A KOCHLEOID VONALZÓ

Laczik Bálint
BME Gyártástudomány és -technológia Tanszék
Lakos Péter
Gravitás 2000 Kft.

A kör négyszögesítése az eleve kilátástalan törekvés szinonimája. Kissé tárgyszerűbben: a klasszikus körzős-vonalzós (euklideszi) szerkesztésekkel nem állítható elő olyan négyzet, amelynek területe, avagy kerülete egy adott kör területével (kerületével) egyezik.

Tehát egy tetszőleges körívvel egyező hosszúságú egyenes szakasz sem szerkeszthető.

Az elvi korlátokba ütköző, többé-kevés közismert szerkesztési feladatok nagyrészt az antik görög geometriából származnak. A szögharmadolás, kockakettőzés stb. feladatok azonban valamilyen különleges geometriai eszköz segítségével megoldhatók.

A magyar matematikai irodalom gyöngyszeme, *Szőkefalvi Nagy Gyula A geometriai szerkesztések elmélete* című kötete (Akadémiai Kiadó, Bp., 1968) nagyszerű bevezetést ad e tárgykörbe.

Az euklideszi eszközökkel *nem* szerkeszthetőség szabatos bizonyításai mellett különösen érdekesek a feladatok megoldását más úton biztosító, különleges vonalzók és csuklós mechanizmusok.

A matematikatörténet méltatlanul feledett tudósa, *Sipos Pál* (1759–1816) kochleoid vonalzója[1] a körív „kiegyenesítésének” (rektifikálásának) igen ötletes eszköze.

Sipos Pál életútját és munkásságát az [1–4] források részletesen ismertetik. A kochleoid görbe rövid leírása az [5], a jelen cikkhez kapcsolódó, működő Maple worksheet a [6] Internet-oldalon található.

A k paraméterű kochleoidot[2] azon $k = AP_0$ hosszúságú körívek P_0, …, P_i, …, P_m, … végpontjai alkotják, amelyek közös kezdőpontja A, és az A pontbeli közös érintőjük az A és P_0 pontokra fektetett egyenes (*1. ábra*).

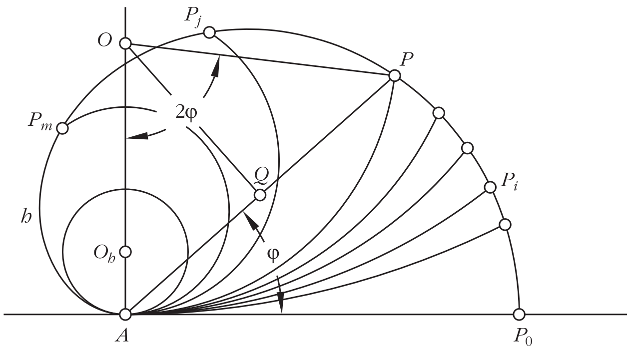
Az AP ív középpontja O, sugara $OA = OP = R$. Jelölje φ az A csúcsú, a P és P_0 pontokon átmenő szárakkal definiált szöget. Az AP húr hossza a húr Q felezőpontjával szerkesztett AQO és QPO (az OQ egyenesre tükörszimmetrikus) derékszögű háromszögek alapján $AP = 2R\sin\varphi$. (Az O csúcspontú, az A és Q pontokon átmenő szárakkal definiált szög – a megfelelő szögszárak merőlegessége okán – nyilvánvalóan φ.)

Az AP ív hossza $2R\varphi = k$, azaz

$$R = \frac{k}{2\varphi},$$

[1] A különleges vonalzót a szakirodalom izométerként is említi.

[2] A görbe neve a latin cochlea = éticsiga, illetve csigaház kifejezésből származik [7].



1. ábra. A kochleoid görbe sajátosságai.

tehát az *AP* húr hossza

$$AP = k\frac{\sin\varphi}{\varphi}.$$

Az $R \to \infty$ ív határalakzata a k hosszúságú AP_0 szakasz, a $P \to A$ határalakzat az

$$R = \frac{k}{2\pi}$$

sugarú (az *1. ábrá*n *h*-val jelölt, O_h középpontú) kör.

