A FIZIKA TANÍTÁSA

KÁROLYHÁZY-FELADATOK AZ EÖTVÖS-VERSENYEN IV. RÉSZ – ELEKTROMOS ÁRAM

A 60-as években főleg elektromosságtani feladatokkal jelentkezett *Károlyházy Frigyes* az Eötvös-versenyen – nyilván ezekben volt hiány, ilyeneket kért tőle *Vermes Miklós*. 1960-ban RC-, 61-ben, 67-ben és 68-ban RL-hálózatokban kellett vizsgálni ki- és bekapcsolási jelenségeket, és – amennyire lehet – leírni a fellépő áramlökéseket. Izgalmas kivételként bádoglemezből készített zárt hengerek elektromos ellenállását kellett összehasonlítani 1962-ben. Ez már jellegzetesen Károlyházy-feladat volt, Vermes el is készítette ezeket a hengereket, és elhelyezte őket nevezetes szertárában, a csepeli Jedlik Ányos Gimnáziumban.

A 70-es, majd a 80-as években kevesebb elektromos feladatot adott Károlyházy Frigyes, példaképpen idézzünk fel közülük néhányat – az ábrák és a megoldás részletes bemutatása nélkül.

Közös, teljesen zárt vasmagon 200, 300 és 400 menetes tekercsek vannak. Hogyan kell ezeket összekapcsolni, hogy a keletkezett tekercsrendszer önindukciós együtthatója a lehető legkisebb legyen? (1975/3. feladat)

Ez a feladat arra az elméletileg izgalmas tényre világít rá, hogy a párhuzamosan kapcsolt ideális, szoros csatolású tekercsek eredő induktivitása zérus. Ugyanezt a kezdeti összeállítást használta fel Károlyházy Frigyes 1981-ben:

Egy transzformátornak 200, 300 és 400 menetes tekercsei vannak. Mely kapcsolásban lehet egy adott váltófeszültséget a lehető legnagyobb arányban erősíteni? (1981/3. feladat)

E feladatnak már nincs triviális megoldása; sok próbálgatás, gondolati kísérletezgetés után lehet rájönni, hogy ha a 200 és a 300 menetes tekercseket ellentétesen kapcsolva használjuk primer tekercsként, a 300 és 400 menetes tekercset pedig szabályosan sorba kapcsolva szekunderént, akkor 7-es erősítést érhetünk el, amely az adott esetben a lehetséges maximális érték.

Egy kartonhengertől meghatározott távolságra, vékony fonálra egy lágyvasdarabkát függesztünk. A hengerre huzalból tekercset csévélünk, és erre egy meghatározott váltófeszültséget kapcsolunk. A vasdarabka kissé elmozdul. Hogy a hatást megnöveljük, a hengerre kétszer annyi menetet csévélünk. Mit fogunk tapasztalni? (1987/3. feladat)

Azt kellett észrevenni, hogy a vasdarabkára kifejtett erőhatás a tekercsben folyó árammal és a tekercs menetszámával is közelítőleg arányos. A menetszám megkétszerezése négyszeresre növelné a tekercs induktivitását, majdnem ilyen arányban nőne a tekercs váltóáramú ellenállása is, tehát a tekercsen átfolyó áram majdnem a negyedére csökkenne. Hiába a menetszám kétszereződése, az áram sokkal jobban csökkenne, így az erőhatás is kisebb lenne.

1989-ben Vermes Miklós már nem vett részt a versenybizottságban. Ebben az évben mindhárom feladatot Károlyházy Frigyes adta. Idézzük fel most az elektromosságtani feladatot, megoldással együtt.

Az iskolai 12 V-os, 50 Hz-es váltóáramú áramforrásra sorba kapcsoltunk egy 24 V, 10 W-os izzót *és egy 101,3 μF kapacitású kondenzátort. Az izzó alig világít. Rendelkezésünkre áll még egy 0,1 H induktivitású tekercs is. Hogyan lehetne a kapcsolást úgy átalakítani, hogy az izzó szép fényesen világítson? (A tekercs ohmos ellenállása elhanyagolható. Csak a kapcsolást szabad átalakítani, az alkatrészeket nem.)*

Megoldás. A 24 V, 10 W-os izzó ellenállása:

$$R = \frac{(24\ \mathrm{V})^2}{10\ \mathrm{W}} = 57{,}6\ \Omega.$$

A 101,3 μF-os kondenzátor váltóáramú ellenállása:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314\ \mathrm{s}^{-1} \cdot 101{,}3 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F}} = 31{,}4\ \Omega.$$

