

KÁROLYHÁZY-FELADATOK AZ EÖTVÖS-VERSENYEN

III. RÉSZ – ELEKTROSZTATIKA

Az „erőterek” *Károlyházy Frigyes* kedvenc témái közé tartoztak. Már a 60-as években feladott olyan feladatot az Eötvös-versenyen, amelyben különböző sugarú, de egymással párhuzamosan álló fém körlapokból kellett maximális kapacitású kondenzátort összeállítani. A megoldás a telep rákapcsolása után létrejövő elektrosztatikus erőterek vizsgálatán alapult. A 70-es években különösen sok elektrosztatikai problémát fogalmazott át feladattá. Vizsgálni kellett szigetelő fonalakkal összekötött és felfüggesztett, feltöltött golyósor elhelyezkedését valamilyen földelt, illetve feltöltött fémsík felett,

vagy éppen azt a mechanikai feszültséget, amely egy síkkondenzátor terében, az erővonalakkal párhuzamosan elhelyezett fémrúdban lép fel. Kifejezetten az erővonalkép felrajzolását kérte az egyik esetben, vagy ki kellett találni a kapillárisban elhelyezkedő higany felszínének elmozdulását az elektromos erőter hatására egy másik esetben. Nagyon örült, ha az eredményhirdetésen – amelyre sohase jött el, de mindig érdeklődött, hogy mi történt ott – sikerült kísérlettel is bemutatni valamelyik feladatának megoldását. Így történt ez a következő, 1976-ban feladott alábbi példájánál is:

Két egyforma, semleges fémgömb egyikének közelében földelt fémtű van. A két gömb között közepén, felülről lassan leengedünk egy elektromosan töltött gömböt. Hol üt át először szikra?

Megoldás. Mindkét semleges gömb a közeledő, elektromosan – mondjuk pozitívan – töltött gömb erőterébe kerül, rajtuk töltésmegosztás lép fel és valamekkora elektromos potenciál alakul ki a végtelenhez, illetve a földhöz képest. Arról a gömbről, amelyik közelében a fémtű van, a csúcshatás következtében eltávozik a megosztással keletkező töltés egy része, így ő maga is – negatívan – töltött gömbbé válik. Közben szikrakísülés nem történik, azonban ennek a gömbnek ezután kisebb lesz az elektromos potenciálja, mint a másiknak. A közepén ereszkedő töltött gömb és a fémtű melletti gömb között tehát nagyobb lesz a feszültség, mint az ereszkedő töltött gömb és a másik gömb között. A szikra így a fémtű melletti gömb és az ereszkedő gömb között üt át először.

Az 1983-ban feladott következő példában is elektromos erőterébe kerülő töltetlen fémgömbök viselkedését kellett kitalálni, de most a rájuk ható erő volt a kérdés.

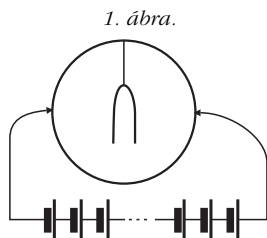
A világűrben elektromosan semleges, fémből készült, belül üres, zárt gömbhéj lebeg. Közepében kicsiny, pozitív töltésű fémgolyó nyugszik szabadon. Távoli kondenzátorlemezek segítségével a gömb alakú „Faraday kalitka” körül homogén elektromos teret hozunk létre. Mozgásba jön-e a kicsiny fémgolyó, illetőleg a gömbhéj, és ha igen, akkor miképpen?

