

A PAJTA-RÚD PARADOXONRÓL

Hraskó Péter
PTE Elméleti Fizika Tanszék

A pajta-rúd paradoxon a Lorentz-kontrakcióban rejlő látszólagos ellentmondásra mutat rá. Az ellentmondás feloldásához köztudottan egy másik „paradoxont”, az egyidejűség relativitását kell segítségül hívni, de ez önmagában még nem elegendő a pajta-rúd paradoxon feloldásához. Azt is figyelembe kell venni, hogy a mechanikai hatások még a köznap értelemben szilárdnak tekinthető testekben sem terjedhetnek a fénynél gyorsabban. Ha ez nem így volna, a paradoxon a relativitáselmélet igazi cáfolata lenne. Az alábbiakban újramesélem a paradoxont, ezúttal egy vérfagyasztó krimibe ágyazva.

A paradoxon

Egy rablóbanda elhatározza, hogy kirabol egy kincszállító vonatot. A terv alapja az, hogy a vonat áthalad egy alagúton. A banda az alagút két bejáratára titokban erős, kapuszerű sorompót szerel fel, amelyeket rádiójellel lehet lezárni. Az egyik bandatag az alagút két végétől egyenlő távolságra lévő pontban helyezkedik el a jeladóval (1. ábra) és a bandavezértől azt a parancsot kapja, hogy amikor a vonat eltűnik az alagútban, hozza működésbe a sorompókat. Az alagútban rekedt vonat azután a banda többi tagja elfoglalja és kifosztja.

A bandavezér azonban váratlan üzenetet kap a szerelvény összeállításában segédkező egyik vasutasától, aki a bűntársa. Eszerint a szerelvény hosszabb, mint amire számítottak, véletlenül pont olyan hosszú, mint az alagút, ezért az akciót le kell fújni. A bandavezér azonban, aki főállásban elméleti fizikus, megnyugtatta az informátort: a Lorentz-kontrakció miatt a vonat teljes egészében el fog férni az alagútban, a terv tehát végrehajtható marad.

A vonat elindulása után a titkosszolgálat valahogy megneszeli a készülő rajtaütést és mobiltelefonon utasítja a vonatvezetőt, hogy azonnal állítsa le a vonatot. A vonatvezető azonban jó volt fizikából és megnyugtatta a titkosszolgálat emberét: az alagút a vonat-

hoz képest Lorentz-kontrakciót szenved, a vonatnak legalább az egyik vége biztosan ki fog lógni az alagútból, ezért a jeladónál figyelő bandatagnak nem lesz alkalma beindítani a sorompók működését.

Kinek van igaza, a bandavezérnek vagy a vonatvezetőnek? És miben tévedett a másik?

A magyarázat

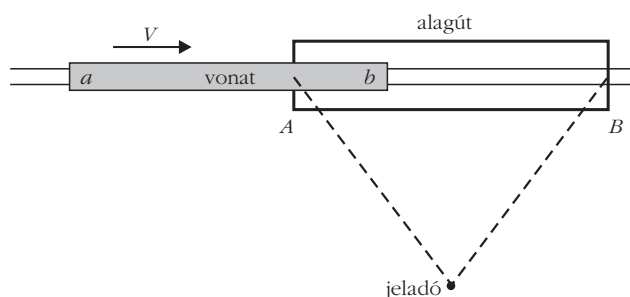
A bandavezérnek van igaza. A jeladó szimmetrikus helyzetben nyugszik az alagút A és B végpontjához képest, ahol a sorompókat a banda felszerelte. Az alagút (vagyis a vasúti töltés) \mathfrak{S} nyugalmi rendszerében ezért a sorompók zárása egyidőben történik. A vonat az \mathfrak{S} -hez képest V sebességgel mozog, ezért Lorentz-kontrakciót szenved. A feladat szerint a nyugalmi hossza egyenlő az alagút nyugalmi hosszával, így a Lorentz-kontrakció következtében \mathfrak{S} -ben rövidebb, mint az alagút: Amikor a vonat a vége eltűnik az alagút A bejáratánál, az eleje (b pontja) még nem éri el az alagút B kijáratát. Ezért ha a jeladót ebben a pillanatban működésbe hozzák, a vonat valóban bent ragad az alagútban, és a banda megrohanhatja.

Természetesen jól fel kell szerelkezniük lángvágókkal, mert a B kijáratú kapuba történő beleütközés következtében a szerelvény hossza még a mozgási hosszánál is rövidebbre préselődik össze. A vonat elejének (a b pontnak) a hirtelen lefékeződésénél keletkező „löket” ugyanis legfeljebb fénysebességgel haladhat végig a vonaton, és ennek következtében a vonat vége (az a pont) egy ideig még mozgásban marad a vonat elejének hirtelen leállása után is.

