTE BTK, Logika Tanszék

A valószínűség természettudományos körökben leginkább elfogadott interpretációja szerint egy esemény valószínűsége az esemény előfordulásának relatív gyakorisága egy megfelelő eseményosztályon belül. A hatos dobás valószínűsége a hatos relatív gyakorisága a kockadobások sorozatában. Ezt az interpretációt nevezzük a valószínűség *relatív gyakoriság-interpretációjának*. A relatív gyakoriság- vagy más néven frekvenciainterpretáció a valószínűségnek nem az egyetlen interpretációja,[1] mindenesetre a Laplace-féle klasszikus interpretáció után a legrégebbi. Az interpretáció történetileg a tizenkilencedik század közepére, a cambridge-i *Robert Leslie Ellis* és *John Venn* munkásságáig nyúlik vissza, igazi népszerűségre azonban csak a logikai pozitivizmus kialakulása során a Berlini kör két képviselőjénél, *Hans Reichenbach* és *Richard von Mises* révén tett szert. Von Mises frekventizmusa azért is rendkívül fontos, mert az ő nevéhez fűződik a valószínűségelmélet első axiomatikus tárgyalása is [1]. A modern valószínűségszámítás azonban mégsem tőle származik, hanem *Andrei N. Kolmogorov*tól, aki a *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* [2] című klasszikus munkájában mértékelméleti alapon tárgyalta a valószínűséget. Ez az elegáns megközelítésmód vált azután mértékadóvá a valószínűség matematikai tárgyalását illetően, teljességgel kiszorítva von Mises frekventista próbálkozásait. Kolmogorov *Valószínűségszámítása* azonban mégis megőriz valamit von Mises frekventizmusából, és a sors különös iróniája, hogy az axiomatizálási párharcból győztesen kikerülő Kolmogorov élete végén ismét visszatér a valószínűség frekventista tárgyalásához. Az alábbiakban Kolmogorovnak ezt a bújtatott frekventizmusát igyekszünk bemutatni és kritizálni.

A valószínűség modern tárgyalását a mértékelmélet fejlődése tette lehetővé. A *Grundbegriffé*t Kolmogorovnak a valószínűségi konvergenciák és a véletlen folyamatok témakörében kollégájával, *Khinchin*nel folytatott bő egy évtizedes kutatásai előzték meg. A mű a hilberti program jegyében a kibontakozó elmélet axiomatikus felépítésének igényével íródott. A rövid könyvecskéből, amely kitűnő didaktikájával a matematika-tankönyvek iskolapéldája, itt bennünket most csak azok a részek érdekelnek, amelyek a valószínűség és a tapasztalat kapcsolatát tárgyalják. Ezekből a részekből ugyanis kiviláglik, hogy Kolmogorov, kevésbé radikális formában ugyan, mint von Mises, de szintén a relatív gyakoriság interpretáció híve.

A két elképzelés közötti különbségre Kolmogorov rögtön a bevezetésben utal:

„A valószínűségszámításnak léteznek más axiomatikus felépítései is, méghozzá éppen olyanok, amelyekben a valószínűség nem alapfogalom, hanem más fogalmakkal kifejezve szerepel.[2] Ekkor azonban másra törekszenek, nevezetesen arra, hogy a valószínűségszámítás tudományát a lehető legszorosabban összekapcsolják a valószínűségfogalom tapasztalati eredetével." ([2] 12. o.)

Kolmogorov óvatosabb az elmélet és a tapasztalat viszonyát illetően. A kettő viszonyát tisztázó rész a könyv második paragrafusában rögtön az elmélet véges részének axiomatikája után következik.[3]

„A valószínűségszámítás alkalmazása a tapasztalati valóságra a következő séma szerint történik.

