bizton állíthatjuk, a sokrétű ellenőrzés elveti a hibás nézeteket. Ne legyünk mindentudók, ha valamit nem tudunk, kérjünk segítséget! Sajnos nehéz megmondani, pontosan milyen forrásból szerezhetők be megbízható ismeretek. Ha próbálkozásunk kudarcba fulladt, egy új ismeretet nem tudunk sem megerősíteni, sem megcáfolni, bátran mondjuk meg: ez az információ ellenőrizetlen. Előbb-utóbb ki fognak alakulni azok a csatornák, amelyek révén megbízható tudásra tehetünk szert.

Legyünk racionálisak, fogadjunk mindent egészséges kétkedéssel! Tartsuk karban az ellenőrzési mechanizmusokat: legyenek viták, beszélgetések. Az LHC-vel kapcsolatos tévhiteket ki lehetett volna szűrni, ha a kérdést megvitatják (pl. egy szemináriumon). Vegyük észre azonban, hogy senkit sem lehet kényszeríteni nézetei megváltoztatására. Az nem szokásos, hogy egy intézeti belső jelentésre ráírják, hogy X és Y ezt badarságnak tartja, de a Tudományos Tanács (egyébként teljesen formális) jóváhagyására sincs szükség a jelentés kiadásához. Az esetek többségében azonban elegendő, ha a jelentésen ott találjuk a lektor nevét (ez gyakran az adott munka vezetője). A viták jól szolgálják az információáramlást. Adjuk át tapasztalatunkat, vegyük át másokét.

Azoknak, akik abból jutnak jövedelemhez, hogy avítt ismeretekkel traktálják a diákokat, azt ajánlom, inkább versenytársainknak adják át nézeteiket, fölösleges rontaniuk a hazai, amúgy is egyre romló versenyképességet. Ha valakinek van ötlete, hogyan lehetne ezt elérni, kérem közölje a szerzővel vagy a szerkesztőséggel!

A FIZIKA TANÍTÁSA

ÉSZREVÉTEL EGY MEGOLDÁSHOZ A KÖMAL P. 4225. FELADATA KAPCSÁN

Holics László
Budapest

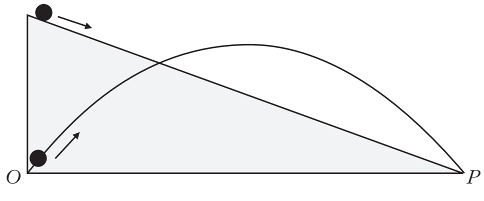
Az egyik soproni Vermes Miklós fizikaversenyen *Vermes Miklós* tanár úr példatárában található feladat szerepelt, nyílván a könnyítés érdekében tett kis változtatással (*KöMaL* 2010/5 P. 4225 feladata). Az *eredeti* szöveg így hangzott: „Egyszerre indul egy golyó az α szögű lejtő tetejéről és egy golyó *O*-ból ferdén elhajítva. *P* pontba egyszerre érkeznek, egyenlő sebességgel (lásd *ábra*). Mekkora szögben kellett a második golyót elhajítani?” (Vermes Miklós: *Mechanika példatár.* Műszaki Kiadó, Budapest, 1972, 60. feladat.)

A Vermes-verseny Feladatkitűző Bizottsága elhagyta a második követelményt, hogy *P*-ben a két golyó sebessége egyenlő nagyságú legyen. Ezzel a könnyítéssel a *KöMaL*-ban közölt megoldás kifogástalan, és az elhajítás szögére a lejtő (tetszőleges!) α szögének függvényében a feladat megoldásaként a következő összefüggést adta:

$$\beta = \operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right),$$

vagyis *bármely* α szögű lejtő esetén található egy olyan β szög, amely alatt *O*-ból elhajítva a golyót, egyszerre érkezik a *P* pontba a lejtőn lecsúszó golyóval. (Mind az eredeti, mind a P. 4225. feladat megoldásában kiesik a hajítás kezdősebessége, valamint a *g* nehézségi gyorsulás.)

