

KVANTÁLT VEZÉRLÉSI PROBLÉMÁK – I. RÉSZ

Megállítható-e fordított helyzetében a mozgatott felfüggesztésű inga?

Tél András, BME, I. éves mechatronika MSc hallgató

Czmerk András, BME Mechatronikai, Optikai és Gépészeti Informatikai Tanszék

Tél Tamás, ELTE Elméleti Fizikai Tanszék

Manapság széles körben kutatják azokat a problémákat, amelyekben a feladat egy rendszer instabil állapotba történő juttatása. Erre a célra általában szabályozást használnak, amelynek során visszacsatolásokkal beavatkozunk a rendszer dinamikájába.

A vezérlés és a szabályozás közötti különbség a visszacsatolás jelenlététől függ, a vezérlés során nem alkalmazunk visszacsatolást, vagyis kizárólag a kezdeti feltételek és a paraméterek helyes megválasztásával érjük el a kívánt viselkedést. A folyamat jobb ellenőrizhetősége miatt a szabályozás a modernebb, elterjedtebb technológia, de az érzékelő, beavatkozó áramkörök miatt bonyolultabb, és öngerjedés is feléphet.

A vezérlés akkor alkalmazható egyszerűen, ha a rendszer végállapota stabil. Mi történik, ha e feltétel nem teljesül, vagyis, ha a vezérléssel elérendő állapot *instabil*? Eljuttatható a rendszer csupán vezérléssel instabil nyugalmi állapotába?

Bevezetés

A feladat általános megoldása reménytelennek tűnik, az instabilitás miatt a vezérlés végrehajtása nem garantált. Ezért bevezetjük a *sikeres vezérlés* fogalmát,

Megjegyezzük, hogy a fordított inga az 1950-es évek óta gyakran használt berendezés a szabályozástechnikai laboratóriumokban. Megépített változata egy kocsin elhelyezett inga, amely általában egy egyenes mentén mozog. Szabályozással a legtöbb esetben az inga fordított helyzetben tartását tűzik ki célul a mérnökök, mások az ebbe a helyzetbe való eljuttatáson dolgoznak, ritkán előfordul, hogy egyszerre mindkét feladatra alkalmassá teszik a robotot [1]. A mai szabályozástechnikával már a fordított hármaskörű inga felállítására és megtartására sem jelent akadályt [2, 3].

amelyen azt értjük, hogy a vezérlési eljárással el tudjuk juttatni a rendszert az amúgy instabil állapotba.

Egyszerű modellként a fordított inga¹ mozgását vizsgáljuk a felfüggesztési pont valamilyen irányba történő, adott $a(t)$ függvény szerinti gyorsítása mellett). A gyorsítási függvény kezdeti maximális értékéről 0-hoz tart, és a függvény lecsengését egy τ időállandó írja le. A kérdés az, hogy az inga egy tetszőleges kezdeti állapotból eljuttatható-e felállított állapotába.

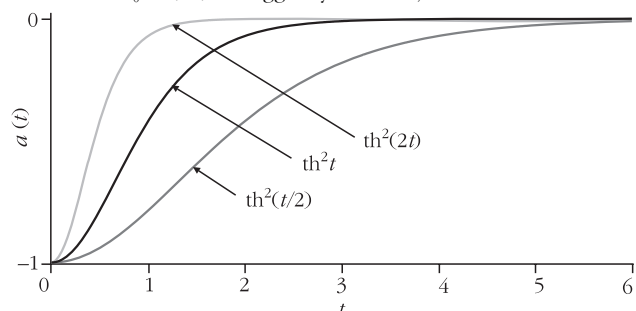
Dolgozatunkban a cél a fordított helyzetbe szabályozás nélkül történő eljuttatás. A fő kérdés: mennyire lehet a vezérlés sikeres?

Nem tudhatjuk, hogy sikeres vezérlés bármilyen $a(t)$ gyorsulás mellett lehetséges-e. Konkrét példaként az

$$a(t) = a_0 \left(\text{th}^2 \frac{t}{\tau} - 1 \right) < 0 \quad (1)$$

formát vizsgáljuk, ahol τ egy időállandó és a_0 a kezdeti gyorsulás nagysága. Szemléletesen fogalmazva, τ azt az időt jelöli, ahol a th^2 függvény a 0 és az 1 értékek között az átváltási folyamat közepéhez ér (1. ábra).

1. ábra. Az $a_0[\text{th}^2(t/\tau)-1]$ függvény a $\tau = 1/2, 1$ és 2 időállandókkal.