A 0,1 H induktivitású tekercsre:

$$X_L = \omega L = 314\ \mathrm{s}^{-1} \cdot 0{,}1\ \mathrm{H} = 31{,}4\ \Omega.$$

Mivel e két váltóáramú ellenállás egyenlő, az embernek azonnal a rezonancia jut az eszébe. Kapcsoljuk sorba mindhárom elemet! Ekkor az eredő impedancia az ohmos ellenállással egyenlő, és erre jut a generátor teljes feszültsége – mégsem ez a legjobb megoldás. Igaz, eredetileg a kondenzátorra és az ellenállásra együtt jutott 12 V, most pedig magára az ellenállásra egyedül, de hát hol van ez még attól a 24 V-tól, ami az izzó üzemi feszültsége? Jobban világít az izzó, de ez még nem az igazi.

Ha mindhárom elemet párhuzamosan kapcsoljuk, akkor is csak 12 V juthat az izzóra.

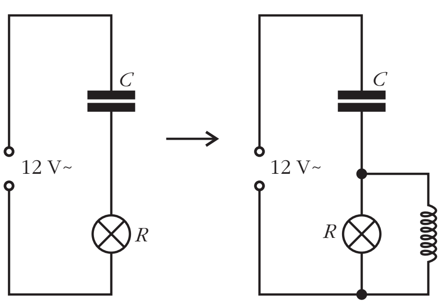
Térjünk vissza az eredeti ötlethez, a soros rezonancia esetéhez! A sorba kapcsolt tekercsen és kondenzátoron külön-külön sokkal nagyobb lehet a feszültség, mint a generátor feszültsége. Nem lehetne ezt kihasználni?

Kössük sorosan a tekercset és a kondenzátort a generátorra, és kapcsoljuk az izzót valamelyik elemmel párhuzamosan! Mivel eredetileg a kondenzátor és az izzó voltak sorosan kapcsolva, a legegyszerűbb az lesz, ha a már összeállított kapcsolásban az izzóra párhuzamosan rákötjük a tekercset (*1. ábra*).

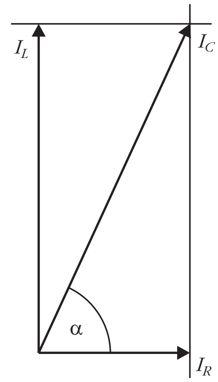
Most hogyan határozhatjuk meg az izzóra jutó feszültséget?

Az izzóra és a tekercsre ugyanaz a feszültség jut. A tekercsen átfolyó áram negyed periódust (90°-ot) késik

1. ábra



ehhez a feszültséghez képest, az izzón átfolyó áram pedig ugyanabban a fázisban van, mint a rá jutó feszültség. Ez azt jelenti, hogy a tekercsen és az izzó ellenállásán átfolyó áram között 90° fáziskülönbség van. A szokásos vektoros ábrázolással még a kondenzátoron átfolyó áramot is megkaphatjuk, mint a kettő vektori összegét (*2. ábra*).

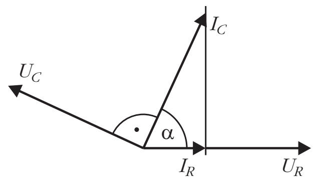


2. ábra

Az ábra alapján tgα értéke:

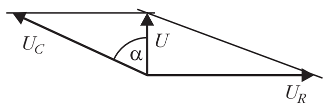
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{I_L}{I_R} = \frac{R}{\omega L} = R\omega C.$$

Az áramok vektorábráját felhasználva szerkeszthetjük meg a feszültségek vektorábráját. Az ellenálláson a feszültség ugyanolyan fázisú, mint a rajta folyó áram, tehát I_R és U_R vektora ugyanolyan irányú. A kondenzátoron a feszültség 90°-kal van elmaradva a kondenzátoron folyó áramhoz képest, ahogy azt a *3. ábra* mutatja. U_C értéke az ábra alapján



3. ábra

$$U_C = I_C \frac{1}{\omega C} = \frac{I_R}{\cos\alpha}\,\frac{R}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{U_R}{\sin\alpha}.$$



4. ábra

Ezt az összefüggést felhasználva szerkeszthetjük meg a generátor feszültségének vektorát is (*4. ábra*).