Ábra a Vermes Miklós féle példatárban megjelent feladathoz.



A Vermes féle példatárban található „megoldásban” tanulságos hiba bújik meg. A megoldás szerint a kérdezett hajítási szög egyetlen képletbe foglalható a lejtő hajlásszögének függvényében (az eredeti jelöléssel):

$$\cos x = \frac{\cos\alpha}{2},$$

ahol *x* az elhajítás szöge (amit a versenybeli megoldás β-val jelöl).

A valóság azonban az, hogy az idézett „eredmény” a kettős követelménynek (azonos idő, egyenlő sebesség) csak szükséges, de *nem elégséges* feltételét adja meg! Ebből az eredményből az következne, hogy *bármekkora* szögű lejtőhöz található olyan hajítási irány, amelyben *O*-ból eldobva a golyót, azonos sebességgel és ugyanabban az időben érkezik a lejtőn mozgó golyóval *P*-be. Ennek ellenőrzésére vagy cáfolatára fel kell venni egy számszerű adatot, hogy egy tetszőleges szögű lejtővel megoldható-e a feladat.

Legyen a lejtő magassága h = 1,25 m, hajlásszöge például α = 60°! Először keressük meg a megoldás által meghatározott β hajítási szöget!

$$\beta = \arccos\frac{\cos\alpha}{2} = \arccos\frac{\cos 60°}{2} = 75{,}522°.$$

A lejtőn lecsúszó test végsebessége

$$v = \sqrt{2\,g\,h} = \sqrt{25\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

A lecsúszás ideje:

$$t_{cs} = \frac{v}{g\sin\alpha} = \frac{5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\sin 60°} = 0{,}5774\ \mathrm{s}.$$

Ha megköveteljük, hogy az elhajított golyó P-beli sebessége is 5 m/s nagyságú legyen, akkor az indítási sebességének is ekkorának kell lennie (azonos szintre érkezik!). Mennyi idő alatt ér az eldobott golyó P-be? A hajítási idő képlete alapján

$$T = \frac{2\,v\sin\beta}{g} =$$

$$= \frac{2\cdot 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\sin 75{,}522°}{10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0{,}9682 > 0{,}5774\ \mathrm{s},$$

ami azt jelenti, hogy noha valóban azonos nagyságú sebességgel ér mindkét test a P pont *x koordinátájú* helyére, de az elhajított golyó még a levegőben van, vagyis nem is találkoznak, mert a hajítás távolsága

$$x_{\max} = \frac{v_0^2\sin 2\beta}{g} = \frac{25\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\sin(2\cdot 75{,}522°)}{10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 1{,}21\ \mathrm{m}!$$

Ha megköveteljük, hogy a két test futásideje P-ig azonos legyen, sebességük lesz különböző: ha $T = t_{cs}$ akkor az elhajított golyó sebessége (O-ban és P-ben egyaránt)

$$v = \frac{g\,T}{2\sin\beta} = \frac{10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0{,}5774\ \mathrm{s}}{2\sin 75{,}522°} = 2{,}982\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} < 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

azaz a két követelmény nem teljesül egyszerre. Sőt, mi több, nem is a P-ben találkoznak, hanem csak az y koordinátájuk (szintjük) lesz azonos, mert ennek a sebességnek a vízszintes komponensével az adott idő alatt az elhajított test csak