1. Felteszik, hogy adott valamilyen korlátlan számú ismétlést megengedő $\mathfrak{S}$ feltételegyüttes.

2. Kiindulnak az események egy meghatározott köréből, amelyek felléphetnek a $\mathfrak{S}$ feltételek megvalósulása következtében. Az egyes esetekben ezek az események különböző kombinációkban következhetnek, illetve nem következhetnek be. Az Ω halmaz magában foglalja a figyelembe vett események bekövetkezésének és be nem következésének minden lehetséges variációját.

3. Ha a gyakorlatban megvalósuló $\mathfrak{S}$ feltételek realizálódása után egy variáns a (valamilyen feltételekkel meghatározott) A halmazhoz tartozónak bizonyul, akkor azt mondják, hogy bekövetkezik az A esemény.

4. Bizonyos feltételek mellett, amelyeket itt közelebbről nem ismertetünk, feltehetjük, hogy valamely A eseménynek – amelyek a $\mathfrak{S}$ feltételek megvalósulásánál lehet, hogy fellépnek, lehet, hogy nem – megfeleltetnek egy, a következő tulajdonságokkal rendelkező meghatározott $P(A)$ valós számot.

A. Gyakorlatilag biztosak lehetünk benne, hogy ha a $\mathfrak{S}$ feltételegyüttest nagyszámú n alkalommal megismétlik, és m jelöli azoknak az eseteknek a számát, amelyekben az A eseménye végbement, akkor az m/n hányados kicsit tér el $P(A)$-tól.

B. Ha $P(A)$ nagyon kicsi, akkor gyakorlatilag biztos, hogy a $\mathfrak{S}$ feltételek egyszeri megvalósításakor az A esemény nem fog bekövetkezni." (14–15. o.)

Az 1. pont világossá teszi, hogy Kolmogorov a valószínűség fogalmát a frekventizmus szellemében ismételhető eseményekre, tehát eseménytípusra és nem szinguláris eseményekre alkalmazza. A 2. pont ennek az ismétlődésnek a jellegét körvonalazza. Fontos látni,

---

[1] Ehhez lásd majd a szerző *A valószínűség interpretációi* című hamarosan megjelenő könyvét.

[2] És itt a lábjegyzet von Misesre utal.

[3] Mielőtt Kolmogorov nekifog, a lábjegyzetben még egyszer hivatkozik von Misesre: „A valószínűségszámítás valódi események körére való alkalmazhatóságához szükséges előfeltevések kifejtésében nagymértékben építünk Mises következtetéseire." (14. o.)

hogy Kolmogorov – von Mises-szel ellentétben – nem várja el az eseményektől, hogy azok véletlenszerűen történjenek. Az eltérő attitűdök mögött a két szerző eltérő természetfilozófiai álláspontja áll a véletlen tekintetében. Von Mises meggyőződése szerint a fizika modern fejleményei azt mutatják, hogy a természet leírására nem adható „algoritmus”, vagyis a véletlenség intrinszikus tulajdonsága az eseményeknek. Ezzel szemben Kolmogorov a valószínűségi kalkulust egyszerű modellnek tartotta, amelynek alkalmazhatósága nem függ a természet véletlenszerű vagy éppen determinisztikus viselkedésétől, hanem csak a rögzített $\mathfrak{S}$ feltételegyüttestől. A 3. feltétel pusztán a terminológiát rögzíti; a valószínűség tapasztalati alkalmazása a 4. pontban történik. A „közelebbről nem ismertetett” feltételek *von Plato* [3] szerint a nagy számok törvényeinek legfontosabb feltételei, vagyis a valószínűségi függetlenség tapasztalati alkalmazhatóságára vonatkoznak. A kérdésre Kolmogorov később a függetlenség fogalmának szentelt fejezetben expliciten is visszatér:

„Ennek megfelelően a természettudományos gondolkodás előtt álló egyik legfontosabb feladat az, hogy miután a valószínűség fogalmának a lényegét mint kulcskérdést tisztázta, kiderítse és pontosítsa, milyen előfeltevések mellett tekinthetünk adott tapasztalati jelenségeket függetlennek.” (22. o.)