Megoldás. A gömbhéjra a kis pozitív fémgolyó megosztást hoz létre, a gömbhéj belső felülete negatív, a külső pozitív lesz. Külső tér nélkül a kis fémgolyó a gömbhéj középpontjában labilis egyensúlyi helyzetben van. A külső tér létrehozásának pillanatában a gömbhéj külső felületén további megosztott töltések jönnek létre. A kis fémgolyót a gömbhéj árnyékoló hatása védi a külső tértől, ezért e külső tér bekapcsolásának pillanatában a kis fémgolyó gyorsulása még nulla. A pozitív töltésként viselkedő gömbhéj azonban gyorsulni kezd. A kis golyó a gömbhéj elmozdulása következtében elhagyja labilis egyensúlyi helyzetét, és gyorsulni kezd a hozzá közeledő fal felé. Amikor eléri a falat, kiegyenlítődnek a belső fal és a golyó ellentétes töltései, marad a külső felület pozitív töltése, ezért a gömbhéj végig pozitív testként gyorsul a külső homogén térben, magával cipelve a kis golyót is.

A „Faraday kalitka” fogalma megjelent a 90-es években feladott egyik példában is, de nagyon ravaszul, könnyű volt eltéveszteni, mivel ez már nem tisztán elektrosztatikai feladat volt.

Fémből készült, igen vékony falú, zárt gömbhéj belsejében fonálon egy kétrét hajtott alufóliacsík függ. A gömb két áttellenes pontjára kívülről az 1. ábrán látható módon feszültséget kapcsolunk.

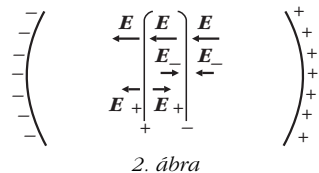
Megmozdul-e az alufóliacsík, s ha igen, hogyan?



Megoldás. A vékony gömbhéj ellenállása nem hanyagolható el. Lesz elektromos mező a gömb belsejében, mégpedig forgásszimmetrikus abban az esetben, ha a gömb belül üres. (A szimmetriatengely a csatlakozási pontokat összekötő átmérő.)

Ha a gömb közepén ott van a kétrét hajtott alufólia, akkor ezen megosztás jön létre azért, hogy a fólia ekvipotenciális lehessen.

A megosztott töltések tere kioltja a gömb belső terét a fólia két ága között (2. ábra).



2. ábra

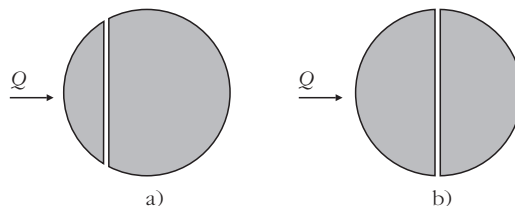
A fólia bármely ágára a külső E térerősség és a másik ágból származó (E -nél kisebb) térerősség hat, vagyis a fóliaágra a külső tér van nagyobb hatással.

Ezért a kétrét hajtott fólia *kinyílik*, és egy olyan helyzetben állapodik meg, amikor már a rá ható elektromos, gravitációs stb. erők és forgatónyomatékok eredője zérus.

Megjegyzés. Az összeállítás emlékeztet a „Faraday kalitkára”, ezért sok versenyző úgy gondolta, hogy nem lehet a gömb belsejében elektromos mező. Elfelejtették, hogy ez csak elektrosztatikában igaz, amikor a fém felülete ekvipotenciális. Most a fémen áram folyik, ezért a fémgömb különböző pontjai között általában van feszültség s így van – nemcsak benne, de körülötte is – elektromos mező. Ha valami, akkor a kétrét hajtott fóliaág képezhet ebben a feladatban Faraday-kalitkát, és e „kalitka” belsejében kell, hogy a térerősség közel zérus legyen.

A sok üres fémgömb után 2001-ben egy tömör ólomgömbre tűzött ki elektrosztatikai problémát Károlyházy Frigyes, de persze nem akármilyet: előbb gondolatban szét kellett vágni, majd összeragasztani a keletkezett darabokat.

Két egyforma ólomgömböt egy-egy sík mentén két-két részre vágunk; egyiket a 3.a, másikat a 3.b ábra szerint. A vágási felületeket hajszálvékony szigetelő réteggel látjuk el, utána a részeket újra teljes gömbbé egyesítjük. Ezután mindkét gömb bal oldali részére ugyanakkora, kicsiny Q töltést viszünk.