Szükség lesz a felfüggesztési pont helyzetének ismeretére is. A sebességre az (1) egyenlet integrálásából

$$v(t) = -a_0 \tau \operatorname{th} \frac{t}{\tau} + v_0 \quad (2)$$

adódik, ahol v_0 a felfüggesztési pont kezdősebessége. Hosszú idő után $\operatorname{th}(t/\tau) \sim 1$, így a $v_0 - a_0 \tau$ sebesség általában nem nulla. Szemléltetés céljából olyan mozgást érdemes vizsgálni, amelynek végén a felfüggesztési pont megáll. Ez csakis a $v_0 = a_0 \tau$ kezdősebességgel érhető el. Az origóból induló mozgás esetén az elmozdulás ekkor

$$s(t) = a_0 \tau \left[t - \tau \ln \left(\operatorname{ch} \frac{t}{\tau} \right) \right] \quad (3)$$

A felfüggesztési pont mozgása tehát olyan, hogy a nagy negatív kezdeti gyorsulás ellenére a pozitív $a_0 \tau$ kezdősebesség miatt végig pozitív irányú, s éppen a negatív gyorsulás vezet arra, hogy a mozgás egy idő után megáll. Hosszú idő után

$$\operatorname{ch} \frac{t}{\tau} \sim \frac{e^{t/\tau}}{2}, \quad (4)$$

így a pozitív irányban megtett teljes elmozdulás:

$$s_{\max} = a_0 \tau^2 \ln 2. \quad (5)$$

Az egyszerűség kedvéért csak az (1) gyorsulással függőlegesen és vízszintesen gyorsított inga esetét vizsgáljuk. A mozgásegyenlet numerikus szimulálása azt mutatja, hogy „sikeres vezérlés” mindkét esetben a τ időállandó bizonyos diszkrét értékeinél lehetséges. Ezért mondjuk, hogy a vezérlési probléma kvantált.

A függőlegesen gyorsított inga

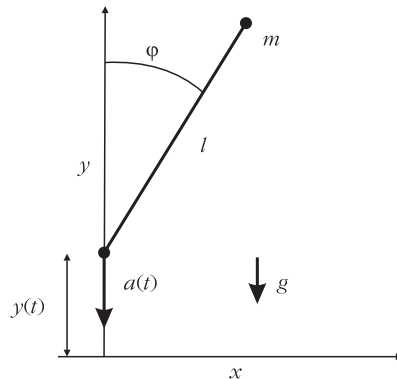
A nyugvó felfüggesztésű, l hosszúságú fordított inga mozgásegyenlete [4]

$$\ddot{\varphi} = \frac{g}{l} \sin \varphi, \quad (6)$$

ahol g a gravitációs gyorsulás abszolútértéke. A φ szöget érdemes a pozitív y tengellyel bezárt szöggént értelmezni (2. ábra), mert így a sikeres vezérlés éppen a $\varphi = 0$ állapotnak felel meg.

A függőleges egyenes mentén (1) szerint lefelé gyorsított inga egyenletét legegyszerűbben együttmozgó koordináta-rendszerben kapjuk meg. Ebben fellép egy felfelé, azaz pozitív irányba mutató $-a(t)$ tehetetlenségi gyorsulás, amely csökkenti a negatív irányba mutató g gravitációs gyorsulást. Az eredő gravitációs gyorsulás ezért $-a(t) - g$. Így a függőleges irányban gyorsított fordított inga mozgásegyenlete

$$\ddot{\varphi} = \frac{a(t) + g}{l} \sin \varphi. \quad (7)$$



2. ábra. A függőlegesen gyorsított fordított inga koordinátáinak értelmezése, m az l hosszúságú súlytalan rúd végén elhelyezkedő test tömege, amely azonban nem jelenik meg a mozgásegyenletben.

Az (7) egyenlet nemlineáris differenciálegyenlet. Jobb oldala ráadásul expliciten is függ az időtől, a differenciálegyenlet *nem autonóm*, vagyis a mozgás folytatását nem csak a test pillanatnyi helyzete és sebessége határozza meg, hanem egy külső hatás is.

Az (7) egyenlet alapján szemléletesen is világos, miért érhető el sikeres vezérlés. Nagy negatív kezdeti gyorsulás esetén a $-a(t) - g$ eredő gyorsulás eleinte pozitív, azaz olyan a helyzet, mintha a gravitációs gyorsulás *felfelé* mutatna. Ez stabilizálja a $\varphi = 0$ állapotot. Miután az $a(t)$ gyorsulás elegendően csökkent ahhoz, hogy az eredő is negatív legyen, akkortól már „csak” arra kell figyelni, hogy az inga az instabil állapota közelében maradjon és ahhoz közelítsen.