A *4. ábrá*ról már leolvasható az izzóra jutó U_R és a generátor U feszültsége közti összefüggés:

$$U_R = U\mathrm{tg}\,\alpha = U\frac{R}{\omega L} = 12\ \mathrm{V} \cdot \frac{57{,}6\ \Omega}{31{,}4\ \Omega} = 22{,}0\ \mathrm{V}.$$

Ekkor már mondhatjuk, hogy a 24 V-os izzó fényesen világít.

Ugyanilyen jó megoldás az is, ha az izzót a kondenzátorral kötjük párhuzamosan és velük sorba a tekercset. Az összes többi esetben az izzóra ennél kisebb feszültség jut.

Megjegyzés. Akik ismerik e vektoros számítás mélyebb hátterét, az úgynevezett komplex formalizmust, azok algebrai úton is kiszámíthatják mindazt, amit a fenti geometriai megoldásból kaptunk. A komplex formalizmusban az áramokat és a feszültségeket olyan komplex számokkal jellemezzük, amelyek abszolút értéke adja az áramok és feszültségek csúcsértékét, a valós tengellyel bezárt szög pedig a fázisszöget. A komplex impedanciák:

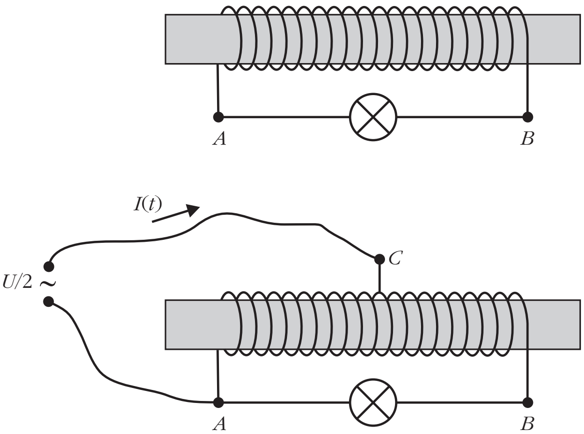
$$\tilde{X}_L = j\omega L, \quad \tilde{X}_C = \frac{1}{j\omega C}, \quad \tilde{R} = R,$$

ahol $j = \sqrt{-1}$ a komplex egységgyök.

Hangsúlyozzuk azonban, hogy a feladatot meg lehetett oldani a komplex formalizmus ismerete nélkül is.

A hosszú tekercs és a kis izzó kedvenc kalandozási területe volt Károlyházy Frigyesnek, az indukció pedig maga egy olyan jelenség, amely különösen alkalmas fizikai gondolatok felcsillantására. Jól mutatja ezt az alábbi két Károlyházy feladat a 2007. és a 2009. évi Eötvös-versenyről.

Egy terebélyes vasmaggal ellátott, nagy önindukciójú, de mégis elhanyagolható ohmikus ellenállású tekercs végeit U feszültségre méretezett izzón keresztül kötjük össze. Ha az A és B pontok közé U/2 effektív értékű váltakozó feszültséget kapcsolunk, az izzó nagyon halványan világít.



5. ábra

Mivel a tekercs közepéről is van egy C kivezetés, megpróbáljuk a feszültségforrás pólusait az A és C pontokhoz kötni. Megváltozik-e az izzón átfolyó áram erőssége, és ha igen, hogyan? Az 5. ábrán bejelöltük a főágban folyó I(t) pillanatnyi áram irányát. Hogyan folyik az áram ugyanekkor a tekercsben?

Megoldás. Három dolgot kell egymás után észrevennünk, hogy viszonylag gyorsan eljussunk a helyes válaszhoz.

1. Mivel a tekercs ohmikus ellenállása elhanyagolható, ezért $U_{AC} \approx U/2$ kell legyen, hogy ne folyjék a generátoron végtelen nagy áram.

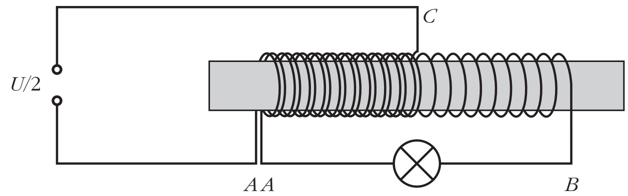
2. Mivel a fluxusváltozás mértéke a tekercs különböző részein ugyanakkora, ezért mindkét féltekercsen ugyanakkora az indukált feszültség, tehát $U_{AC} = U_{CB}$.