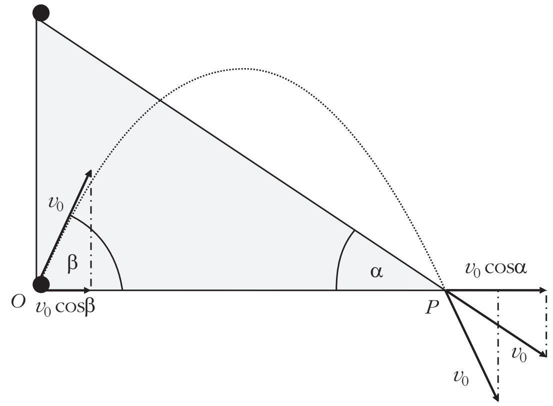
$$x = v\cos\beta\ T =$$

$$= 2{,}982\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\cos 75{,}522°\cdot 0{,}5772\ \mathrm{s} = 0{,}430\ \mathrm{m}$$

utat tesz meg, míg a P pont az O-tól

$$d = \frac{h}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{1{,}25\ \mathrm{m}}{\mathrm{tg}60°} = 0{,}722\ \mathrm{m}\text{–re van!}$$

Az eredeti feladat követelményei egyszerre csak egyetlen, meghatározott hajlásszögű lejtő esetén telje-



Ábra a megoldáshoz, az itt szereplő v_0 a szövegben v_{baj}, illetve v_{cs} és azonosságuk miatt csak egyszerűen v-vel szerepel.

síthetők az egyetlen hajítási szöggel. Ennek meghatározása a következő.

Megoldás. Keressük először a hajítás β szögét! Az adatokat a mellékelt *ábra* tartalmazza. Írjuk fel azokat az összefüggéseket, amelyeket biztosan tudunk a folyamatról!

Az elhajított test akkor érkezik a lecsúszó testtel egyszerre a lejtő P pontjába, ha kezdősebességének vízszintes komponense megegyezik a lejtőn lecsúszó test átlagsebességének vízszintes komponensével. Az átlagsebesség viszont – egyenletesen gyorsuló mozgás lévén – a végsebesség fele, tehát:

$$v_{baj}\cos\beta = \frac{v_{cs}}{2}\cos\alpha,$$

ahol β a hajítás szöge, α a lejtő hajlásszöge. Figyelembe véve azt a követelményt, hogy azonos nagyságú sebességgel érkezzenek P-be, a sebességekkel egyszerűsíthetünk:

$$\cos\beta = \frac{\cos\alpha}{2}. \qquad (1)$$

A két szög között ennek az összefüggésnek feltétlenül fenn kell állnia, de ez nem jelenti azt, hogy a feladatnak *bármely* α szög megfelel!

További összefüggések, amelyeknek teljesülni kell: a hajítás ideje meg kell, hogy egyezzék a lecsúszás idejével. (Ha csak az (1) követelményt elégítjük ki, az elhajított test x koordinátája megegyezik ugyan a lecsúszó test x koordinátájával a P pontban, de az y koordinátája korántsem lesz addigra 0!) Ebből a követelményből adódik, hogy $t_{hajítás} = t_{csúszás}$, azaz:

$$\frac{2\,v_{baj}\sin\beta}{g} = \frac{v_{cs}}{g\sin\alpha},$$

vagyis a szögek között még egy összefüggésnek kell teljesülnie. Ez azt jelenti, hogy csak egyetlen szögpár esetén teljesülhetnek a feladat követelményei! Egyszerűsítés után:

$$2\sin\beta = \frac{1}{\sin\alpha}. \qquad (2)$$

Az (1) és (2) egyenletrendszert megoldjuk. A pitagoraszi összefüggéssel áttérünk koszinuszokra, mert az (1) egyenlet azok között ad összefüggést. A (2) egyenlet négyzetre emelve:

$$4\left(1-\cos^2\beta\right) = \frac{1}{1-\cos^2\alpha}.$$

(1)-ből $\cos\alpha = 2\cdot\cos\beta$ helyettesítésével:

$$4\left(1-\cos^2\beta\right) = \frac{1}{1-4\cos^2\beta}.$$

A nevezővel szorzunk:

$$4\left(1-\cos^2\beta\right)\left(1-4\cos^2\beta\right) = 1.$$

A kijelölt műveleteket elvégezzük:

$$4-4\cos^2\beta-16\cos^2\beta+16\cos^4\beta = 1.$$

Az egyenletet rendezzük:

$$16\cos^4\beta-20\cos^2\beta+3 = 0.$$

Ennek az egyenletnek $\cos^2\beta$-ra a megoldása:

$$\cos^2\beta = \frac{20\pm\sqrt{400-4\cdot16\cdot3}}{2\cdot16} = \begin{matrix}1{,}07569\\0{,}17431\end{matrix}.$$