A konkrét (1) gyorsulásfüggvényt behelyettesítve a megoldandó differenciálegyenlet

$$\ddot{\varphi} = \frac{a_0 \left(\operatorname{th}^2 \frac{t}{\tau} - 1 \right) + g}{l} \sin \varphi. \quad (8)$$

Célszerű az egyenletet dimenziótlan alakra hoznunk. Válasszuk ezért az időegységet τ -nak, és t/τ -t dimenziótlan t' időnek. A dimenziós $t = \tau t'$ idő szerinti deriválás τ -val történő osztást hoz be. Ha továbbra is φ -tal jelöljük a dimenziótlan második deriváltat és áttérünk a dimenziótlan idő t -vel történő jelölésére, akkor

$$\ddot{\varphi} = \frac{\tau^2 \left[a_0 (\operatorname{th}^2 t - 1) + g \right]}{l} \sin \varphi. \quad (9)$$

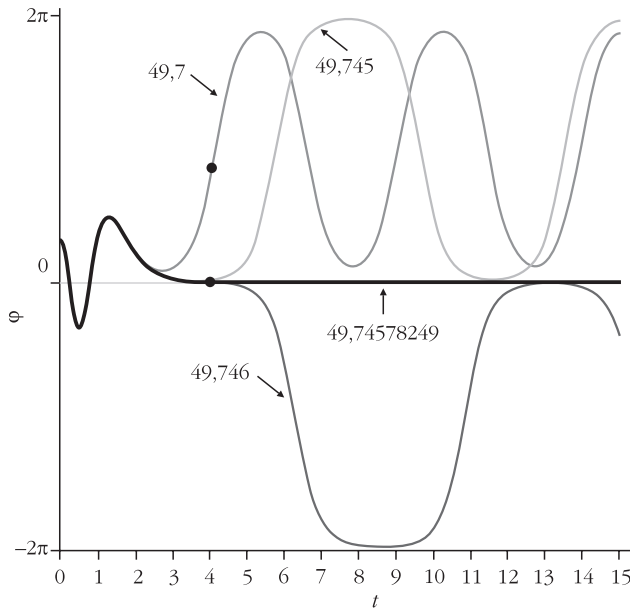
Az

$$A = \frac{a_0 \tau^2}{l} \quad \text{és} \quad d = A - \frac{\tau^2 g}{l} = \frac{(a_0 - g) \tau^2}{l} \quad (10)$$

jelölések bevezetésével a (9) egyenlet átírható, mint

$$\ddot{\varphi} = (A \operatorname{th}^2 t - d) \sin \varphi. \quad (11)$$

A (8)–(11) kifejezésekből leolvasható, hogy A a kezdeti gyorsulás nagyságának dimenziótlan értékét jelenti. A d mennyiség ugyanakkor ezen érték és a gravitációs gyorsulás $(\tau^2 g)/l$ dimenziótlan kifejezésének különbsége,



3. ábra. Szimulálással meghatározott szögkitérés-idő függvény különböző d értékek mellett ($A = 56$, $\varphi_0 = 1$, $\dot{\varphi} = 0$). A $t_a = 4,09$ pillanatot, amely után a gyorsítás elhanyagolható, fekete pont jelöli.

vagyis az eredő (felfelé mutató) gyorsulás kezdeti nagysága az együttmozgó rendszerben. Az $A-d$ mennyiség tekinthető a τ időállandó dimenziótlan értékének is.

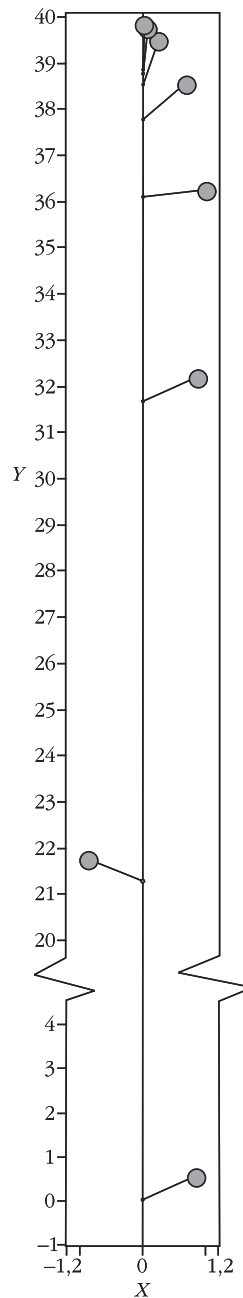
A sikeres vezérlés mozgásformái

A (11) differenciálegyenletet numerikusan a LabView programmal [5] oldottuk meg [6].