Ha az ismétlődő események valószínűségi értelemben függetlennek tekinthetők, akkor (egyéb járulékos feltételek mellett) alkalmazhatóak rájuk a nagy számok különféle törvényei. A nagy számok törvényeit, különösen a Bernoulli-tételnek végtelen szorzatmértéktéren értelmezett karakterisztikus függvényekre kimondott alakját szokásos a következőképpen értelmezni. A karakterisztikus függvények azt mutatják meg, hogy adott események egy végtelen kísérletsorozat adott futamában bekövetkeznek-e vagy sem, ennélfogva a karakterisztikus függvények aritmetikai átlaga a szóban forgó események relatív gyakoriságát modellezi. A Bernoulli-tétel ezek után azt mutatja meg, hogy ez a relatív gyakoriság (a szorzatmérték szerinti) valószínűségi értelemben konvergál az adott esemény valószínűségéhez. Fontos látni, hogy ez a konvergencia valószínűségi konvergencia: a Bernoulli-tétel esetében a véletlen változók valószínűségi értelemben konvergálnak a közös várható értékhez, a nagy számok erős törvényeiben pedig „majdnem biztos” értelemben. A valószínűség így nem redukálható maradéktalanul a frekvenciára, mivel a Bernoulli-tétel kiküszöbölhetetlenül tartalmaz egy „másodrendű” valószínűséget is: szorzatvalószínűséget, amelyben a konvergencia meg van fogalmazva.

Ez a valószínűség azonban határértékben 1-hez tart, sőt az erős törvényekben 1. És éppen ez az a tény, amelyben a frekvenciainterpretáció igyekszik megkapaszkodni. Ha a valószínűségtől ebben a speciális esetben, vagyis akkor, amikor értéke közel 1, sikerülne valamiként megszabadulni, akkor – hangzik az érv – az út nyitva állna a valószínűség és a relatív gyakoriság azonosításához a nagy számok törvényein keresztül. Mit is jelent az, hogy egy esemény valószínűsége közel 1; vagy a komplementer esetben, hogy egy esemény valószínűsége közel 0? Itt lép be a gondolatmenetbe Kolmogorov 4. pontjának B. része, amelyet az irodalom *Cournot-szabály*ként tart számon: ha egy esemény valószínűsége közel van 1-hez, akkor az esemény *gyakorlati szempontból* biztosan bekövetkezik, ha pedig közel van 0-hoz, akkor az esemény *gyakorlati szempontból* biztosan nem következik be. Vagyis a valószínűséget két kitüntetett esetben *gyakorlatilag* azonosíthatjuk a bekövetkezéssel: ha $P(A) \approx 1$ és ha $P(A) \approx 0$. Az első esetben gyakorlatilag biztosak lehetünk abban, hogy A bekövetkezik, a másodikban pedig, hogy nem következik be. Események konjunkciójára a szabály azonban már nem alkalmazható,[4] vagyis a Cournot-szabály kártyaként tehát csak egyszer játszható ki az érvelésben – ez azonban éppen elég Kolmogorovnak: ha a nagy számok törvényeiben a szorzatvalószínűség közel 1 volta a Cournot-szabály értelmében helyettesíthető azzal, hogy a szóban forgó esemény vagy tényállás gyakorlatilag biztosan bekövetkezik, vagyis a relatív gyakoriság és a valószínűség gyakorlatilag biztosan megegyezik, akkor legalábbis nagyszámú kísérletsorozatban a kettőt *gyakorlatilag* azonosíthatjuk. A Bernoulli-tétel a Cournot-szabály és a függetlenség feltételezése mellett tehát *bizonyítja,* hogy a relatív gyakoriságok tartanak a valószínűségekhez, azaz a valószínűség relatív gyakoriság-interpretációja a helyes interpretáció. Ez röviden Kolmogorovnál a valószínűségi „axiómák tapasztalati levezetése”.