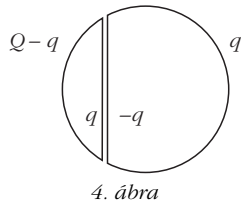


3. ábra

Ábrázoljuk mindkét esetben a gömb körül kialakuló erővonalképet! (A két gömb egymástól messze van, kölcsönhatásuk elhanyagolható.)

Megoldás. Mind az a), mind a b) esetben a bal oldali gömbszeletre vitt Q töltés a jobb oldali gömbszeleten töltésmegosztást hoz létre. Ha q -val jelöljük a Q töltésnek azt a részét, amely a feltöltött gömb-

szelet sík felületű részén helyezkedik el, akkor a jobb oldali gömbszelet sík felületére $-q$ töltés vándorol, hiszen a két egymás melletti síkfelület síkkondenzátort hoz létre (4. ábra).



4. ábra

Vajon mekkora lesz q , és hogyan oszlanak el a töltések a gömb külső felületén? A választ például az energiaminimum elvéből kaphatjuk meg. Eszerint egyensúlyi helyzetben a töltések úgy helyezkednek el a vezetőik felületén, hogy a rendszer teljes elektrosztatikus energiája a lehető legkisebb legyen. Jelen esetben a síkkondenzátor energiája (a szigetelőréteg hajszálvékony volta miatt) elhanyagolhatóan kicsi, a rendszer energiája tehát a gömbön kívüli elektrosztatikus mező energiájával egyezik meg. Ez az energia nyilván ugyanolyan töltéseloszlásnál lesz minimális, mint amilyen a Q töltéssel feltöltött eredeti (szétvágtatlan) gömb esetében, vagyis az ismert *egyenes* töltéseloszlásnál.

Más módon is érvelhetünk. Külön-külön mindkét gömbszelet potenciálja állandó, mivel elektrosztatikában a fém bármilyen alakú is legyen, mindig ekvipotenciális, és belsejében a térerősség mindig zérus. Mennyi most a két fém-gömbszelet közti potenciálkülönbség?

$$\Delta U = E \cdot d,$$

ahol E a két síkfelület közötti térben az elektromos térerősség, d pedig a síkfelületek távolsága. A feladat szövege szerint ez a távolság „hajszálvékony”, vagyis majdnem zérus, E pedig q -val arányos, tehát nem lehet „nagyon nagy”. Ezek szerint a ΔU potenciálkülönbség is majdnem zérus, azaz elhanyagolhatóan kicsi. Ebben a (jogos) közelítésben a teljes gömbfelület potenciálja ugyanakkora. Egyetlen gömbön az $U =$ állandó feltétel csak egyetlen felületi töltéseloszlás mellett valósulhat meg adott Q esetén. Ez az eloszlás a jól ismert *gömbszimmetrikus* töltéseloszlás, amikor a felületi töltéssűrűség

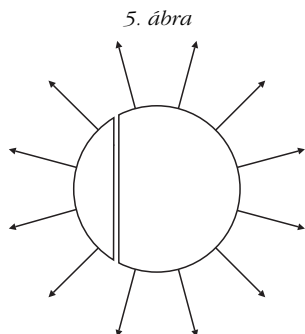
$$\sigma = \frac{Q}{4 R^2 \pi} = \text{állandó}.$$

Az egyenes felületi töltéssűrűséghez tartozó elektromos térerősség a gömbön belül (a „síkkondenzátor” belsejét leszámítva) zérus, a gömbön kívül pedig az ismert Coulomb-féle erőtér, nagysága a középponttól r távolságban

$$E(r) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (r > R).$$

A gömbön kívül kialakuló erővonalkép tehát jó közelítéssel az 5. ábrán látható lesz.