A függőlegesen gyorsított inga jellegzetes mozgásformáit a 3. ábrán mutatjuk be az $A = 56$ dimenziótlan kezdeti gyorsulás mellett. A $d = 49,7$ választással a $\varphi_0 = 1$ rad és $\dot{\varphi}_0 = 0$ kezdőfeltétel esetén az inga először átlendül a $\varphi = 0$ holtpontra, egy negatív irányú maximális kitérést elérve visszafordul, majd átlendül, és a kezdőfeltételnél nagyobb pozitív maximumot elérve ismét a 0 felé közelít. A $t_c = 1,76$ pillanatig az eredő gyorsulás felfelé mutat, ami miatt az inga „egyensúlyi” állapota a $\varphi = 0$ állapot, amely körül rezgett. $t > t_c$ -re az eredő gyorsulás negatív (még ha eleinte nem is veszi fel a teljes g értéket). Konkrét esetünkben az inga $\varphi = 0$ (most már instabil) helyzetét azonban nem éri el, és mire onnét eltávolodik, a gyorsítás gyakorlatilag 0-vá válik. $t_a = 4,09$ -re a g gyorsulást $1/100$ pontossággal elérjük, de a szögkitérés ekkor már erősen pozitív, és ezután egy végtelen ideig tartó, nagy amplitúdójú lengés kezdődik.

A $d = 49,745$ paraméterrel az inga már hosszabb ideig közelíti meg a $\varphi = 0$ helyzetet, de onnét még visszasesik. Az inga a 0 állapotot jobban megközelíti, a lengés periódusideje ezért hosszabb, mint az előző esetben. Az alig nagyobb $d = 49,746$ paraméterrel az inga, miután ismét megközelítette a $\varphi = 0$ értéket, a másik oldalra esik le, a φ értékek végig negatívak maradnak.

A folytonosság alapján ebből tudhatjuk, hogy a sikeres vezérlés ezen két d érték között valósul meg.



4. ábra. A gyorsított inga mozgásának fázisai a $t = 0, 0,5, 1, 1,5, 2, 2,5, 3$ és $3,5$ pillanatokban, $A = 56$, $\varphi_0 = 1$, $\dot{\varphi} = 0$, $d = d_2$ esetén. A maximális függőleges elmozdulás (5) szerint $J_{\max} = A \ln 2 = 38,8$ dimenziótlan egység.

Numerikus számolásunk szerint $d_2 = 49,74578249$.

A 4. ábra a sikeres vezérlés térbeli lefolyását mutatja néhány pillanatfelvétellel. A megfelelő $\varphi(t)$ függvény a 3. ábra vastag görbéje szerint $t = 3,5$ után jól belesimul a vízszintes tengelybe.

A d_2 jelölést az indokolja, hogy ugyanezekkel a kezdőfeltételekkel két kisebb d értékénél is találhatunk sikeres vezérlést. Ezek $d_1 = 33,22$ és $d_0 = 7,65$. A hozzájuk tartozó mozgások annyiban különböznek, hogy a $\varphi = 0$ érték elérése előtt a $\varphi(t)$ függvény egyszer, illetve egyszer sem vált előjelet.

Az általános tapasztalat tehát az, hogy adott φ_0 , $\dot{\varphi}_0$ mellett csak néhány d_n érték esetén létezik sikeres vezérlés, ezek $d_0, d_1 \dots d_{N-1}$, ahol N az összes sikeresen vezérelhető eset száma. Ezen d_n -ek összességét *vezérlési spektrum*-nak nevezzük.

A vezérlési spektrum fizikai jelentése

A d_n spektrum megtalálása (10) értelmében azt jelenti, hogy megtaláltunk egy olyan τ időállandót, amellyel az adott (1) típusú gyorsítási függvény mellett sikeres vezérlés valósítható meg. d_n ismeretében tehát a vezérléshez szükséges n -edik időállandó

$$\tau_n = \sqrt{\frac{l}{g}(A - d_n)}, \quad (12)$$

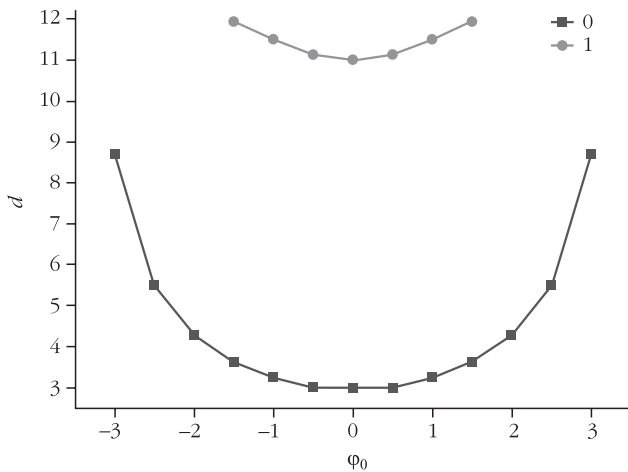
$$n = 0, \dots, N-1,$$

ahol N a kvantált vezérlési lehetőségek száma. Mivel τ_n pozitív, ez mutatja, hogy csak a

$$d_n < A \quad (13)$$

megoldások bírnak fizikai jelentéssel. A d_n értékek tehát meghatározzák a vezérléshez választandó karakterisztikus időket.

