

tált módon, azaz a paraméterek diszkrét értékeinél, egy vezérlési spektrum mentén megvalósítható a rendszer instabil végállapotba juttatása.

A különböző technikai rendszerek vezérlése a rendszert jellemző paraméterek ismeretében hatékony irányítási módszerként ismert. Esetünkben az inverz ingák – fentiekben bemutatott – instabil egyen-

súlyi állapotba, vagy annak közvetlen közelébe juttatása csupán a kezdőfeltételek helyes megválasztásával alternatív lehetőséget kínál az eddig elterjedt összetett szabályozási algoritmusokkal szemben.

Irodalom

7. Marx Gy.: *Kvantummechanika*. Műszaki Kiadó, Budapest, 1971.

MERRE MUTAT A FÖLD FORGÁSTENGELYE?

Hraskó Péter

PTE Elméleti Fizika Tanszék

„Látod-e, mely kicsiny itt a föld, félrésze vizekkel
Béfooglalva setét zölde, félrésze világos,
S mint félérésű citrom hintálva tulajdon
Terhe nyomásától, lóg a nagy semminek ágán.”

Csokonai Vitéz Mihály

Amikor a nyolcvanas évek végén a pécsi Janus Pannonius Tudományegyetemre hívtak elméleti fizikát tanítani tanárszakos hallgatóknak, tisztában voltam vele, hogy a tananyagban sok olyan része van, amelyet nem ismerek elég jól ahhoz, hogy taníthassam. Egyebek között a Föld forgástengelyének 25 730 év periódusú *luniszoláris precessziója* tartozott ide, ezért beültem az MTA könyvtárába irodalmazni a témáról. Ekkor került a kezembe *W. H. Munk* és *G. J. F. MacDonald* *The rotation of the earth: a geophysical discussion* című könyve, amely részletesen tárgyalta a luniszoláris precessziót, de szó volt benne egy másik precesszióról is, amelyről korábban sohase hallottam és olyan hihetetlennek tűnt a számomra, hogy sokáig bizonytalankodtam, jól értem-e, amit olvasok. Arról volt ugyanis szó, hogy a Föld forgástengelye nem esik pontosan egybe a szimmetriatengelyével, a forgástengely dőléspontja úgy kerülgeti *néhány méteres távolságban* a szimmetriatengelyt, mint egy kaptos sarkkutató (3. ábra), és ezt a mozgást a geofizikusok már száz év óta folyamatosan regisztrálják.

A reguláris precesszió

Ezen érdekes geofizikai jelenség alapja az izolált tengelyszimmetrikus merev testek forgása a tömegközéppontjuk körül, amelyet *reguláris precesszió*nak (vagy *szabad nutáció*nak) hívunk. Induljunk ki abból, hogy a test nyugalomban van és egy adott pillanatban mi hozzuk forgásba valamilyen ω szögsebességgel a tömegközéppontján áthaladó tetszőleges irányú tengely körül. Hogyan mozog tovább?

Bontsuk fel az ω szögsebességvektort egy szimmetriatengellyel párhuzamos ω_{\parallel} és egy rá merőleges ω_{\perp} komponensre:

$$\omega = \omega_{\parallel} + \omega_{\perp}.$$

A szimmetriatengelyre és a tömegközépponton áthaladó rá merőleges egymással egyenértékű tengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékokat jelöljük I_{\parallel} -sal és I_{\perp} -sel. Ekkor a perdületet (impulzusmomentumot) az

$$\mathbf{N} = I_{\parallel} \boldsymbol{\omega}_{\parallel} + I_{\perp} \boldsymbol{\omega}_{\perp}$$

képlet határozza meg. A perdület eszerint benne fekszik a szimmetriatengely és a szögsebesség által meghatározott \mathcal{S} síkban.