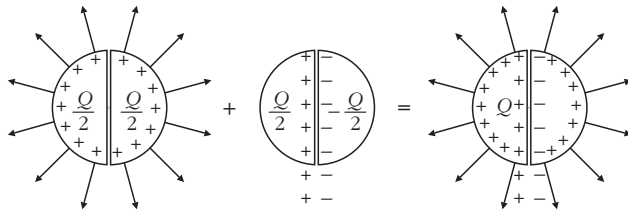
Megjegyzés. A feladatot 11 versenyző oldotta meg jól, ezen kívül még há-



5. ábra

rom versenyző adott be a b) kérdésre helyes megoldást. Két megoldónak jutott eszébe a közepen félbevágott gömb esetére az alábbi szellemes megoldás.

Először adjunk mindkét félgömbnek $Q/2$ töltést, azután adjunk a bal oldalnak $Q/2$, a jobb oldalnak pedig $-Q/2$ töltést! E két állapot „egyesítéséből” (szuperpozíciójából) előállítható a feladatban megadott állapot (6. ábra). Ez a szuperpozíció egyrészt a töltésekre, másrészt az erőtérre is vonatkozik, tehát:

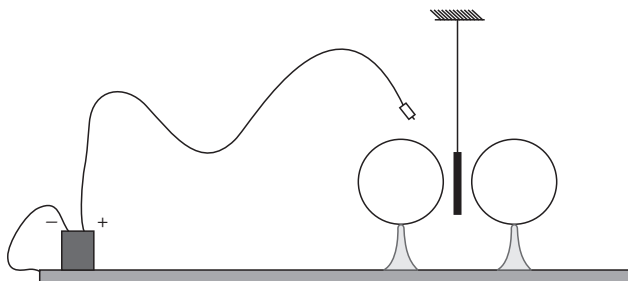


6. ábra

A következő, 2008-ban feladott példában is szerepel telep, de mivel nincs folyamatosan bekapcsolva, nem indít stacionárius áramot, tehát a probléma tisztán elektrosztatikai.

Egy fizikaszakkörön valaki demonstrálni szeretné, hogy ellentétes irányú elektromos térerősségvektorok leronthatják egymást. Elképzelése a következő. Szigetelő lábakon két egyforma fémgömböt állít egymás mellé és pontosan ugyanakkora potenciálra tölti fel őket. Ezután a kettejük közé középre belógatott próbatöltésre nem fog elektromos erő hatni.

A gyakorlati kivitelezéshez a kísérletező egy néhány száz V feszültségű telep egyik sarkát „leföldeli”, vagyis az asztallapra tett nagy fémtálcához csatlakoztatja – ezt tekinthetjük zérus potenciálú helynek –, a másik pólushoz csatlakozó banándugóval pedig először a bal oldali, utána a jobb oldali gömböt, majd végül a szigetelő szálon közéjük lógatott alufóliacsíkot érinti meg (7. ábra). Meglepődve tapasztalja, hogy az alufólia igenis kitér a függőleges irányból, elmozdul az egyik gömb felé.



7. ábra

Mi lehet a kudarc magyarázata? (A levegő száraz, a lábak jól szigetelnek, a gömbök sokáig megtartják a rájuk vitt töltést.)

Melyik gömb felé tér ki az alufólia?

Hogyan lehetne a kudarcot elkerülni?

Megoldás. Tekintsük először azt az esetet, amikor még csak a bal oldali gömböt töltöttük fel a telep feszültségére. Ekkor ez a gömb felvett valamennyi töl-

tést. A jobb oldali gömb, ami ugyan töltetlen, most egy elektromos erőterbe került, ennek hatására benne töltésszétválás történt és már nem zérus a feszültsége, hiába zérus a rajta lévő össztöltés.