Látjuk, hogy ha d_n közel esik A -hoz, akkor a τ_n időállandó igen kicsinek adódik. A gyorsításnak ilyenkor szinte pillanatszerűnek kellene lennie, aminek megvalósítása nehéz.



5. ábra. Vezérlési spektrum $A = 12$ -re.

A (10) bal oldali egyenlete meghatározza az a_0 kezdeti gyorsulást is, hiszen a d_n -hez tartozó τ_n behelyettesítése után:

$$a_{0,n} = \frac{A}{A - d_n} g. \quad (14)$$

Az n -ik sikeres vezérléshez tartozó megoldáshoz tehát ekkora kezdeti gyorsulás szükséges. Vegyük észre, hogy ez független az inga l hosszától.

Ha d_n nagyon közel esik a maximális A dimenziótlan gyorsuláshoz, akkor $a_{0,n}$ jóval nagyobb lehet, mint maga a g gravitációs gyorsulás. Amennyiben például $10 g$ -t tekintünk még megvalósítható kezdeti gyorsulásnak, akkor elegendő a

$$d_n < \frac{9}{10} A \quad (15)$$

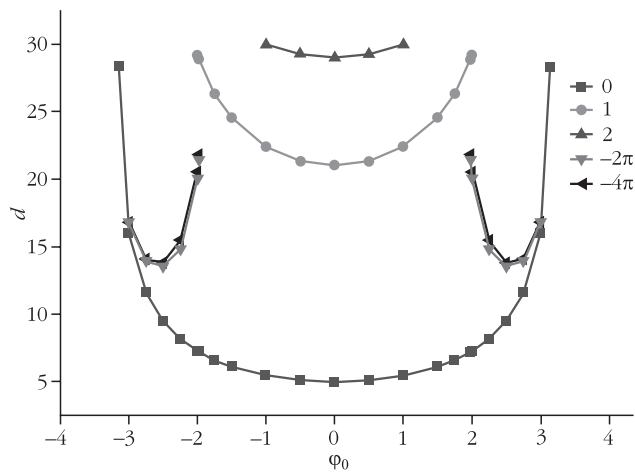
tartományra korlátozódunk.

A (12) összefüggés megadja a (4. ábrán bemutatott) mozgáshoz tartozó időállandót: ehhez ismernünk kell az inga hosszát. $l = 0,1$ m, 1 m és 10 m-es ingákra rendre $\tau_2 = 0,25$ s, $0,79$ s, és $2,5$ s értékeket kapjuk. A kezdeti gyorsulás (14) szerint független az inga hosszától, s így mindegyik hossz esetén $a_{0,2} = 8,59 g$, azaz meglehetősen nagy kezdeti gyorsulás szükséges a d_2 -höz tartozó kvantált vezérlés megvalósításához. A d_1, d_0 értékhez rendre az $a_{0,1} = 2,45 g$, $a_{0,0} = 1,15 g$ kezdeti gyorsulás tartozik.

A vezérlési spektrum szögfüggése

A spektrum meghatározását szisztematikusan elvégeztük különböző A értékek mellett a kezdeti φ_0 szögkitérések $-\pi$ és $+\pi$ közötti tartományában nulla kezdeti szögsebességgel. A kvantált d_n értékekre vonatkozó eredményeket a 5.–7. ábrák foglalják össze.

Az $A = 12$ esetben összesen két görbét találunk (5. ábra), mindegyik tükörszimmetrikus a függőleges tengelyre. A kisebb értékekhez tartozó $d_0(\varphi_0)$ ág a teljes φ_0 tartományra kiterjed, a második, $d_1(\varphi_0)$ ág azonban megszűnik – eléri a $d_1 = A = 12$ értéket, lásd (13) –, a

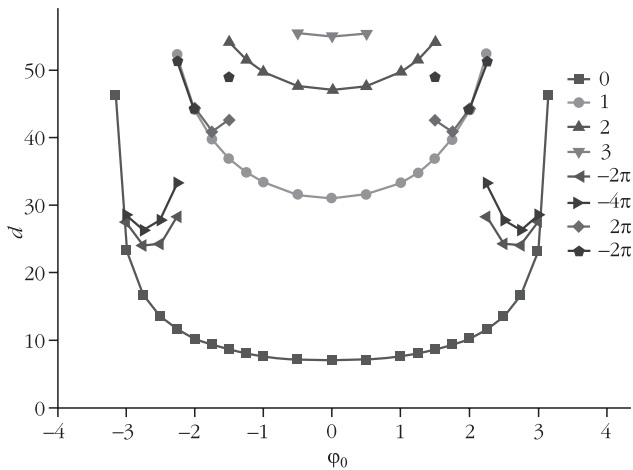


6. ábra. Vezérlési spektrum $A = 30$ -ra. Az egész számokhoz tartozó szimbólumok a d_n ág n indexére utalnak, a többi szám azt jelzi, hogy mekkora szögelfordulás után állapodik meg az inga a $\varphi = 0$ helyen.