Az $\boldsymbol{\omega}$ -nak és az \mathbf{N} -nek a szimmetriatengellyel bezárt szögét jelöljük α -val és β -val. A két szög között egyértelmű kapcsolat van:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{N_{\perp}}{N_{\parallel}} = \frac{I_{\perp} \omega_{\perp}}{I_{\parallel} \omega_{\parallel}} = \frac{I_{\perp}}{I_{\parallel}} \operatorname{tg} \alpha. \quad (1)$$

Fontos körülmény, hogy a perdület szimmetriatengelyre vetett N_{\parallel} vetülete mozgásállandó. Ez nem következik abból, hogy \mathbf{N} maga mozgásállandó, mert a szimmetriatengely nem egy rögzített térbeli irány. Az N_{\parallel} időderiváltja mégis zérussal egyenlő. A bizonyításhoz jelöljük a szimmetriatengely irányába mutató egységvektort \mathbf{k} -val. Nyilván $N_{\parallel} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{N})$, ezért

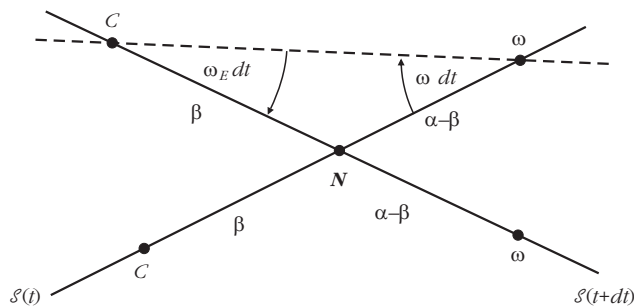
$$\dot{N}_{\parallel} = (\dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{N}) + (\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{N}}) = ([\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}] \cdot \mathbf{N}).$$

Kihasználtuk, hogy $\dot{\mathbf{N}} = 0$ és a \mathbf{k} irány együtt forog a testtel: $\dot{\mathbf{k}} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}]$. Mint az előbb láttuk, a vegyes szorzatban szereplő három vektor egy síkban fekszik, ezért a vegyes szorzatuk nullával egyenlő.

Az N_{\parallel} megmaradása maga után vonja az N_{\perp} megmaradását, valamint az $\omega_{\parallel} = N_{\parallel}/I_{\parallel}$, az $\omega_{\perp} = N_{\perp}/I_{\perp}$ és végső soron magának az ω szögsebességnek az állandóságát is.

Mivel $N_{\parallel} = N \cos \beta$, a β szög is állandó, és (1) következtében ugyanez érvényes az α szögre is. Eszerint nemcsak az igaz, hogy a szimmetriatengely, a perdület és a forgástengely mindig egy közös \mathcal{S} síkban fekszik, hanem ebben a síkban a relatív helyzetük is állandó.

Az \mathcal{S} síknak és benne a szögsebességvektornak forognia kell a testhez képest ahhoz, hogy mindhárom irány folyamatosan egy közös síkban maradjon. A perdület ugyanis mozgásállandó, ezért a forgás során csak a szim-



1. ábra. Az Euler-körfrekvencia számítása.

metriatengely fordul el az ω irány körül, az N iránya változatlan marad. Ha tehát a három irány a t pillanatban egy síkban volt, a $t + dt$ pillanatban az N perdület már valamilyen szöget zárna be az új helyzetű szimetriatengelyt és a szögsebességvektort tartalmazó síkkal, *ha a szögsebesség iránya változatlan maradna*. De ez az irány megváltozhat, hiszen (az N -hez hasonlóan és a szimetriatengellyel ellentétben) nincs „beleégetve” a testbe. Tehát a szimetriatengely új helyzete körüli α nyílásszögű kúpon úgy fog elfordulni, hogy újból rákerüljön a szimetriatengely és az N által meghatározott síkra. Ez a két elfordulás – természetesen – nem egymást követően, hanem egyidejűleg következik be, de – mint a következő pontban látni fogjuk – gondolati szétválasztásuk megkönnyíti a mozgás kvantitatív analizisét.