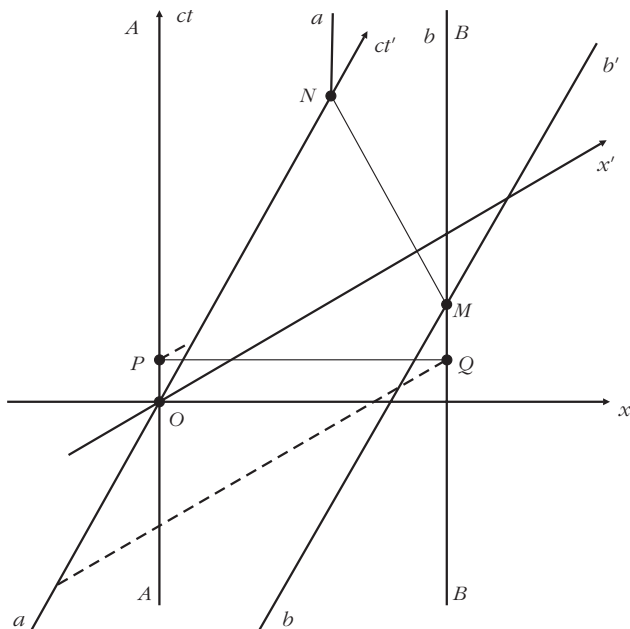
Miben tévedett a vonatvezető? Abban teljesen igaza volt, hogy a vonat nyugalmi rendszerében az alagút Lorentz-kontrakciót szenved, és ennek következtében, *ha nem zárnák le az alagutat*, a vonatnak legalább az egyik vége mindig biztosan kilógna. Azonban nem vette figyelembe az egyidejűség relativitását, amelynek következtében a vonat \mathfrak{S}' nyugalmi rendszerében a sorompók működése nem egyidőben történik, és azt sem, hogy a hatások még a hétköznapi értelemben szilárd anyagokban sem terjedhetnek a fénynél gyorsabban.

A vonat \mathfrak{S}' nyugalmi rendszeréből nézve az események lefolyása a következő. Mivel az alagút a vonathoz képest $-V$ irányban mozog, a jeladóból a B felé haladó rádiójel előbb zárja le a B sorompót, mint a másik rádiójel az A sorompót.¹ Amikor a B -beli so-

1. ábra. A helyszín.



¹ Az alagúttal együtt a jeladó is mozog, de ennek nincs jelentősége, mert a rádiójelek sebessége független az adó mozgásától.



2. ábra. Az események tér-idő ábrája.

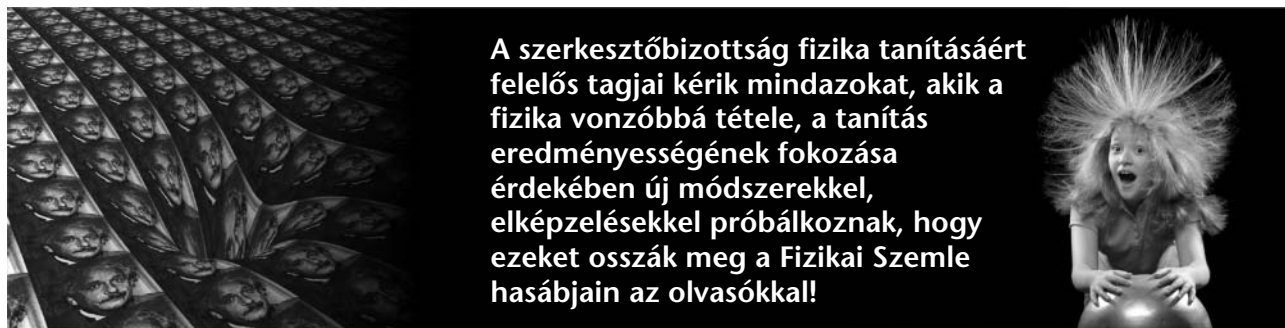
rompó beleütközik a *nyugvó* vonat *b* elejébe, a vonat vége (az *a* pont) az alagút Lorentz-kontrakciója következtében még kilóg az alagútból és a lökés véges terjedési sebessége következtében egy ideig még nyugalomban marad. Még akkor is nyugalomban lesz, amikor az *A* kapu áthalad rajta és az egész vonat elnyeli az alagút. A vonat elejéből kiinduló lökés csak ezután éri el a vonat végét. Ettől a pillanattól kezdve hurcolja magával az alagút az egész összeroncsolt vonatot, amelynek a hossza a roncsolódás következtében még a mozgási hosszánál is rövidebb, hiszen különben nem férne el a *V* sebességgel mozgó alagútban, amelynek mozgási hossza megegyezik a vonat *S*-beli mozgási hosszával a leállás előtt.