$|\varphi_0| = 1,5$ érték körül. A két ághoz tartozó mozgás annyiban különbözik, hogy d_0 mentén az inga szögkitérése végig azonos előjelű a kezdetivel, azaz nem történik előjelváltás az instabil állapot eléréséig. Ezzel szemben a d_1 ág mentén a szögkitérés egyszer előjelet vált, és csak azután közelít a kitérülésmentes állapothoz, de anélkül, hogy közben átfordulna. A d_2 értékek azonban nagyon közel esnek A -hoz, ezért (12) szerint az időállandók nagyon kicsik, és a kezdeti gyorsulások (15) alapján megvalósíthatatlan, $10 g$ -nél nagyobb értékre vezetnek. A felső ág matematikai létezése ellenére sem jelenti tehát a sikeres vezérlés lehetőségét. Az alsó ág ezzel szemben könnyen megvalósítható. A $d_0 = 4$ körüli érték például $\tau_0 = 0,28$, $0,89$, és $2,8$ s időállandóhoz tartozik $l = 0,1, 1$, illetve 10 m-es ingahossz esetén. A szükséges kezdeti gyorsulás értéke csak $1,5 g$.

Az $A = 30$ kezdeti gyorsulás mellett (6. ábra) három olyan ágot találunk, amelyhez hozzátartozik a $\varphi_0 = 0$ kezdőfeltétel. A legalsó, d_0 ág minden $-\pi$ és $+\pi$ közötti φ_0 -ra kiterjed. A d_1 ág csak $2,25$ -ig, a d_2 csak $1,5$ -ig húzódik. Az inga mozgása mindhárom ág mentén teljes átfordulás nélküli, azaz a $\varphi = 0$ végállapothoz tart, d_0 -ban előjelváltás nélkül, d_1 -ben egyszeri, d_2 -ben kétszeri előjelváltással. Az utóbbi ág végig nagyon közel húzódik az $A = 30$ -as értékhez, és ezért megvalósíthatatlan vezérlést ír le.

Új vonás, hogy a kezdeti szögkitérés rövid, nullát nem tartalmazó intervallumain is találunk vezérlési lehetőségeket. Ezek olyan mozgásokhoz tartoznak, amelyek utolsó áthaladásukkor még véges szögsebességgel lendülnek át az origón, és egy vagy több teljes körülfordulás után állnak meg az instabil állapotban. Számos nagyon rövid intervallumra kiterjedő ágot is találtunk, az áttekinthetőség érdekében azonban csak a legnagyobbakat ábrázoljuk. A 6. ábra jobb oldalán $\varphi_0 = 2$ és 3 között húzódó alsó ív mentén az inga a -2π állapotban (vagyis egy pozitív irányú teljes körbefordulás) után áll meg, a kissé fölötte húzódó ív mentén pedig -4π -ben. (Ehhez nagyon közel húzódik nyilván a $-n2\pi$ végállapotok görbéi, de azok nu-



7. ábra. Vezérlési spektrum $A = 56$ -ra. A jelölések megegyeznek az előző ábrán használtakkal.

merikus felbontása már igen nehéz.) E két ív negatív kezdeti szögkitérésekhez tartozó tükörképei mentén a végállapot 2π , illetve 4π , vagyis negatív körülfarású körbefordulások utáni állapot.

Az $A = 56$ eset ezek után már lényegében hasonló (7. ábra). Most négy $\varphi = 0$ -án átmenő ágat találunk, d_0 -tól d_3 -ig. Az általános szabály az, hogy az inga az n -edik ág mentén $n-1$ előjelváltás után közelíti meg az origót, s közben egyszer sem fordul át. A d_3 ág nagyon rövid és végig túl nagy kezdeti gyorsulásokhoz tartozik. A d_2 ág $\varphi_0 = 1$ -hez tartozó (utolsó reálisan vezérelhető) értékének részletes megtalálását mutattuk be a 3. ábrán. A d_1 és a d_0 ágak végéhez csatlakoznak a többszöri átfordulás utáni megállást leíró rövidebb ágak. A d_0 ág jobb oldalán a -2π , -4π -ben, a d_1 jobb oldalán a 2π , 4π -ben történik a megállás, az ábra bal oldalán pedig az előjelek tükröződnek.

A függőlegesen gyorsított inga és a Schrödinger-egyenlet

Az a tény, hogy csak diszkrét d értékek mellett létezik sikeres vezérlés, óhatatlanul felveti a kvantummechanikával való kapcsolat keresésének szükségességét.