Az ω_E Euler-körfrekvencia

A reguláris precesszió során tehát a forgástengely a test szimetriatengelye körüli α nyílásszögű kúpon forog. A továbbiakban elsősorban a mozgás ezen aspektusát fogjuk tanulmányozni. A forgás körfrekvenciáját *Euler-körfrekvenciának* hívjuk és ω_E -vel jelöljük. Kiszámításához képzeljünk el egy gömböt a testen belül a tömegközéppont, mint origó körül. Az $S(t)$ és az $S(t + dt)$ sík egy-egy főkört metsz ki ebből a gömbből, amelyek az N irány dőfspontjában metszik egymást. Az 1. ábrán ezeket a főköröket – az egyszerűség kedvéért – egyenesekkel ábrázoltuk. Az ábra belapult ellipszoidra vonatkozik, amelyre $I_1 > I_\perp$ és (1) következtében $\alpha > \beta$ (a C a szimetriatengely dőfspontja).

A szaggatott egyenes az S sík azon $S(t)$ és $S(t + dt)$ közötti hipotetikus közbenső helyzetét ábrázolja, amikor az N még „kilóg” belőle, mert csak az ωdt szögű elfordulás következett be a pillanatnyi forgástengely körül. A forgástengely csak ezután fog $\omega_E dt$ szöggel elfordulni a megváltozott irányú szimetriatengely körül.

Az ω_E Euler-körfrekvenciát a gömbháromszögtan szinusztétele segítségével fejezhetjük ki a forgás ω szögsebességén keresztül:

$$\sin(\omega_E dt) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\beta} \sin(\omega dt).$$

Amikor $dt \rightarrow 0$ a két dt -t tartalmazó szinusz helyettesíthető az argumentumával. A dt -vel egyszerűsíthetünk, így

$$\omega_E = \omega \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\beta} = \omega \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta} \cos\alpha.$$

Az (1) segítségével a tangensek kifejezhetők a tehetetlenségi nyomatékokon keresztül:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{I_1 - I_\perp}{I_\perp}, \quad (2)$$

az $\omega \cos\alpha$ szorzat pedig a szögsebesség szimetriatengelyre vetett ω_\perp vetületével egyenlő. Így végül az Euler-körfrekvenciára az

$$\omega_E = \frac{I_1 - I_\perp}{I_\perp} \omega_\perp,$$

az ennek megfelelő periódusidőre pedig a

$$T_E = \left(\frac{I_1 - I_\perp}{I_\perp} \right)^{-1} T_1$$

képletet kapjuk.

A Földre vonatkozóan az ω_\perp -t szorzó *precessziós konstans* (másik néven *dinamikai lapultság*) értéke

$$\frac{I_1 - I_\perp}{I_\perp} = 0,003295 \approx \frac{1}{300}.$$

Ez a tört a luniszoláris precesszió képletében is megjelenik (innen az elnevezése) és a precesszió megfigyelt értékéből számolható vissza. Mivel $T_1 \approx 1$ nap, ezért az Euler-periódusidő értéke a Földre vonatkozóan $T_E \approx 300$ nappal egyenlő.

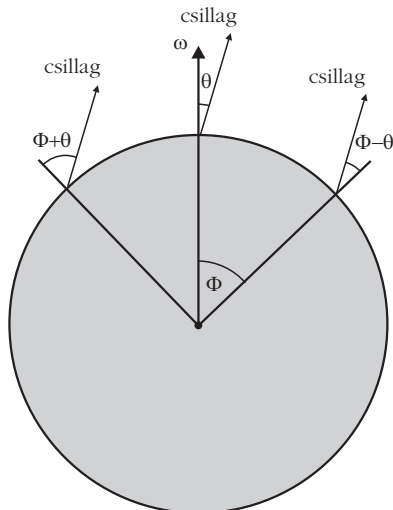
Mint látjuk, a Föld reguláris precessziójának T_E periódusideje sokkal kisebb, mint a luniszoláris precesszió 25 730 éves periódusa. Ez utóbbi precessziót a Nap és a Hold tömegvonzásának a Föld egyenlítői kidudorodására gyakorolt forgatónyomatéka okozza. A Föld tehát szigorúan véve nem izolált test és így kérdéses, hogy a reguláris precesszió képletei érvényesek-e rá. Mivel azonban T_E nagyságrendű idő alatt a luniszoláris precesszió mértéke nagyon kicsi, a reguláris precesszió szempontjából a Földre gyakorolt forgatónyomaték hatása elhanyagolható.