Ezek után érintjük meg a jobb oldali gömböt a telep előbbi – pozitív – sarkából jövő vezetékkel. Ennek hatására ez a gömb is a telep feszültségére töltődik fel, viszont ehhez már kevesebb töltésnek kell felmennie rá, mint amennyi töltés a másik gömbre került! Sőt, ha a második gömb feltöltése után megmérjük az első (a bal oldali) gömb feszültségét, az nagyobb lesz, mint a telep feszültsége, hiszen most már ez a gömb is erőterbe, a jobb oldali gömb erőterébe került!

A helyzet annyira meglepő, hogy eredményhirdetés-kor (technikai okokból egy 3000 V-os feszültségforrást használva) kísérletileg is bemutattuk. Amikor a bal oldali gömböt feltöltöttük 3000 V-ra, a jobb oldali gömbre kapcsolt elektrosztatikus voltmérő 800 V-ot mutatott. Amikor pedig a jobb oldali gömböt is feltöltöttük 3000 V-ra, a bal oldali gömb feszültsége 3800 V-ra nőtt!

Mindenképpen több töltés került tehát a bal oldali gömbre, mint a jobb oldalra, ezért a közéjük középre lógatott és feltöltött alufóliacsíkra a bal oldali gömb nagyobb taszítóerőt gyakorol, mint a másik gömb. A fóliacsík tehát *jobbra* fog kilendülni!

Az egyik győztes versenyző még azt is megjegyezte, hogy ha túl közel van egymáshoz a két gömb, akkor a közéjük lógatott fémfólián már töltetlen állapotban is a két gömb potenciálja közötti, tehát a telepfeszültségnél nagyobb potenciál alakulhat ki. Ezért, amikor hozzáérünk a telepből jövő vezetékkel, lehet, hogy leve-szünk róla töltést, így áll be a fólia a telep feszültségére. Ebben az esetben azonban negatív töltése lesz, és a bal oldali gömb jobban fogja vonzani, mint a jobb oldali, vagyis ilyenkor a fólia *balra* lendül ki.

Hogyan lehetne elkerülni a kudarcot? Több mód is van rá. A legbiztosabb eljárás az, hogy *egyszerre* töltjük fel a két gömböt, de az is elég, ha kellő távolságra, viszonlag messze helyezük őket egymástól. Igaz, ebben az esetben nem olyan látványos az a kísérlet, hogy közöttük középben nem hat erő a belógatott fóliára.

Az egyik legérdekesebb feladatot a 2010. évi Eötvös-versenyre találta ki Károlyházy Frigyes. Nemcsak maga a fizikai probléma eredeti, de tálalása is az.

Két egyforma, mondjuk 5 cm átmérőjű, vékony lemezből készült fémkorong (A és B) szigetelt fonálon függ pontosan egymással szemben, párhuzamosan, egymáshoz közel, például 2 mm távolságban, a 8.a ábrán látható módon. Mindkét korongnak ugyanak-kora, kellőképpen kicsiny q elektromos töltést adunk. (Mivel q kicsi, sem a korongok parányi elmozdulása, sem a levegőn át történő kisülések veszélye nem okoz bonyodalmat.) Kezdetben természetesen mindkét korongra hat a másik korong taszító ereje.

Fizika szakkörön az elektromos árnyékolás a téma.

A két korongot nézve Beának az az ötlete támad, hogy ha az A és B korong közé óvatosan (ügyelve, hogy egyikhez se érjen hozzá) egy ugyanolyan, de elektromosan semleges C fémkorongot eresztünk be

szigetelő fonálon a 8.b ábrának megfelelően, akkor az „leárnyékolja” mindkét eredeti korongnak a más-ikra gyakorolt hatását, ezért mind az A-ra, mind a B-re ható erő gyakorlatilag nullára csökken.