A függőlegesen gyorsított fordított inga nemlineáris mozgásegyenlete azzal a feltevessel, hogy a φ szögkitérés mindig jóval kisebb, mint 1 radián, a

$$\ddot{\varphi} = (A \text{th}^2 t - d) \varphi, \quad |\varphi| \ll 1 \quad (16)$$

lineáris alakba megy át, hiszen $\sin \varphi$ a φ argumentummal közelíthető, ha φ kicsi.

Ha a (16) egyenletben az időváltozót x -szel jelöljük, a szögkitérést Ψ -vel, akkor az egyenlet

$$\Psi''(x) = (V(x) - e) \Psi(x), \quad (17)$$

ahol

$$V(x) = A(\text{th}^2 x - 1), \quad e = d - A. \quad (18)$$

Az energiaspektrum különböző A értékekre a (18) Rosen–Morse-potenciál esetén		
A	d_0, d_1, \dots, d_N	N
12	3, 11	1
30	5, 21, 29	2
56	7, 31, 47, 55	3

Ez nem más, mint a mikrorészecskék energiáját meghatározó (stacionárius) Schrödinger-egyenlet [7] megfelelő dimenziótlan egységekben kifejezve [6]. Az e mennyiség a részecske konstans energiája, $V(x)$ pedig az a potenciál (elektromos mező), amelyben a részecske mozog. A vessző az x térváltozó szerinti deriválást jelöli. A $\Psi(x)$ hullámfüggvénynek az a fizikai jelentése, hogy a részecske az x hely környékén $|\Psi|^2(x)$ valószínűséggel található meg. Mivel a részecske biztosan van valahol, $|\Psi|^2(x)$ teljes térre vett integrálja egyet kell adjon, de ez csak úgy lehetséges, ha $\Psi(x)$ maga nullához tart nagy x értékekre. A $\Psi(x)$ függvény normáltóságából adódó végtelenbeli eltűnés pedig éppen a vezérlés $\varphi \rightarrow 0$ feltételének felel meg [6].

A kis kezdeti kitéréssel indított (és végig kis szögkitéréseket mutató) inga mozgása tehát ekvivalens a (17) Schrödinger-egyenlettel. Ennek egyik következménye, hogy a (17) lineáris egyenletben a sajátérték-spektrum *nem* függ a φ_0 kezdeti szögkitéréstől.

A $V(x)$ dimenziótlan potenciál az úgynevezett Rosen–Morse-potenciál, amelynek energiaspektruma már 1932 óta ismert [8]. A potenciálgödör $-A$ mélységtől mért lehetséges dimenziótlan energiaértékeket, amelyek a d_n spektrumnak felelnek meg $|\varphi_0| \ll 1$ esetén, az 1. táblázatban foglaljuk össze.

Ez a felismerés magyarázza azt a tapasztalatot, miszerint a vezérlési d_n értékek kis kezdeti kitérésekre megegyeznek az 1. táblázat értékeivel. A 5. – 7. ábrán látható d_n görbék valóban mind vízszintes érintővel futnak be az origóban felvett (schrödingeri) értékükhöz.

Érdeemes itt összefoglalni miben jelentős tehát az eltérés a (16) Schrödinger-egyenlettel leírt lineáris vezérlési feladathoz képest.

- Az d_n értékek alapvetően függenek a kezdeti szögkitéréstől. Ennek megfelelően a d_n ágak *görbületek* és a pozitív indexűek *nem is terjednek* ki a teljes szög tartományra.

- Léteznek olyan más ágak, amelyek nem nyúlnak el a $\varphi_0 = 0$ kezdőfeltételig, és ezért még határesetben sem lehetnek kapcsolatosak a Schrödinger-egyenlettel. Ezek a többszörös átfordulás utáni megállást írják le.

- Hangsúlyozzuk, ha a vezérlési problémánk teljesen „schrödingeri” lenne, akkor az összes vezérlési spektrum kizárólag vízszintes vonalakból állna (1. táblázat).

A (11) egyenlet tehát egyfajta (stacionárius) *nemlineáris Schrödinger-egyenlet* időváltozóban felírt alak-

jának tekinthető. A függőlegesen gyorsított inga vezérlése tehát nemlinearitása miatt jelentősen eltér a hagyományos Schrödinger-egyenlettel leírt lineáris vezérlési feladattól. Egy vonás azonban mindenképpen közös: vezérlés csak kvantált értékek mellett lehetséges, de ez az új típusú kvantálás már egészen más jellegű, mint a kvantummechanikai. Ez nem is csoda, hiszen a kvantummechanika alapvetően lineáris elmélet [7].

A következőkben vizsgálandó vízszintesen gyorsított inga egyenlete még határértékben sem kapcsolatos a Schrödinger-egyenlettel, ezért ott még nehezebben megvalósítható vezérlésre számíthatunk csak.