A szélességingadozás

A Föld esetében az α és a β szög biztosan nagyon kicsi. A forgástengely irányát – mint láttuk – a kezdőfeltételek határozzák meg, ezért az α szög csak mérésel állapítható meg, elméleti számítással nem. Az azonban könnyen igazolható, hogy a β szög nagy pontossággal egyenlő α -val. A (2) képlet ugyanis a két szög közötti különbség legalacsonyabb rendjében

$$\frac{\alpha - \beta}{\alpha} \approx \frac{1}{300}$$

alakú, és ez a képlet mutatja, hogy az $(\alpha - \beta)$ különbség valóban elhanyagolható α mellett.



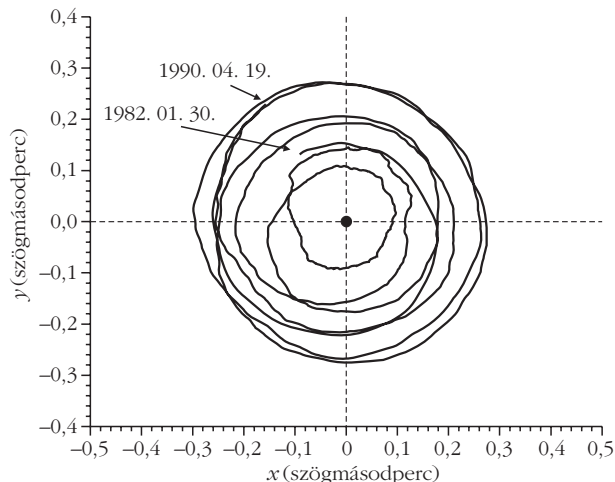
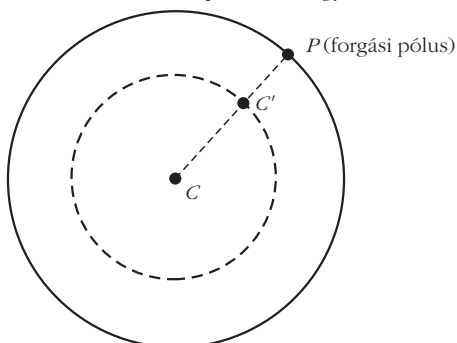
2. ábra. A szélesség meghatározása.

A Föld reguláris precesszióját tehát a következőképpen írhatjuk le. Az ω forgástengely folyamatosan a csillagos ég egy határozott pontjára mutat, mert egybeesik az N perdület irányával, amely mozgásállandó. A szimmetriatengely és vele együtt az egész Földgolyó ekörül az irány körül precesszál a csillagos éghez képest valamilyen α nyílásszögű kúpon, a számítások szerint körülbelül 300 napos periódusidővel.

Ugyanez a mozgás a merevnek elképzelt Földhöz viszonyítva úgy jelenik meg, hogy a pillanatnyi forgástengely dőléspontja (a forgási pólus) T_E periódusidejű körmozgást végez a poláris régió egy pontja körül, amely a szimmetriatengely dőléspontjával azonosítható. Ez a mozgás a Föld tengely körüli forgásával ellentétes értelmű (1. ábra).