Csak a második értéknek van értelme:

$$\cos\beta = \sqrt{0{,}17431} = 0{,}41750,\ \text{tehát}$$

$$\beta = \arccos 0{,}41570 = 65{,}32°.$$

A feladat eredeti kérdésére válaszoltunk. Érdekelhet minket azonban az is, hogy mekkora a hajlásszöge annak a lejtőnek, amely esetén egyáltalán teljesülhet a feladat mindkét követelménye (egyszerre érkezzenek a P pontba és ott azonos legyen a sebességük nagysága). Az (1) egyenletből következik, hogy

$$\cos\alpha = 2\cos\beta =$$

$$= 2\cos 65{,}32° = 2\cdot0{,}41750 = 0{,}83501,$$

tehát

$$\alpha = \arccos 0{,}83501 = 33{,}38°.$$

Egyetlen más lejtőn sem sikerülhet a mutatvány. A kezdősebesség nagyságától független az adat, a különböző kezdősebességek esetén a pályák hasonlósági transzformációkkal egymásba átvihetők.

Ellenőrzés és összehasonlítás a KöMaL P 4225 feladatával

Legyen a lejtő magassága h = 1,25 m! Ekkor a lejtő d alapja

$$d = \frac{h}{tg\alpha} = \frac{1{,}25\ \text{m}}{\text{tg}33{,}38°} = 1{,}897\ \text{m},$$

a lecsúszó test útja

$$s = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{1{,}25\ \text{m}}{\sin 33{,}38°} = 2{,}27\ \text{m}.$$

A lecsúszó test sebessége

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot1{,}25\ \text{m}} = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ekkorának kell lennie a ferdén elhajított golyó sebességének is. A leérkezés ideje:

$$t_{cs} = t_{haj} = \frac{2s}{v} = \frac{2h}{v\sin\alpha} =$$

$$= \frac{2\cdot1{,}25\ \text{m}}{5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot\sin 33{,}38°} = 0{,}9088\ \text{s}.$$

A hajítási időnek valóban ekkorának kell lennie (vagyis azonos sebességgel, egyszerre lesz a két golyó P-ben):

$$t_{haj} = \frac{2v\sin\beta}{g} = \frac{2\cdot5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot\sin 65{,}32°}{10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0{,}9088\ \text{s}.$$

Végül: valóban a P-ben találkoznak, ugyanis a hajítás távolsága a kezdeti adatokkal kifejezve:

$$x_{\max} = \frac{v_0^2\sin2\alpha}{g} =$$

$$= \frac{25\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\cdot\sin(2\cdot65{,}32°)}{10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1{,}897\ \text{m},$$

és a lejtő alapjának hossza:

$$d = \frac{h}{\text{tg}\alpha} = \frac{1{,}25\ \text{m}}{\text{tg}33{,}38°} = 1{,}897\ \text{m}.$$

Természetesen kielégül a *KöMaL*-feladat megoldásának egyenlete is:

$$\frac{1}{\text{tg}\beta} = \frac{1}{2}\sin2\alpha,$$

tehát

$$\frac{1}{\text{tg}65{,}32°} = \frac{1}{2}\sin(2\cdot33{,}38°),$$

ahol

$$\frac{1}{\text{tg}65{,}32°} = 0{,}4595,$$

$$\frac{1}{2}\sin(2\cdot33{,}38°) = 0{,}4594.$$

(A kis eltérés a kerekítésekből származik.)