Az *O* középpontú *AB* körív hosszával megegyező *AT* szakasz szerkesztése a *2. ábra* szerint történik.

1. A kochleoid $\varphi = 0$ paraméterű *AS* polársugarát érintőként a rektifikálandó *AB* körív *A* kezdőpontjához illesztjük.

2. Megszerkesztjük az *AB* húrt. A húr a kochleoidot a *P* pontban metszi. (A kochleoid *P* ponthoz tartozó polárszöge φ.)

3. A *P* pontot összekötjük a kochleoid *S* kezdő pontjával.

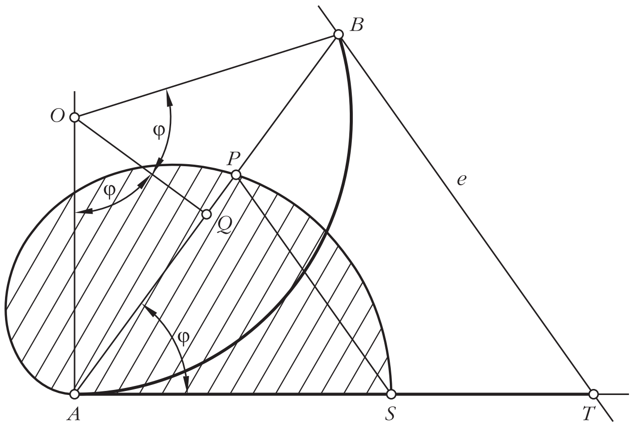
4. A körív *B* pontján át megszerkesztjük a *PS* szakasszal párhuzamos *e* egyenest, amely az *A* és *S* pontokon átmenő egyenest a *T* pontban metszi.

Az *AT* távolság éppen az *AB* körív keresett hosszával egyezik meg.

A szerkesztés helyessége könnyen igazolható.

Az *AB* körív *O* középpontjából az *AB* húrra állított merőleges a húrt a *Q* pontban metszi. Az *OQ* szakasz az *AB* ív középponti szögét felezi. Az *AB* ív középponti szöge 2φ, hiszen a kör *OA* sugara merőleges az *AT* egyenesre, az *AB* húr pedig *OQ*-ra.

2. ábra. Körív rektifikálása adott kochleoid segítségével.



Az $AQ = QB$ fél húrhossz az *AQO* (avagy a tükörszimmetrikus *QBO*) derékszögű háromszögekből $AQ = QB = R\sin\varphi$, a teljes húrhossz tehát $AB = 2R\sin\varphi$.

A kochleoid *AP* sugara

$$AP = k\frac{\sin\varphi}{\varphi}.$$

Az *A* csúcspontú, *AP*, illetve *AT* szárakkal adódó φ szöget a párhuzamos *AS* és *BT* szakaszokkal metszve az

$$\frac{AT}{AS} = \frac{AB}{AP}$$

arány adódik, tehát

$$AT = AS\frac{AB}{AP}.$$

Figyelembe véve, hogy $AS = k$, $AT = 2R\varphi$ éppen az *R* sugarú, 2φ középponti szögű körív elvileg pontos hossza.

Sipos Pál a kochleoiddal végezhető szerkesztést is tárgyaló dolgozatát 1795-ben a Berlini Tudományos Akadémia aranyéremmel díjazta. Sipos 1796-ban a Bécsben megjelenő *Magyar Hírmondó*ban közreadott hirdetéssel matematikai instrumentuma megvásárlására előfizetőket próbált gyűjteni. A kochleoid vonalzók (az egykorú szöveg szerint) „…egyforma magassággal fognak készíttetni rézből, és mindegyik külön-külön kapsulában lészen; a nyomtatásban kiadandó magyarázat vagy utasítás is mindegyik mellé lesz adva német nyelven. Egy darabnak a hozzá tartozó készülettel együtt az ára tétetett 4 forint 30 krajtzárra."

Sajnos – megannyi kutatás ellenére – sem sikerült kideríteni, egyáltalán készültek-e vonalzók?

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gyártástudomány és -technológia Tanszékén elkészítettük a kochleoid vonalzó néhány mintapéldányát.