A reguláris precesszió megfigyelési módszere azon az egyszerű tényen alapul, hogy a Föld egy adott pontjának a forgási pólushoz viszonyított Φ szélességét könnyen kiszámíthatjuk, ha 24 órán belül többször is meg tudjuk mérni egy adott csillag irányának a lokális merőlegessel bezárt szögét. Egy olyan csillag iránya ugyanis, amely a forgási pólusban θ szög alatt látszik a lokális merőlegeshez viszonyítva, a Φ szélességű pontban 24 órás periódusidővel változik a lokális merőlegeshez viszonyítva a $(\Phi - \theta, \Phi + \theta)$ szögtartományban (2. ábra). A megfigyelési pont Φ szélessége a két szélső érték átlagával egyenlő.

4. ábra. A Chandler-periódus magyarázatához.



3. ábra. A forgási pólus megfigyelt mozgása.

A reguláris precesszió következtében a forgási pólus folyamatosan vándorol a Földhöz viszonyítva, ezért egy adott megfigyelési pont Φ szélessége nem marad állandó. Ez a jelenség a szélességingadozás. Ezt az ingadozást a geofizikai obszervatóriumok széles hálózata folyamatosan figyeli a Föld különböző pontjaiban, amelyek mérési eredményeiből rekonstruálható a forgási pólus pályája. Az 1982–1990 periódusra vonatkozóan ezt a pályát a 3. ábrán láthatjuk.

A Chandler-periódus és az α szög nagysága

A mérési eredmények csak kvalitatív összhangot mutatnak a reguláris precesszió elképzésével. Többet nem is várhatunk, hiszen a Földet csak közelítően lehet izolált merev testnek tekinteni.¹ Mindenekelőtt az derült ki, hogy a forgási pólus mozgásának a periódusa a várt körülbelül 300 nap helyett 435 nappal egyenlő. Ezt a periódust a szélességingadozás felfedezőjéről Chandler-periódusnak hívják. S. Newcomb szerint a különbséget a földköpeny rugalmassága okozza. Ma már jól ismert, hogy a földkéreg is mutat árapályt, a pontos fizikai méréseknél ezt gyakran figyelembe is kell venni. Ezen az alapon az is várható, hogy a centrifugális erő változása következtében az egyenlítői kidudorodás is képes valamilyen mértékben igazodni a forgástengely irányváltozásaihoz.

A 4. ábra azt sugallja, hogy ez az igazodás növeli a szélességingadozás periódusidejét. Tegyük fel, hogy a teljesen merev Föld feltételezése mellett a P forgási pólus a szimmetriatengely C dőléspontja körül precesszálna. Az egyenlítői kidudorodás igazodása a forgástengely pillanatnyi irányához azt eredményezheti, hogy a tényleges szimmetriatengely a forgási pólus irányához közelebbi C' pontba helyeződik át. Az Euler-periódus számértékében ez nem okoz változást, de a körpályán történő mozgás sebességét

¹ A Nap és a Hold forgatónyomatéka szempontjából a Föld, mint láttuk, izoláltnak tekinthető, de a Napról érkező sugárzási energia jelentős közvetett befolyást gyakorolhat a szélességingadozásra.

$$\frac{C'P}{CP} \equiv \gamma$$

arányban lecsökkenti. Ezzel a csökkentett sebességgel kerüli meg a P forgási pólus a C döféspontot, ami a periódusidő $1/\gamma$ -szoros megnövekedéséhez vezet.

Az α szög nagyságára áttérve a 3. ábrából láthatjuk, hogy ez a szög nagyságrendileg néhány száz milliszögmásodperccel (néhány tized szögmásodperccel) egyenlő, ami a talajszinten 10 méter (!) körüli távolságnak felel meg. A forgási pólus nem körön, hanem egy elég szabálytalan csigavonalon mozog, vagyis α értéke folyamatosan fluktuál ebben a nagyságrendi tartományban.

Az előbb szó volt róla, hogy amikor a szimmetriatengely és a szögsebesség vektora (a forgástengely) valamilyen nullától különböző szöget zár be egymás-

sal, a forgási pólus mozgását deformációs folyamatok kísérik, amelyek bizonyosan energia-disszipációval járnak. A szélességingadozásnak ezért le kellene csengenie, az α -nak a nulla értékénél kellene stabilizálnia. A becslések azt mutatják, hogy a lecsengésnek nagyon gyorsan be kellene következnie, mert a folyamat időállandója kevesebb mint száz év.