Ez az érvelés azonban teljességgel helytelen, és nem azért – ahogy azt sokan vélik – mivel a Cournot-szabály megalapozatlan.[5] A tévedés igazi oka az, hogy a nagy számok törvényei *matematikai tételek,* és így teljes mértékben érzéketlenek az interpretációkra: a tételben szereplő p betű interpretációjától függően más és más lesz a fizikai tartalmuk. Ha a p betűt a relatív gyakoriság-interpretációnak megfelelően frekvenciaként interpretáljuk, akkor a tétel következő empirikus jelentést fogja kapni: az olyan sorozatok sorozatainak relatív gyakorisága, amelyekben a sorozat kezdő szeletéből számított relatív gyakoriságok tetszőlegesen kicsit térnek az aszimptotikus relatív gyakoriságoktól, a kezdő szelet hosszával nullához tartanak. Ha a p betűt a szubjektív interpretációnak megfelelően parciális hitként interpretáljuk, akkor a tétel a következőt fogja jelenteni: ha az empirikus/racionális hívő egy adott eseményben p mértékben hisz, akkor (feltéve a függetlenség által modellezett fizikai feltételek fennállását) határértékben teljes mér-

[4] „A B. elv … nem jelenti azt, hogy az A esemény elég hosszú kísérletsorozatban sem következik be”, és hasonlóan: „Az A. elvből semmiképp sem következik, hogy nagyon nagy számú, n hosszúságú kísérletsorozatra *minden* sorozatban az m/n hányados kicsit fog különbözni $P(A)$-tól” – teszi világossá Kolmogorovnak a szakasz végéhez fűzött két megjegyzése.

[5] Von Mises frappáns reakciója a Cournot-szabályra a következő volt: ha két speciális értékre, tudniillik a 0-ra és az 1-re feltesszük, hogy ott a valószínűség megegyezik a bekövetkezéssel, vagyis (triviális értelemben) a frekvenciával, akkor miért nem azonosítjuk a valószínűséget a többi értékre is a relatív gyakorisággal, vagyis miért nem képviseljük kezdettől fogva a frekvencia-interpretációt?

tékben fog hinni abban, hogy az események relatív gyakorisága egy végtelen sorozatban *p*. Ha a *p* betűt a *propensity*-interpretációnak megfelelően valamilyen kauzális tendenciaként interpretáljuk, amelynek megfelelően a fizikai környezet az esemény bekövetkezését előidézi, akkor a tétel a következőt fogja jelenteni: ha egy adott esemény *p* mértékben hajlamos bekövetkezni, akkor (ismét feltételezve a hajlamok függetlenségét) az események egy olyan végtelen sorozatának, amelyben a relatív gyakoriság megegyezik *p*-vel, 1 lesz a bekövetkezési hajlama. Látható, hogy mindhárom állítás empirikus – igazolásukhoz többek között olyan dolgokat kell tudnunk, hogy hogyan teszteljük végtelen sorozatok sorozatát, hogyan mérjük végtelen sorozatok relatív gyakoriságára vonatkozó hiteinket, illetve az ilyenek létrehozására vonatkozó *propensity*t. Ezek tesztelése jelenthet gondot, mindenesetre a nagy számok törvényei, mint matematikai állítások elvben mindhárom értelmezéssel kompatibilisek, vagyis semmilyen módon nem tüntetik ki a valószínűség relatívgyakoriság-interpretációját. Ha igaza van tehát von Platónak abban, hogy Kolmogorov frekventizmusát a nagy számok törvényére, a Cournot-szabályra és a függetlenség posztulálására építette, akkor helytelenül járt el. Az elmélet és a tapasztalat közötti szakadékot éppen olyan kevéssé lehet áthidalni a gyakorlati bizonyosság fogalmával, mint von Misesnél az aszimptotikus relatív gyakoriság segítségével. De akár így, akár úgy – tény az, hogy Kolmogorovot a valószínűség mértékelméleti kanonizációja ellenére élete végéig nyugtalanította a valószínűség tapasztalati alkalmazhatóságának kérdése. Későbbi erőfeszítéseit éppen az határozta meg, hogy a mértékelméleti megfogalmazás mellett érvényt szerezzen a relatív gyakoriságra és a véletlenszerűségre érzékenyebb valószínűségfogalomnak. Ezek a kutatások vezették azután az algoritmikus randomitás és a Kolmogorov-komplexitás [4] megalkotásához.