3. Mivel a lámpa párhuzamosan van kapcsolva a generátor plusz a tekercs jobb oldali felével, ezért

$$U_{lámpa} = U_{gen} + U_{CB} = \frac{U}{2} + \frac{U}{2}, \text{ tehát } U_{lámpa} = U.$$

Így a lámpa az „üzemi” feszültséget kapja, ezért *jól ég!*

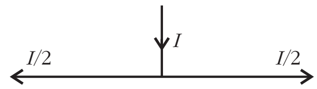
Az áramirányok meghatározásához – *Werner Miklós* ötlete alapján – rajzoljuk át a megadott kapcsolást a következő módon: képzeljük el, hogy a tekercs bal oldali részét alkotó huzalt hosszában kettévágjuk, és így ezen az oldalon két, egymás mellett futó tekercshez



6. ábra

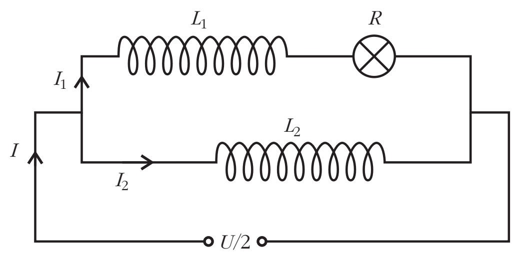
jutunk (*6. ábra*). Kaptunk egy *AC* tekercset, amire a generátor feszültségét kapcsoljuk, és egy *AB* tekercset, amire a lámpát kötöttük. Ez bizony egy transzformátor! A primer menetszám $N/2$, a primer áram (a feladatban alkalmazott jelölés szerint) I. A szekunder menetszám N, tehát a szekunder áram $I/2$ lesz.

C-től *B* felé $I/2$, *C*-től *A* felé ugyancsak $I/2$ ($I - I/2 = I/2$) áram folyik (*7. ábra*).



7. ábra

Megjegyzések. Bemutatunk további három megoldást, amellyel a versenyzők eljutottak a helyes válaszhoz. Mindegyikük „ráérzett” a feladatban rejlő transzformátorra (ténylegesen auto-transzformátornak nevezik a feladatban megadott kapcsolást), és helyesen alkalmazták az általuk ismert összefüggéseket. Nem részletezzük, csak vázoljuk a megoldásnál követett gondolatmeneteket.



8. ábra

1. *Konczer József* a *8. ábrá*n látható módon rajzolta át a kapcsolást. Figyelembe véve a tekercsrészek közötti szoros csatolást, a kölcsönös indukciós együttható: $M = (L_1 L_2)^{1/2}$. Az indukált feszültségek:

$$U_1 = -L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + M \frac{\Delta I_2}{\Delta t},$$

illetve

$$U_2 = -L_2 \frac{\Delta I_2}{\Delta t} + M \frac{\Delta I_1}{\Delta t}.$$

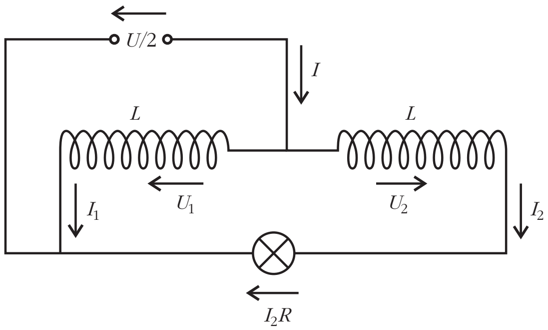
Mivel most $L_1 = L_2 = L = M$, ezért

$$U_1 + U_2 = 0.$$

A generátor feszültsége:

$$\frac{U}{2} = -U_2 = I_1 R - U_1,$$

ebből pedig $I_1 R = U$ következik.