Létezniük kell tehát olyan geofizikai mechanizmusoknak, amelyek folyamatosan gondoskodnak a szélességingadozás „rugójának a felhúzásáról”. A modellszámítások alapján például elképzelhető, hogy az óceánok fenekén a nyomás fluktuációja tartja fenn a jelenséget, amely maga a hőmérséklet- és a szalinitás (sókoncentráció) változások, valamint a széljárás okozta áramlásváltozások következménye. De az sem kizárt, hogy az ingadozás nem vezethető vissza egyetlen jól meghatározott okra, hanem számos független hatás következménye.

RELATIVISZTIKUS FOGÓCSKA – II. RÉSZ

Bokor Nándor
BME Fizika Tanszék

A nyugalmi hossz felső korlátja – a 2. gondolat kísérlet magyarázata

Rövid kitérő a *nyugalmi hossz* fogalmáról és arról, mit értettünk eddig a *sajáthossz* fogalma alatt. Az olvasónak feltűnhetett, hogy a cikkben eddig kizárólag a „sajáthossz” kifejezést használtam az elterjedtebb „nyugalmi hossz” helyett. Szigorúan véve csak akkor van értelme egy adott tárgy (esetünkben például a cérna) nyugalmi hosszáról beszélni, ha a tárgy pontjai *egymáshoz képest* nyugalomban vannak (másképpen megfogalmazva: ha mindig létezik olyan inerciarendszer, amelyben a cérna összes pontja éppen áll). Ha a cérna végei például a 8. ábra b^* és j jelű görbéi szerint mozognak, akkor ez nem teljesül (ezért szakad el a cérna), tehát a nyugalmi hossz fogalma ilyenkor nem értelmezhető.

A „sajáthossz” elnevezésre való áttérés önmagában a fogalmi nehézséget természetesen nem oldaná meg, mégis a sajáthossz *definíciója* értelmesen kiterjeszhető az olyan esetekre is, mint a 8. ábra b^* és j jelű görbéi. Az új definíció szerint például sajáthossz alatt érthetjük mindig azt a cérnahosszt, amelyet a *jobb oldali cérnavég pillanatnyi nyugalmi inerciarendszerében mérünk*. Ebben az inerciarendszerben a jobb oldali cérnavég áll, a bal oldali pedig akár éppen távolodhat is tőle (ekkor a cérna egyre jobban megfeszül), vagy közeledhet hozzá (és a cérna meglazul). Ez a kibővített definíció természetesen magában foglalja a nyugalmi hossz fogalmát is (amikor az értelmezhető).

A kritikus sajátgyorsulásra vonatkozó számoláshoz hasonló módon, a (11) egyenletből kapható meg egy

objektum *nyugalmi hosszára vonatkozó elvi felső limit*. Az egyenletből d -t kifejezve, mint a'_b függvényét, a

$$d(a'_b) = c^2 \left(\frac{1}{a'_j} - \frac{1}{a'_b} \right) \quad (14)$$

összefüggéshez jutunk. (Itt tehát a jobb oldali cérnavég a'_j sajátgyorsulását adott konstans értékűnek feltételezzük.) A függvény menetét a 11. ábra mutatja. Az ábráról leolvasható, hogy a bal oldali vég adott gyorsulása mellett mekkora konstans d sajáthosszú sággal rendelkezhet a cérna. Ahogy a bal oldali cérnavég sajátgyorsulása végtelenhez közelít, a még éppen állandó megfeszítettségi állapotban tartható cérna sajáthossza véges értékhez, c^2/a'_j -hez tart.

Ilyenkor, amikor a a sajáthossz konstans, jogos a *nyugalmi hossz* megnevezés, hiszen mindig található