A kézi szerkesztési pontosság (~0,03 mm) biztosításához a kochleoidpontok alkalmas száma szükséges. A görbe

$$\rho = \frac{k\sin\varphi}{\varphi} \tag{1}$$

polár egyenletéből képzett

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\rho = k\left(\frac{\cos\varphi}{\varphi} - \frac{\sin\varphi}{\varphi}\right) \tag{2}$$

deriválttal a görbe ívhossza a $0 \le \varphi \le \pi$ tartományban.

$$L = \int_0^\pi \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\rho\right)^2}\, d\varphi. \tag{3}$$

A $k = AS = 140$ mm értéket felvéve, a (3) ívhossz $L = 316{,}9842432$ mm, $n = 10\,000$ görbepontra a szomszédos pontok közötti

$$\Delta = \frac{L}{n} \cong 0{,}032 \text{ mm}$$

állandó ívtávolság adódik.

Az egyenletes távolságokban felvett görbepontok koordinátáit a $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_i, \ldots, \delta_n$ szögparamétereknél határoztuk meg, ahol a δ_i értékek ($i = 1, 2, \ldots, n$) az

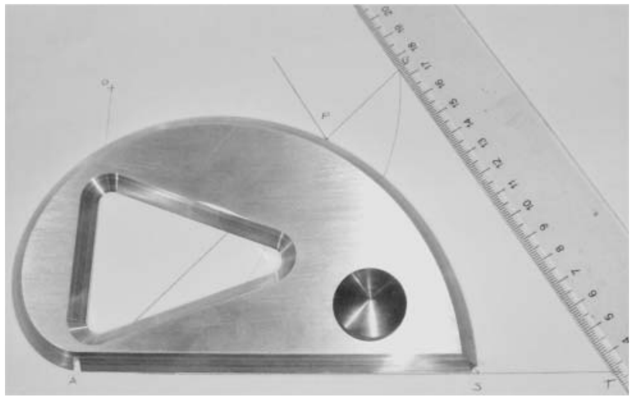
$$i\,\Delta = \int_0^{\delta_i} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\rho\right)^2}\, d\varphi. \qquad (4)$$

alakú egyenletek numerikus megoldásai. A pontok Descartes-koordinátái:

$$x_i = k\frac{\sin\delta_i}{\delta_i}\cos\delta_i, \qquad (5)$$
$$y_i = k\frac{\sin\delta_i}{\delta_i}\sin\delta_i.$$

A kochleoid görbe 10 000 pontjának koordinátáit a Maple 12 szimbolikus matematikai rendszerrel számítottuk, majd az alakzat pontláncát DXF formátumban állítottuk elő. A megmunkálás CNC-programját a Mastercam X2-es CAM-rendszer segítségével készítettük el (*3. ábra*).

Aligha remélhetjük, hogy a geometria oktatásához nélkülözhetetlen lesz e kedves kis eszköz. Úgy érezzük azonban, hogy elkészítésével és elméleti hátterének közreadásával múltunk egy méltatlanul feledett tudós nagysága előtt tiszteleghetünk.



3. ábra. Az elkészült kochleoid vonalzó.

Irodalom

1. Woyciechowsky-Jelitai József: Sipos Pál élete és matematikai munkássága. *Közlemények a Debreceni Tud. Egyetem Matematikai Szemináriumából VI* (szerk. Dávid Lajos) (1932) 11.
2. Jelitai József: Sipos Pál kézirata és a kochleoid. *Matematikai és Fizikai Lapok 41* (1934) 45–54.
3. Makkai Ernő: *Sipos Pál.* http://mek.oszk.hu/05400/05407/pdf/Makkai_Mat_Sipos.pdf
4. Weszely Tibor: A magyar matematika első aranyérmese, Sipos Pál (1759–1816), *Természet Világa 129* (1998) III. különszám, 11–15.
5. http://mathworld.wolfram.com/Cochleoid.html
6. http://www.maplesoft.com/applications/view.aspx?SID=6706
7. Finály H.: *A latin nyelv szótára*. Franklin Társulat, Budapest, 1884.