Gabi figyelmeztet rá, hogy az elektromos mező nagyobb tartomány-ra terjedhet ki, mint a töltött testek mérete, ezért Bea ötletét úgy módosít-ja, hogy a C korong átmérője legyen például 25 cm, ahogya 8.c ábrán lát-ható. (Az ábra nem méretarányos.) Gabi szerint csak ekkor csökken elha-nyagolható értékre az A-ra, illetve B-re ható elektromos erő.

a) Mit tapasztalnánk, ha Bea öt-letét követve A és B közé velük egyenlő méretű, semleges C fémkorongot en-gednénk, majd megmérnénk az A-ra, illetve B-re ható erőket?

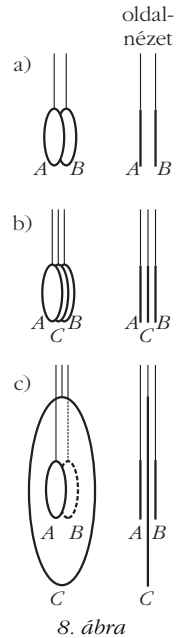
b) Mi lenne az eredmény, ha Gabi javaslatát ellenőriznénk méréssel?

c) Elképzelhető-e olyan méretű semleges C korong, amelynek alkalmazásával az A-ra, illetve a B-re ható erő pontosan zérussá válik?

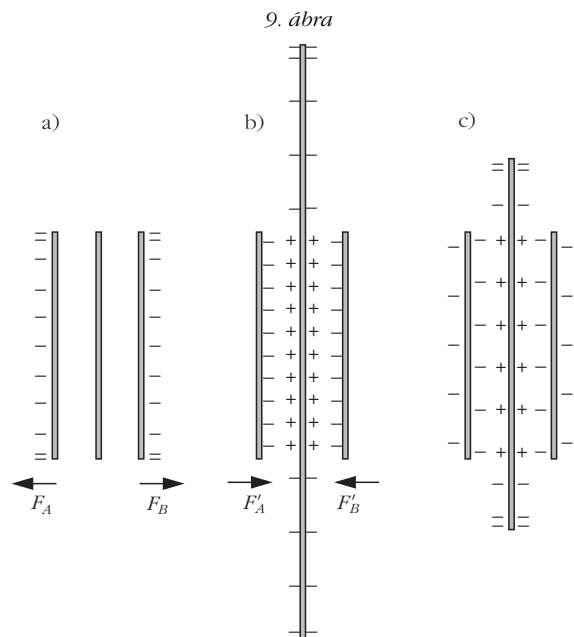
Megoldás.

a) A középre leengedett fémkorongon nem alakulhat ki töltésmegosztás, mert a korong (fém!) belsejében nem lehet szabad töltés, felületén pedig nem lép-het fel kétféle előjelű töltés a szimmetrikusan, ugyan-akkora korongokon elhelyezkedő, azonos előjelű töltések hatására. Ezért Bea ötlete nem jó, a két feltöl-tött korongra ható erő *nem* változhat meg. Ugyanúgy *taszítanak* egymást a semleges C fémkorong leeresz-tése után, mint addig (9.a ábra).

b) Itt, a nagyméretű C korong esetén már érvénye-sülhet a töltésmegosztás (9.b ábra). A középső ko-



8. ábra



9. ábra

rongnak a másik két koronggal szemközi részein q -val ellentétes töltés alakul ki mindkét oldalon. Ugyanakkora, q -val azonos előjelű töltés lép fel a nagy C korong széle felé, úgyhogy az össztöltés továbbra is nulla marad. Viszont a töltött korongokra most a nagy korongon megosztott (influált), q -val ellentétes előjelű töltések *vonzó* erőt fejtenek ki, és ez nagyobb, mint a taszító erő. A két töltött korongra ható erő éppen ellentétes irányú lesz, mint addig, amíg nem volt közöttük a nagy korong.

c) Gondolatban fokozatosan növeljük a középső korong átmérőjét 5 cm-ről 25 cm-re. A kezdeti taszító erő csökkenni kezd, míg végül – folytonosan változva – vonzó erőbe megy át. Közben, valamekkora átmérőnél tehát éppen zérus a töltött korongokra ható erő (9.c ábra). Hogy ez mekkora átmérőnél következik be, azt kissé bonyolultabb számítással lehet csak meghatározni; ezt azonban nem várta el a versenybizottság a megoldóktól.