Irodalom

1. R. von Mises: *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit.* Berlin, 1928.
2. A. N. Kolmogorov: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Springer, 1933;
   magyarul: *A valószínűségszámítás alapfogalmai.* Gondolat Kiadó, 1982.
3. J. von Plato: *Creating Modern Probability.* Cambridge University Press, 1994.
4. A. N. Kolmogorov: Three approaches to the quantitative definition of information. *Problemy Perdaci Informacii 1* (1965) 4–7.

HELL MIKSÁRÓL, AKI 1769-BEN ELSŐKÉNT MÉRTE MEG A NAP–FÖLD-TÁVOLSÁGOT

Abonyi Iván
ELTE Elméleti Fizikai Tanszék

Amikor *Hell Miksa* (1720–1792) a Nap–Föld-távolság méréséről gondolkodni kezdett, a Naprendszerről a következőket lehetett tudni. *Johannes Kepler* (1571–1630) híressé vált tapasztalati törvényei egyszerű képet adtak a Naprendszerről. Ennek központja a Nap, a bolygók a Nap körül síkmozgást végeznek, de úgy, hogy a Nap és az adott bolygó közt lévő távolság egyenes darabja, a vezérsugár egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol. A bolygók tehát síkgörbe pályát futnak be, méghozzá ellipszist, amelynek egyik gyújtópontja a Nap. Különböző bolygók pedig úgy keringenek a Nap körül, hogy az ellipsziseik fél nagytengelyei (a_k) és a keringési idő (T_k) között az

$$\frac{a_k^3}{T_k^2} = \text{konstans}$$

összefüggés áll fenn. Így hangzanak tehát a Kepler-törvények.

*Isaac Newton*nak sikerült a bolygómozgást a mozgásegyenletek alapján úgy leírni, hogy azok számot adhattak a Nap és a bolygó között érvényes kölcsönhatás, az általános tömegvonzás néven elnevezett, akkor még hipotetikus erőhatásról. Ezáltal a síkmozgás, a területi sebesség állandóságának elve és a kölcsönhatási erő magyarázatot nyert, csakhogy a Kepler-törvényekben szereplő mennyiségek, a Nap és a bolygó tömege, a Naptól mért távolság, a tömegvonzási erőben szereplő gravitációs állandó még ismeretlen maradt. Pontosabban: a newtoni magyarázat konkrét célokat tűzött ki a kutatás elé: ezeket a mennyiségeket kell valahogyan a kísérletező ember számára hozzáférhetővé, megmérhetővé tenni. Amikor ez bekövetkezett, mondjuk a Newton *Principia mathematica philosophiae naturalis* (A természetfilozófia matematikai alapelvei) [1] című művének megjelenésekor, 1687-ben, a kíváncsi ember számára a kutatómunka előtt konkrét feladatok fogalmazódtak meg. Ezeket fogjuk az alábbiakban sorra bemutatni.

A távolságok problémája

A Föld mérete

A Kepler-törvények sajátos kopernikuszi módon a *Naptól mért bolygótávolságokról* szólnak. Igaz, nem Kepler, vagy Newton, illetve nem is *Kopernikusz* (1473–1543) volt az első, akiben felmerült ez a probléma, hanem az