Irodalom

1. K. J. Aström, K. Furuta: Swing up a pendulum by energy control. *Automatica* 36 (2000) 287–295.
2. H. Su, C. A. Woodham: On the uncontrollable damped triple inverted pendulum. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 151 (2003) 425–443.
3. D. J. Acheson: A pendulum theorem. *Proc. Royal Soc. A443* (1993) 239–245.
4. Nagy K.: *Elméleti mechanika*. Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
5. National Instruments LabView: ni.com/labview.
6. Tél A., Tél T.: Egy reménytelennek tűnő vezérlési probléma a klasszikus és modern fizika határán. *Fizikai Szemle* 61/12 (2011) 409–416.
7. Marx Gy.: *Kvantummechanika*. Műszaki Kiadó, Budapest, 1971.
8. N. Rosen, P. M. Morse: On the vibrations of polyatomic molecules. *Phys. Rev.* 15 (1932) 210–217.

A CIRKULÁRISAN FÉNYPOLARIZÁLÓ SZKARABEUSZOK NEM REAGÁLNAK A CIRKULÁRIS POLARIZÁCIÓRA – II. RÉSZ

Egy évszázados biooptikai hipotézis cáfolata

Blahó Miklós, Egri Ádám, Horváth Gábor

Környezetoptika Laboratórium, Biológiai Fizika Tanszék, ELTE, Budapest

Hegedüs Ramón

Számítógépes Látás és Robotika Csoport, Gironai Egyetem, Girona, Spanyolország

Kriska György

Biológiai Szakmódszertani Csoport, Biológiai Intézet, ELTE, Budapest

Jósvai Júlia, Tóth Miklós

Növényvédelmi Intézet, Agrártudományi Kutatóközpont, MTA, Budapest

Kertész Krisztián, Biró László Péter

Műszaki Fizikai és Anyagtudományi Intézet, Természettudományi Kutatóközpont, MTA, Budapest

Albert Abraham Michelson amerikai fizikus 1911-ben fedezte föl, hogy bizonyos szkarabeusz bogarak fémszínű kitingpáncéljáról visszavert fény balra cirkulárisan poláros. Azóta feltételezték, hogy e bogarak képesek érzékelni a fény cirkuláris polarizációját, amit a fajtársak megtalálásához használnak. E hipotézist ellenőriztük hat kísérletben az Anomala dubia, Anomala vitis, Cetonia aurata és Potosia cuprea szkarabeuszfajok több száz egyedével. Kimutattuk, hogy e bogarak nem vonzódnak a cirkulárisan poláros fényhez a fajtársak vagy a táplálék keresése közben. Azt is megmutattuk, hogy e szkarabeuszok gazdanövényei cirkulárisan polarizálatlan fényt vernek vissza. Mindezzel cáfoltuk azon évszázados hipotézist, hogy a szkarabeuszok kitingpáncéljáról tükröződő fény cirkuláris polarizációja e bogarak vizuális kommunikációját szolgálja. Cikkünk I. részében¹ a szkarabeuszok cirkulárispolarizáció-érzékelésének hipotézisét ismertettük, majd leírtuk e probléma vizsgálatára elvégzett kísérleteinket. Írásunk II. részében a kísérleti eredményeinket mutatjuk be és azokat vitatjuk meg.

¹ *Fizikai Szemle* 62/7–8 (2012) 217–221.

A szkarabeuszok nem reagálnak a cirkuláris polarizációra

A *Cetonia aurata* aranyos rózsabogarak kitingpáncélja BCP-fényt, míg az alattuk lévő *Epipremnum* levelek cirkulárisan polarizálatlan fényt vernek vissza. A *Potosia cuprea* rezes rózsabogár, az *Anomala dubia* és az *Anomala vitis* cserebogarak kitingpáncélja szintén BCP-fényt ver vissza. A *Cetonia*, *Potosia* és *Anomala vitis* teljesen fekete BC polárszűrőn át nézve, továbbá az *Anomala dubia* a barna szárnyfedőtől eltekintve szintén fekete BC polárszűrőn keresztül. Másrészt viszont e szkarabeuszok optikai környezetében előforduló növények (galagonya: *Crataegus monogyna*, vadrózsa: *Rosa canina*, fekete nyár: *Populus nigra*, platán: *Platanus acerifolia*, lisztes berkenye: *Sorbus aria*, mezei juhar: *Acer campestre*, kislevelű hárs: *Tilia cordata*, madárberkenye: *Sorbus aucuparia*, vadcserecsnye: *Prunus avium*, ecetfa: *Rhus typhina*, mezei szil: *Ulmus campestris*, japánakác: *Sophora japonica*, szelídgesztenye: *Castanea sativa*, közönséges nyír: *Betula pendula*) által visszavert fény cirkulárisan polarizálatlan.