9. ábra

2. *Kónya Gábor* a *9. ábrá*n látható módon rajzolta át a kapcsolást. A szinuszos váltakozó áram tárgyalására kidolgozott komplex formalizmus ismeretében ő az alábbi egyenleteket tudta felírni:

$$U_1 = j\omega\, L(I_1 - I_2),$$

$$U_2 = j\omega\, L(I_2 - I_1).$$

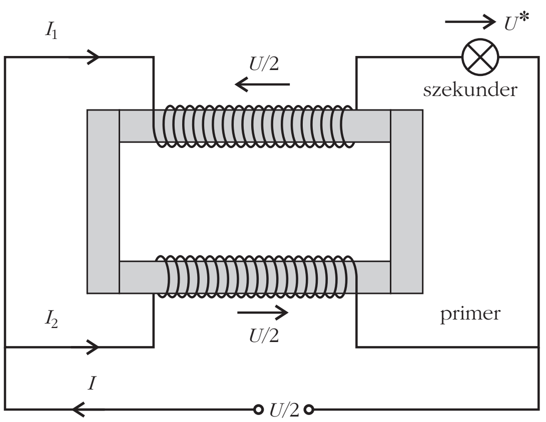
Ezekből következik, hogy $U_2 = -U_1$. Mivel

$$U_1 = U_2 + I_2 R \text{ és } U_1 = \frac{U}{2},$$

ezért

$$\frac{U}{2} = -\frac{U}{2} + I_2 R, \text{ vagyis } U = I_2 R$$

kell legyen. (j-vel itt is a komplex egységgyököt, $\sqrt{-1}$ -et jelöltük.)



10. ábra

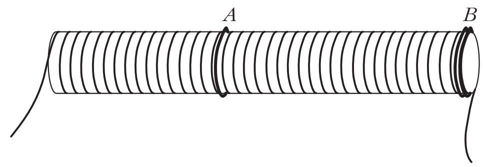
3. *Szolnoki Lénárd* úgy rajzolta át a kapcsolást (*10. ábra*), hogy még jobban emlékeztessen egy veszteségmentes, zárt vasmagú transzformátorra. Mivel a transzformátor szekunder oldalán ellentétes „irányú” a feszültség, mint a primer oldalon, ezért a felső hurokra felírva a második Kirchhoff-törvényt, kapjuk:

$$\frac{U}{2} + \frac{U}{2} - U^* = 0, \text{ tehát } U^* = U.$$

Mindhárom megoldó már a saját rajzán helyesen jelölte be az áramok irányát.

Egy hosszú, keskeny szolenoidban egyenáramot tartunk fenn. Legyen például a tekercs hosszúsága l = 60 cm, sugara r = 2 cm, menetszáma N = 600, az áramerősség I_0 = 1 mA.

A tekercset a közepe táján hézagmentesen körülvesszük egy egyszerű, zárt vezető hurokkal (A), és egy ugyanekkora átmérőjű, de kettős hurkot (zárt, „kétmenetes tekercset”) (B) helyezünk el a tekercs szájánál is, a 11. ábra szerint. A és B olyan anyagból készült, amely viszonylag könnyen szupravezetővé tehető, ohmikus ellenállása kellőképpen alacsony hőmérsékleten zérussá válik.



11. ábra

Kezdetben természetesen nem folyik áram A-ban és B-ben. De most lehűtjük, szupravezetővé tesszük őket, majd a szoleniod áramkörét megszakítjuk. Ekkor (mivel a mágneses fluxus, amely egy zárt szupravezető áramkörön halad át, nem változhat meg) az A hurokban valamekkora I_A, a kettős hurokban I_B áram indukálódik, amely fenn is marad.

1. Hasonlítsa össze I_A és I_B nagyságát! Közelítőleg egyenlők-e, és ha nem, melyik nagyobb a másiknál és hányszor?

2. A szolenoidra vonatkozó adatok ismeretében adjon valamilyen ésszerű becslést I_A értékére!

Megoldás. Az első kérdésre viszonylag könnyen válaszolhatunk, ha felismerjük, hogy amikor állandó erősségű áram folyik a szolenoidban, akkor a tekercs szájánál fele akkora mágneses fluxus alakul ki, mint a tekercs közepe táján. (Ennek legegyszerűbb igazolásához úgy juthatunk, hogy gondolatban hozzáillesztünk a szolenoidhoz egy ugyanolyan másikat. Azon a helyen, ahol a két tekercs találkozik, mindkét tekercsnek a szimmetriatengely irányában $B/2$ nagyságú mágnesesindukció-vektor komponest kell létrehoznia ahhoz, hogy kialakuljon a tekercs belsejére jellemző, B nagyságú indukcióvektor.)

A fele nagyságú mágneses fluxust két menettel kell létrehozni a tekercs végén, vagyis egy menetben itt *negyedakkora áram* is elég, mint amire a tekercs közepe táján lévő egyetlen menetben van szükség.