Ez a két forgatókönyv Lorentz-transzformáció segítségével igazolható, de ezzel egyenértékű, ha a tér-idő ábrán demonstráljuk a helyességüket (2. ábra). A koordináta-rendszer *O* origója az az esemény, amikor a vonat *a* végpontja és az alagút *A* bejárata éppen egybeesik. Az alagút az *AA* és a *BB* világvonalak közötti sávot foglalja el. Ha a sorompókat nem hoznák működésbe, a vonat a *ct'* tengely és a *bb'* egyenes közötti sávot foglalná el. A vonat és az alagút nyugalmi hosszának egyenlőségét az fejezi ki, hogy a *BB* egyenes és az *x*-tengely metszéspontja, valamint a *bb'*

egyenes és az *x'*-tengely metszéspontja ugyanazon az $x^2 - c^2 t^2 = l_0^2$ hiperbolán van rajta (ezt a hiperbolát nem ábrázoltuk). A rajz mutatja, hogy *S*-hez viszonyítva a vonat teljesen elfér az alagútban, az *S'*-höz viszonyítva azonban az alagút fér el teljesen a vonat hosszán belül. Ez utóbbi állítás abból következik, hogy az *x'* tengellyel párhuzamos *t' = konstans* egyeneseken kis negatív *t'*-nél az alagút végpontjai a vonat sávján belülre esnek. Az alagút *A* sorompójának a bezárása a *P*, a *B* sorompójának bezárása pedig a *Q* esemény. Az alagút *S* vonatkoztatási rendszeréhez rögzített vesszőtlen *R*-ben ez a két esemény ugyanabban a pillanatban történik, ezért az őket összekötő egyenes párhuzamos az *x*-tengellyel. A sorompók működése következtében a vonat most az *aONa* és a *bMb* közötti sávot foglalja el. A vonat *b* elejének beleütközése a *B* sorompóba az *M* esemény. Ettől kezdve a vonat eleje és az alagút *B* kijárata ugyanazon a (fügőleges) világvonalon fekszik. Az ütközés által okozott hatás az *M* → *N* világvonalon terjed a vonaton visszafelé és az *N* pontban éri el a vonat elejét, amely ekkor áll meg. Az *MN* szakasz 45° -nál kisebb szöget zár be a *ct* tengellyel, mert a lökés terjedési sebessége *c*-nél kisebb.

A vonat sebességével mozgó *S'*-hez rögzített vesszős koordináta-rendszerben a *ct' = konstans* vonalak az *x'* tengellyel párhuzamos egyenesek. Ennek alapján jól látható, hogy a *B* sorompó zárása *S'*-ben előbb következik be, mint az *A*-é: az előbbi esemény negatív *t'*-nél, az utóbbi pozitív *t'*-nél történik. Ezek közé esik a *t' = t = 0* pillanat, amikor a vonat *a* vége is eltűnik az alagútban.

Vegyünk észre, hogy amikor új koordinátákra térünk át az *x*-tengelyt és a *ct*-tengelyt, mint egy ollót nyitjuk és zárjuk a 45° -os egyenesre szimmetrikusan. A tér-idő ábrának azokkal az elemeivel, amelyek fizikai tényeket ábrázolnak (ilyenek az *O*, *P*, *Q*, *M*, *N* események, az alagút és a vonat végpontjainak világvonalai, a vonaton végigfutó löket világvonala, valamint a fényjelek $\pm 45^\circ$ -os világvonalai) eközben *nem történik semmi*. Ebből nyilvánvaló, hogy ha egy történet összefér a relativitáselmélettel valamilyen inerciarendszerben, akkor ez egy olyan tény, amelyen csupán a nézőpont áthelyezésével egy másik inerciarendszerbe nem lehet változtatni. A vonatvezetőnek illetet volna ezzel tisztában lennie, ha tényleg olyan jó volt fizikából. A vonat biztonságát csak úgy garantálhatta volna, ha hibát mutat ki a bandavezér elgondolásában.



A szerkesztőbizottság fizika tanításáért felelős tagjai kérik mindazokat, akik a fizika vonzóbbá tétele, a tanítás eredményességének fokozása érdekében új módszerekkel, elképzelésekkel próbálkoznak, hogy ezeket osszák meg a Fizikai Szemle hasábjain az olvasókkal!