Tájékozódásul vázoljuk a három esetben kialakuló töltéseloszlást (9. ábra), feltéve, hogy eredetileg negatív töltést adtunk a korongoknak. (Az ábrák *nem* méretarányosak.)

Kiegészítések.

a) eset: vegyük a három korong burkolóhengerét. Képzeld azt, hogy ez a „lapos” henger teljes egészében homogén vezető. Vigyük fel rá $2q$ töltést, ezek legnagyobb része henger véglapjain jelenik meg, csak egy kis része kerül a henger palástjára. Ha ezután eltávolítjuk a hengernek azt a részét, ami nem a három korong, akkor látszik, hogy a középső korongon nincs töltés, így nem befolyásolja az A és B korong közötti erőhatást.

b) eset: Ha a középső korong végtelen nagy lenne, akkor a tükörtöltés módszerét alkalmazva jól látszana, hogy A -ra és B -re is vonzóerőt fejt ki a középső fémsík, miközben az A és B közötti kölcsönhatás már nem is lép fel. Most ugyan nem végtelen nagy a középső korong, de területe a kis, töltött A és B korong területének 25-szöröse, távolsága a kis korongoktól 1-1 mm, ami átmé-

rőjének 250-ed része. Vagyis a C korong közepén influált, az A és B töltésével ellenkező előjelű töltés vonzó hatásának kell érvényesülnie ebben az esetben is.

E feladat c) kérdésére egy középiskolások számára is követhető, kvantitatív számítást közölt *Gnädig Péter* a *KöMaL*-ban (61. évf., 2011. október, 426–436. old.), elnyerve ezzel a feladat kítűzőjének elismerését is.

Károlyházy Frigyes feladatai azóta is mindig megmozgatják a fizikusok fantáziáját, különösen azokét, akik nem szakadtak el a középiskolai fizikától. Vagy azért, mert valaha ők is indultak az Eötvös-versenyen, vagy azért, mert fiaik, lányaik, esetleg már unokáik hozzák haza, s mutatják meg ezeket a feladatokat.

Ilyenkor előtti őket a valamikori harci szellem, a küzdeni, vagy csak saját maguk számára bizonyítani akarás, és igazi sikerélményhez juttatja őket, ha sikerül megoldaniuk a Károlyházy-feladatokat. S ha mégsem? Olyankor felrémlik bennük, hogy az ő idejükben is volt valami hasonló, talán éppen Károlyházy-feladat, amit már akkor se sikerült megoldaniuk. Vigasztalásul fel-felidézük magukban a *Tanár úr kéretem*, *Karinthy* örökbecsű művét, abból is a *Tanítom a kisfiamat* című írást, amelyben az apa lelkébe nyilall a felismerés:

Egyszerre világosság gyűl az agyamban. Mint egy villámcsapás, úgy ér a Nagy Megismerés, aminek hiánya búszegynéhány év óta lappang és borong bennem úgy van, most rájöttem! ... Nincs kétség – akkor ... ott ... egészen nyilvánvaló – úgy van, nyilvánvaló, az apám se értette ezt a példát!

(...hogy bány nap alatt ég el kilenc köbméter bükkfa, és hatvan-hetven év élet.)

Radnai Gyula

Irodalom

1. Vermes Miklós: *Az Eötvös-versenyek feladatai I. 1959–1988.* Typotex, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997, 163 o.
2. Radnai Gyula: *Az Eötvös-versenyek feladatai II. 1989–1997.* Typotex, Budapest, 1998, 131 o. <http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tkt/eotvos-versenyek/adatok.html>
3. <http://www.kfki.hu/education/verseny/eotvosverseny/report.html>