A feladat második kérdése az A hurokban folyó I_A áram nagyságára vonatkozik. Egy körvezetőben folyó I áram a körvezető középpontjában

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\,r}$$

nagyságú mágneses teret hoz létre. Első közelítésben tegyük fel, hogy ez éppen akkora, mint amekkorát a szolenoidban folyó I_0 áram hozott létre:

$$B = \mu_0 \frac{I_0 N}{l}.$$

Ebben a közelítésben tehát

$$I = 2\,r\frac{I_0 N}{l}.$$

Behelyettesítve a megadott értékeket, a tekercs közepe táján levő hurokban indukálódó áramra $I = I_A = 40$ mA adódik. Figyelembe véve azonban azt, hogy a körvezető közepén a legkisebb a mágneses indukció értéke, vagyis a körlap pontjaira vonatkozó „átlagos” indukció ennél biztosan nagyobb, a 40 mA-nél biztosan kisebb áram indukálódik a szupravezető hurokban.

Felhasználva például a körvezető induktivitására a szakirodalomban található

$$L = \mu_0\, r \ln\frac{r}{r_{drót}}$$

közelítő képletet (és feltételezve, hogy mondjuk $r_{drót} = r/50$), a körvezetőben indukálódó áramra a fluxus változatlanságát kifejező

$$\mu_0 \frac{I_0 N}{l} r^2 \pi = L I_A$$

összefüggésből $I_A = 16$ mA adódik.

Megjegyzések:

1. A drót vastagságára vonatkozó adat nem szerepelt a feladat szövegében, de az eredmény – ésszerű határok között – nem is függ lényegesen ettől az adattól. Ha például a drót sugara $r/10$ vagy $r/100$, az indukálódó áramerősségre 27 mA, illetve 13 mA értékeket kapunk.

2. I_A-ra a következő egyszerű megfontolással is adhatunk nagyságrendi becslést. A szolenoid közepe táján az átmenő fluxust nagyon sok menetben folyó áram együttes hatása hozza létre. A vizsgált helyen levő egyetlen menet (mint körvezető) fluxusa annyiszor kisebb az egymenetes szupravezető fluxusánál, ahányszor kisebb az I áram I_A-nál. Gyakorlatilag ugyanekkora fluxust hoz létre a szolenoid kiszemelt menete melletti egy-egy „körvezető” menet is. A távolabbi (néhány r-nyi távolságnál jóval messzebb levő) menetek azonban már egyre kevésbé járulnak hozzá a középső rész fluxusához, hiszen a mágneses terük „szétszóródik”, erővonalaiknak csak kis része halad át a kiszemelt körlapon. A szolenoid néhányszor (mondjuk 1 vagy 2-szer) r hosszúságú szakaszán körülbelül 20-40 menet található. Ezek mágneses fluxusa akkor lesz ugyanakkora, mint az egyetlen szupravezető köráram fluxusa, ha I_A 20-40-szer erősebb, mint a szolenoid 1 mA-es árama.

Fejezzük be ezt a négy részes visszatekintést egy olyan fotóval, amely Károlyházy Frigyes egyik előadásán készült [4]. A kép jelentése talányos, éppen olyan, mint egy Károlyházy feladat. Az előadó mosolyog, miközben a kezével is magyaráz, talán válaszol egy feltett kérdésre – de az is lehet, hogy már éppen befejezte az előadást, és vidáman búcsút int a hallgatóságnak. Ez utóbbi jelentés mára szimbolikussá vált.

Károlyházy Frigyes elköszönt tőlünk, de írásaiban ránk hagyta fizikai szemléletét, emlékezetünkre bízta sok érdekes előadását. Megőrizzük emlékét, amíg csak tudjuk.

Radnai Gyula

Irodalom

1. Vermes Miklós: *Az Eötvös-versenyek feladatai I. 1959–1988.* Typotex, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997, 163 o.
2. Radnai Gyula: *Az Eötvös-versenyek feladatai II. 1989–1997.* Typotex, Budapest, 1998, 131 o., http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tkt/eotvos-versenyek/adatok.html
3. http://www.kfki.hu/education/verseny/eotvosverseny/report.html
4. http://videotorium.hu/hu/recordings/details/252,Tunderkert_-_egy_kis_idotoltes_a_teridon